تصنیف

ای۔ ڈبلیو۔ ہابسن۔ ایس سی ڈی ایل۔ ایل۔ ڈی ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتہ تالیف و ترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

۱۳۵۵ھ م ۱۳۴۵ف م ۱۹۳۶ء

فہرست مضامین

علم مثلث مستوی

پہلا باب

زاوئی مقداروں کی پیمائش

(۞)

دفعات	مضمون	صفحہ
۱	تمہید۔	۱
۲ تا ۳	کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین۔	۲
۴	زاویوں کی عددی پیمائش۔	۴
۵ تا ۱۰	زاویوں کی دائری پیمائش۔	۵
۱۱	دائری قوس کا طول۔	۹
۱۲	دائرہ کے قطاع کا رقبہ۔	۱۴
	پہلے باب پر مثالیں۔	۱۵

دوسرا باب

دفعات	مضمون	صفحہ

خطوں کی پیمائش - ظِل

تیسرا باب

دائری تفاعل

چوتھا باب

دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے دائری تفاعل

پانچواں باب

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

دفعات	مضمون	صفحہ

دسواں باب

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان رشتے

گیارہواں باب

مثلثوں کا حل

دفعات	مضمون	صفحہ
۱۴۱ تا ۱۴۴	کثیر الاضلاعوں کا حل۔	۲۸۹
۱۴۵ تا ۱۴۹	بلندیاں اور فاصلے۔	۲۹۳
	گیارہویں باب پر مثالیں۔	۳۰۰

بارہواں باب

مثلثوں اور ذوار بعتہ الاضلاعوں کے خواص

تیرہواں باب

دفعات	مضمون	صفحہ

ملتف اعداد

چودھواں باب

لامتناہی سلسلوں کا نظریہ

پندرہواں باب

قوت نمائی تفاعل ۔ لوکارتم

دفعات	مضمون	صفحہ
۲۵۱	گریگوری کا سلسلہ۔	۵۱۹
۲۵۱(ا) تا ۲۵۱(ج)	دائرہ کی تربیع۔	۵۲۱
۲۵۲ تا ۲۵۴	دائرہ کی تقریبی تربیع۔	۵۳۰
۲۵۵	مثلثی متماثلات۔	۵۳۳
۲۵۶ تا ۲۵۷	سلسلوں کا جمع کرنا۔	۵۳۵
	پندرھویں باب پر مثالیں۔	۵۴۰

سولھواں باب

زائدی تفاعلات

دفعات | مضمون | صفحہ

سترہواں باب

لامتناہی حاصل ضرب

اٹھارواں باب

مسلسل کسریں

علم مثلث مستوی

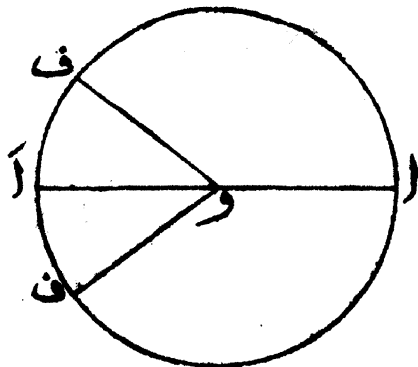
پہلا باب

زاویٔ مقداروں کی پیمائش

۱ — علم مثلث مستوی کا اولین مقصد، مستوی مثلثوں کو حل کرنیکا طریقہ دریافت کرنا ہے۔ مستوی مثلث میں تین ضلع اور تین زاویے ہوتے ہیں اور اگر ان چھ اجزاء میں سے کسی تین کی مقداریں دیجائیں اور ان دیئے ہوئے اجزا میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو بعض شرطوں کے تحت باقی اجزاء کی مقداروں کی تعیین کرنا ممکن ہے، اِس کو مثلث کا حل کرنا کہتے ہیں۔ ہم دیکھینگے کہ علم مثلث مستوی کے اس اولین مقصد کو حاصل کرنے میں زاویٔ مقدار کے بعض تفاعلوں کو داخل کرنا ضروری ہوگا، یہ تفاعل دائری تفاعل کے نام سے موسوم کئے جاتے ہیں۔ اِس طرح وسیع مفہوم میں علم مثلث مستوی میں اِن دائری تفاعلوں کے خواص کی تحقیق اور تحلیلی اور ہندسی تحقیقاتوں میں اِن خواص کے اطلاقات بھی شامل ہیں جو مثلثوں کے حل سے تعلق نہیں رکھتے۔

کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین

۲۔ اقلیدسی ہندسہ میں جن زاویوں پر بحث ہوتی ہے وہ سب کے سب دوقائمہ زاویوں سے کم ہوتے ہیں، لیکن علم مثلث مستوی کے مقاصد کے لئے زاویٔ مقدار کے تخیل کی توسیع کرنا ضروری ہے تاکہ تمام مثبت اور منفی مقداروں کے زاویے شامل ہوجائیں۔

فرض کروکہ و ا ایک ثابت خط مستقیم ہے اور ایک خط مستقیم و ف جوابتداءً میں و ا پر منطبق ہوتا ہے نقطہ و کے گرد مخالف سمت ساعت گھومتا ہے، تب جیسے وہ گھومتا ہے زاویہ ا و ف کی تکوین کرتا ہے اور جب و ف محل و اَ پر پہنچتا ہے تو وہ دو قائمہ زاویوں کے مساوی ایک زاویہ کی تکوین کرچکتا ہے اور پھر اگر وہ اسی سمت میں گھومنا جاری رکھے تو وہ پھر آکے و ا پر منطبق ہوتا ہے، اب وہ چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم چکا ہوتا ہے؛ پھر ہم فرض کرسکتے ہیں کہ و ف اسی سمت میں گھومنا جاری رکھتا ہے اور و کے گرد متعدد مکمل چکر پورے کرتا ہے؛ ہر دفعہ جب وہ ایک مکمل گردش کرلیتا ہے تو وہ چار قائمہ زاوئے مرتسم کرتا ہے، اور اگر وہ کسی محل و ف میں رک جائے تو وہ ایک ایسے زاویہ کی تکوین کرچکا ہوگا جو ف کے محل کے (2)

مطابق کسی مطلق مقدار سے تعبیر ہو سکتا ہے۔ اب ہم یہ قرارداد اختیار کرینگے کہ زاویہ مرتسمہ مثبت ہے جبکہ وف مخالف سمت ساعت گھومے اور منفی ہے جبکہ وف اِسکی مخالف سمت میں یعنی سمت ساعت کے موافق گھومے۔ یہ قرارداد بالکل اختیاری ہے، اگر ہم چاہتے تو موافق سمت ساعت کو مثبت زاویے کے لئے لے سکتے تھے۔

اب ہماری قرارداد کی بموجب جب، وف، مخالف سمت ساعت ایک مکمل گردش کرلیتا ہے تو وہ چار مثبت قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے، اور جب وہ موافق سمت ساعت ایک مکمل گردش کرلیتا ہے تو وہ چار منفی قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے۔

کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین مثال ذیل سے واضح ہو سکتی ہے:۔ اس زاویہ پر غور کرو جو گھڑی کی بڑی سوئی سے تکوین پاتا ہے۔ ہر گھنٹہ میں یہ سوئی چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتی ہے اور جتنی مرتبہ گھوم چکتی ہے اس کا کوئی نشان نہیں چھوڑتی؛ لیکن یہ کام چھوٹی سوئی سے انجام پاتا ہے جو ایک گھنٹہ میں چار قائمہ زاویوں کا صرف بارہواں حصہ گھومتی ہے اور اس طرح بارہ گھنٹے سے کم کسی وقت میں وہ زاویہ ناپ سکتے ہیں جس میں سے بڑی سوئی گھوم چکی ہے۔ اب اس غرض کے لئے کہ بڑی سوئی سے تکوین یافتہ زاوئے مثبت ہوں اور اس کا ابتدائی محل اوپر کی شکل کے محل کے مطابق ہو سکے ہیں یہ فرض کرنا پڑے گا کہ سوئیاں اس سمت کے مخالف گھومتی ہیں جس میں کہ وہ فی الواقعی گھوم رہی ہیں اور بارہ بجے کی بجائے تین بجے ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں۔

(3) ۳۔ فرض کرو کہ گھومنے والے خط کا آخری محل (بموجب شکل) وف ہے۔ وہ زاویہ جو اِس نے محل وا سے محل وف تک گھومنے میں مرتسم کیا ہے بے شمار مثبت اور منفی زاویوں میں سے ایک ہو سکتا ہے بلحاظ اُن مکمل گردشوں کی تعداد اور سمت کے جو گھومنے والے خط نے کئے ہیں۔ ایسے کسی دو زاویوں میں چار قائمہ زاویوں کے مثبت یا منفی ضعف کا فرق ہوگا۔ ہم اُن تمام زاویوں کو جو خطوط وا، وف سے محدود ہوتے ہیں ہم اختتامی زاوئے کہیں گے اور انکو (وا، وف)

سے تعبیر کریں گے، زاویوں (و ا، و ف) میں سے مقداراً چھوٹے سے چھوٹا زاویہ اقلیدسی زاویہ اوف ہے، اور باقی سب زاویئے زاویے اوف کی جبری قیمت میں چار قائمہ زاویوں کے مثبت یا منفی ضعف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

زاویوں کی عددی پیمائش

۴۔ یہ بتا دینے کے بعد کہ کسی مثبت یا منفی مقدار کے زاویہ سے کیا مراد ہے دوسرا کام زاویوں کی پیمائش سے متعلق ہے اور انکی عددی پیمائش کے لئے ایک نظام کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے لئے ہمیں ایک اکائی زاویہ کا فیصلہ کر لینا چاہیئے جو مستقل مقدار کا اختیاری طور پر منتخب کردہ کوئی زاویہ ہو سکتا ہے، تب باقی سب زاویوں کی پیمائش اُن نسبتوں سے ہو سکتی ہے جو ان کو اس اکائی زاویہ کے ساتھ ہوں۔ ظاہر ہے کہ زاویہ قائمہ فطری اکائی ہے جو لیجا سکتی ہے لیکن چونکہ معمولی مقدار کے زاویئے اس صورت میں ایک سے چھوٹی کسروں سے تعبیر ہونگے اس لئے اس سے چھوٹے زاویہ کو اکائی مقرر کرنا زیادہ سہولت بخش ہے عام طور پر جو اکائی مستعمل ہے وہ درجہ ہے جو زاویہ قائمہ کا نو دواں حصہ ہے۔ پھر درجہ کے کسرات سے بچنے کے لئے درجہ کو ساٹھ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن کو دقیقہ کہتے ہیں اور نیز دقیقہ کو ساٹھ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جنکو ثانیہ کہتے ہیں۔ ایک ثانیہ سے کمتر زاویوں کو ثانیہ کے اعشاریہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ ثالثہ جو ثانیہ کا ساٹھواں حصہ ہو سکتا ہے استعمال نہیں کیا جاتا۔ د درجوں کے زاویہ کو دؐ سے تعبیر کیا جاتا ہے، م دقیقوں کے زاویہ کو مَ سے اور ن ثانیوں کے زاویہ کو نً سے۔ اس طرح زاویہ دؐ مَ نً سے مراد وہ زاویہ ہے جس میں د درجے + م دقیقے + ن ثانیئے شامل ہیں اور وہ زاویہ قائمہ کے

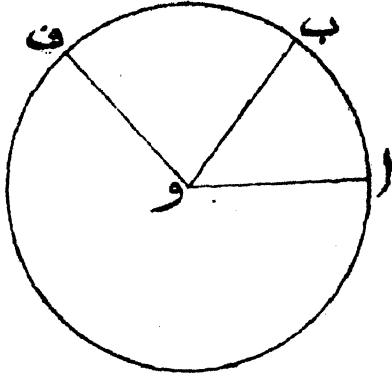
$$\frac{د}{۹۰} + \frac{م}{۶۰ \times ۹۰} + \frac{ن}{۶۰ \times ۶۰ \times ۹۰}$$ کے مساوی ہے۔

زاویوں کی عددی پیمائش کا یہ نظام ستینی نظام کہلاتا ہے۔ مثلاً
زاویہ ۲۳° ۱۴′ ۳۴٫۵۶″، زاویہ قائمہ کا $\frac{۲۳}{۹۰}+\frac{۱۴}{۶۰\times۹۰}+\frac{۳۴٫۵۶}{۶۰\times۶۰\times۹۰}$
ہے۔

(۴) یہ تجویز پیش تھی کہ زاویوں کی پیمائش کا اعشاری نظام استعمال کیا جائے۔ اس نظام میں زاویہ قائمہ سو مرتبوں (Grades) میں تقسیم کیا جاتا ہے، مرتبہ سو دقیقوں میں اور دقیقہ سو ثانیوں میں، تب گ مرتبوں م دقیقوں اور ن ثانیوں کے زاویہ کو گᵍ مᵐ نˢ لکھا جاتا ہے۔ مثلاً زاویہ ۱۳ᵍ ۹۷ᵐ ۴٫۲ˢ زاویہ قائمہ کے ۱۳٫۹۷۰۴۲ کے مساوی ہے۔ لیکن یہ نظام کبھی بھی استعمال نہیں ہوا، خصوصاً اس وجہ سے کہ وقت کو طول بلد کے مرتبوں میں تبدیل کرنا ذرا تکلیف دہ ہے تاوقتیکہ دن کی تقسیم موجودہ صورت کے علاوہ کوئی اور نہ کیجائے۔ اگر مرتبوں کا نظام اختیار کیا جاتا تو دن ۲۴ گھنٹوں کی بجائے چالیس گھنٹوں میں تقسیم کیا جا سکتا تھا اور گھنٹہ ایک سو دقیقوں میں اور یہ امر وقت پیماؤں میں تغیر کرنے کو مستلزم ہوتا۔ وقت کے اس نظام کا ایک گھنٹہ طول بلد کے $\frac{۵۰}{۳}$ مرتبوں کے فرق کے متناظر ہے، جو کسری ہونے کی وجہ سے تکلیف دہ ہے۔

یہ ایک دلچسپ واقعہ ہے کہ بابلیوں (Babylonians) نے بھی چار قائمہ زاویوں کی ۳۶۰ حصوں میں تقسیم کو استعمال کیا تھا۔ انھوں نے چار قائمہ کو اس تعداد میں کیوں تقسیم کیا اس بارے میں بہت قیاس آرائیاں کی گئی ہیں۔

زاویوں کی دائری پیمائش

۵۔ تمام خالص عملی مقاصد میں زاویوں کی عددی پیمائش کا ستینی نظام بالعموم استعمال کیا جاتا ہے لیکن نظری مقاصد کے لئے زاویہ کی ایک مختلف اکائی لینا زیادہ سہولت بخش ہے کسی دائرہ میں جس کا مرکز و ہے فرض کرو کہ ا ب ایک قوس ہے جس کا طول

دائرے کے نیم قطر کے مساوی ہے تو ہم ثابت کریں گے کہ زاویہ **ا و ب** کی مقدار مستقل ہے اور کسی خاص دائرہ پر منحصر نہیں ہے۔ اس زاویہ کو نیم قطری یا دائری ناپ کی اکائی کہا جائے گا اور کسی دوسرے زاویہ کی مقدار کو اُس نسبت سے بیان کیا جائے گا جو اس کو اکائی زاویہ کے ساتھ ہو اور یہ نسبت زاویہ کا **دائری ناپ** کہلائیگی۔

(۱۱) **۶- اب** یہ ثابت کرنے کے لئے کہ نیم قطری ایک مستقل زاویہ ہے ہم حسب ذیل دو مسئلے مان لیں گے:-

(ا) ایک ہی دائرہ میں مختلف قوسوں کے طول ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو ان کے محاذی مرکز پر بننے والے زاویوں میں ہوتی ہے۔

(ب) دائرے کے پورے محیط کا طول قطر کے ساتھ ایک ایسی نسبت رکھتا ہے جو سب دائروں کے لئے ایک ہی ہے۔

مسئلہ (ا) اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳۳ میں سے ہے اور مسئلہ (ب) کا ثبوت اس باب کے ختم پر دیا گیا ہے۔ (ا) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{قوس اب}}{\text{دائرہ کا محیط}} = \frac{\text{زاویہ اوب}}{\text{۴ قائمہ زاوئے}}$$

چونکہ قوس **ا ب** دائرہ کے نیم قطر کے مساوی ہے ان نسبتوں میں سے پہلی نسبت مسئلہ (ب) کی رو سے تمام دائروں کے لئے ایک

ہی ہے، اس لئے زاویہ ا و ب مستقل مقدار کا ہے اور کسی خاص دائرہ
پر منحصر نہیں ہے۔

۷۔ آگے چل کر یہ بتایا جائے گا کہ دائرہ کے محیط اور اس کے قطر
میں جو نسبت ہوتی ہے وہ ایک غیر منطق عدد ہے، یعنی ہم صحیح اعداد م
اور ن معلوم نہیں کر سکتے ایسے کہ م/ن ٹھیک ٹھیک اس نسبت کے
مساوی ہو۔ ہم کسی آئندہ باب میں وہ مختلف طریقے بیان کریں گے
جو اس نسبت کی قیمت تقریبی طور پر محسوب کرنے میں استعمال ہوتے
ہیں۔ یہ نسبت بالعموم π سے تعبیر کیجاتی ہے۔ فی الحال یہ کہنا کافی ہے
کہ π صرف ایک غیر مختتم غیر متوالی اعشاریہ کی شکل میں حاصل کیا جا سکتا
ہے اور اس کی قیمت اعشاریہ کے بیس مقامات تک یہ ہے

۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶

اکثر تقریبی قیمت ۳٫۱۴۱۵۹ کا استعمال کرنا کافی ہوگا۔ نسبتیں

۲۲/۷ = ۳٫۱۴۲۸۵۷، ۳۵۵/۱۱۳ = ۳٫۱۴۱۵۹۲۹ بھی π کی تقریبی قیمتوں
کے طور پر استعمال کیجاسکتی ہیں کیونکہ وہ علی الترتیب اعشاریہ کے دو اور چھ
مقامات تک π کی صحیح قیمت کے مطابق ہیں۔

۸۔ ہم بتا چکے ہیں کہ نیم قطری کو چار قائمہ زاویوں کے ساتھ وہی
نسبت ہے جو ایک دائرہ کے نصف قطر کو اس کے محیط کے ساتھ ہے،

پس نیم قطری ۲/π × ایک زاویہ قائمہ کے مساوی ہے؛ اب چونکہ زاویہ
قائمہ °۹۰ کا ہوتا ہے اس لئے π کی تقریبی قیمت ۳٫۱۴۱۵۹۲۷
استعمال کرنے سے، ہمیں نیم قطری کی تقریبی قیمت درجوں میں
°۵۷٫۲۹۵۷۷۹۶ حاصل ہوتی ہے یعنی درجہ کے اعشاری حصہ کو
دقیقوں اور ثانیوں میں بیان کرنے سے °۵۷ ′۱۷ ″۴۴٫۸ ۔
گلیشر (Glaisher) نے نیم قطری کی قیمت ثانیوں میں اعشاریہ

(6)

کے ۱۴۱ مقامات تک صحیح محسوب کی ہے[1] - $\frac{1}{\pi}$ کی قیمت اعشاریہ کے ۱۴۱ مقامات تک حاصل کیجا چکی ہے[2]

۹ — زاویہ قائمہ کا دائری ناپ $\frac{1}{2}\pi$ ہے، اور دو قائمہ زاویوں کا π، اور اب ہم درجوں میں دیئے ہوئے کسی زاویہ کا دائری ناپ معلوم کر سکتے ہیں، اور اس کے برعکس نیم قطری میں دیئے ہوئے کسی زاویہ کو درجوں میں بیان کر سکتے ہیں؛ اگر ایک زاویہ میں د درجے ہوں اور اس کا دائری ناپ طہ ہو تو $\frac{\text{طہ}}{\pi} = \frac{\text{د}}{180}$ کیونکہ ان میں سے ہر ایک نسبت اس نسبت کو ظاہر کرتی ہے جو دیئے ہوئے زاویہ کو دو قائموں کے ساتھ ہے؛ پس د درجوں کے زاویہ کا دائری ناپ $\frac{\pi}{180}$ د ہے اور دائری ناپ طہ کے زاویہ میں درجوں کی تعداد $\frac{180}{\pi}$ طہ ہے، اگر زاویہ درجوں دقیقوں اور ثانیوں میں دیا جائے جیسے د° م′ ن″ تو اس کا دائری ناپ یہ ہے

$$\frac{\pi}{180}\left(\text{د} + \frac{\text{م}}{60} + \frac{\text{ن}}{3600}\right)$$

۱° کا دائری ناپ ....۰٫۰۱۷۴۵۳۲۹ ہے، ۱′ کا ....۰٫۰۰۰۲۹۰۸۸۸۲ اور ۱″ کا ....۰٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۷

۱۰ — قوس اف کے محاذی دائرہ کے مرکز پر کے زاویہ اوف کا دائری ناپ

$$= \frac{\text{قوس اف}}{\text{دائرہ کا نصف قطر}}$$

---

[1] دیکھو کوارٹرلی جرنل جلد چہارم مضمون On the calculation of the value of the theoritical unit angle to a great number of places.

[2] دیکھو Grunert's Archiv جلد اول سنہ ۱۸۴۱ء۔

کے مساوی ہے، کیونکہ یہ نسبت $\frac{\text{قوس ا ف}}{\text{قوس ا ب}}$ یعنی $\frac{\text{زاویہ ا و ف}}{\text{زاویہ ا و ب}}$ کے مساوی ہے۔

قوس اف پورے محیط سے بڑی ہو سکتی ہے اور اس کو مثبت یا منفی طور پر ناپا جا سکتا ہے اُس سمت کی بموجب جس میں وہ ابتدائی نقطہ ا سے ناپی گئی ہے؛ اس طرح کسی مقدار کے زاویہ کا دائری ناپ وہ نسبت ہے جو اس قوس کے طول کو جس کے محاذی زاویہ بنتا ہے دائرے کے نیم قطر کے ساتھ ہے۔ نیم قطر ر والے دائرہ کی قوس کا طول رط ہوتا ہے جبکہ ط اس زاویہ کا دائری ناپ ہو جو اس قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔ اس طرح دائرہ کا پورا محیط ۲ π ر ہے۔

(۷)

دائری قوس کا طول

۱۱۔ اوپر یہ مان لیا گیا ہے کہ دائری قوس کا طول وجود رکھتا ہے اور قوس کی عددی پیمائش ہو سکتی ہے، اس امر کی اب تحقیق کی جائے گی۔ طول کا اصلی تخیل ایک خطی وقفہ کا تخیل ہے یعنی خط مستقیم کا ایک محدود حصہ، اور منحنی کی قوس کے طول (مثلاً دائری قوس کا طول) کے تخیل کو اس سے ماخوذ سمجھنا چاہیئے۔ ہم تسلیم کریں گے کہ خط مستقیم کے ایک دے ہوئے محدود حصہ کا طول وجود رکھتا ہے اور اسے ایک محدود منطق یا غیر منطق عدد سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جو طول کی کسی مقررہ اکائی پر منحصر ہوتا ہے۔ اب دائری قوس اب کے طول کو معلوم کرنے کے لیے ہم حسب ذیل

عمل کرتے ہیں :- فرض کرو کہ قوس ا ب متعدد نقطوں $ا_1$، $ا_2$ ...، $ا_{ن-1}$ پر تقسیم کی گئی ہے ؛ اندرونی نابند کثیر ضلعی $ا ا_1 ا_2$ ... $ا_{ن-1}$ ب پر غور کرو۔ اِس کثیر ضلعی کے ضلعوں کے طولوں کے مجموعہ $ا ا_1$ + $ا_1 ا_2$ + ... + $ا_ن$ ب کی ایک محدود قیمت $ف_ن$ ہے۔ پھر قوس ا ب کے اندر ایک نیا کثیر ضلعی $ا اَ_1 اَ_2$ ... $اَ_{ن-1}$ ب بناؤ جس میں نَ > ن اور اس کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع کثیر ضلعی $ا ا_1 ا_2$ ... ب کے بڑے سے بڑے ضلع سے چھوٹا ہو ؛ فرض کرو کہ اس نئے نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ $ف_{نَ}$ ہے۔ اسی طرح قوس ا ب کی متواتر تقسیم در تقسیم جاری رکھنے سے ہمیں اندرونی نابند کثیر ضلعیوں کا ایک تواتر ملتا ہے جنکے ضلعوں کے طولوں کے مجموعے اعداد $ف_1$، $ف_2$، $ف_3$،... $ف_ن$ ... کے ایک تواتر سے تعبیر ہو سکتے ہیں اور یہ تواتر غیر محدود طور پر جاری رکھا جا سکتا ہے۔ اگر عدد $ف_ن$ کی ایک معین انتہا ل ہو جو قوس ا ب کی متواتر تقسیم در تقسیم کے طریقہ پر منحصر نہ ہو اور صرف اِس شرط کے تحت ہو کہ $ف_ن$ کے جواب میں نابند کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع لاانتہا چھوٹا ہو جائے جبکہ ن لاانتہا بڑا ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ قوس ا ب کا طول ل ہے۔ یہ دکھانے کے لئے کہ دائری قوس طول رکھتی ہے یہ دِکھانا ضروری ہے کہ یہ انتہا ل موجود ہے، اور اب ہم اسے ثابت کریں گے۔ تعریف سے یہ واضح ہے کہ اگر ا ب ج ایک قوس ہو اور ا ب، ب ج کے طول معین ہوں تو ا ج کا طول بھی معین ہوگا، اور ا ب ج کا طول قوسوں ا ب، ب ج کے طولوں کا مجموعہ ہوگا۔ اس لئے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ کوئی قوس جو نصف دائرہ سے کم ہے معین طول رکھتی ہے۔ اول ہم کثیر الاضلاعوں کے اس مخصوص تواتر پر غور کرتے ہیں جس میں ہر کثیر ضلعی کے راس تواتر کے (8)

باقی سب کثیر ضلعوں کے راس بھی ہیں۔ اِن نا بند کثیر الاضلاعوں کے طولوں کو $ف_1$، $ف_2$، ... $ف_ن$، ... سے تعبیر کرکے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$ف_1 < ف_2 < ف_3 \ldots < ف_ن \ldots$$

کیونکہ مبادی علم ہندسہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $ل_ر ل_{ر+1}$ طول میں $ل_ر$ اور $ل_{ر+1}$ کو ملانے والے ایک نا بند کثیر ضلعی کے ضلعوں کے مجموعہ سے کم ہے نیز اعداد $ف_1$، $ف_2$، ... $ف_ن$ ... سب کے سب ایک مستقل عدد سے کم ہیں۔ کیونکہ فرض کرو کہ قوس ا ب کے سروں اَ ب پر مماس ت ا، ت ب ہیں، ب ت کے متوازی $ل_1 ع_1$، ... $ل_{ن-1} ع_{ن-1}$ کھینچو اور نیز ا ت کے متوازی $ل_1 ب_1$، $ل_2 ب_2$، ... $ل_{ن-1} ب_{ن-1}$ کھینچو۔

$$ا ل_1 < اع_1 + ل_1 ع_1 < اع_1 + ت ب_1$$

اور $ل_1 ل_2 < ع_1 ع_2 + ب_1 ب_2$ وغیرہ

پس $ا ل_1 + ل_1 ل_2 + \ldots + ل_{ن-1} ب < ا ت + ب ت$

اسلئے $ف_ن < ا ت + ب ت$

اب انتہاؤں کے نظریہ کے ایک اساسی اصول کی بموجب، چونکہ عددوں $ف_1$، $ف_2$، ... $ف_ن$ ... کا تواتر ایسا ہے کہ ہر ایک اپنے بعد والے عدد سے کم ہے اور نیز ان میں سے سب عدد ایک مستقل عدد سے کم ہیں اِسلئے تواتر کی ایک انتہا ل ہے ایسی کہ اگر ص ایک اختیاری مثبت عدد خواہ کتنا ہی چھوٹا ہو ن کی ایک خاص قیمت ن ایسی دریافت ہوسکتی ہے کہ اس سے بڑی ن کی تمام قیمتوں کے لئے $ف_ن$ کا ل سے

عمل کرتے ہیں:۔ فرض کرو کہ قوس ا ب متعدد نقطوں ا$_1$، ا$_2$ … ، ا$_{ن-1}$ پر تقسیم کی گئی ہے؛ اندرونی نابند کثیر ضلعی ا ا$_1$ ا$_2$ … ا$_{ن-1}$ ب پر غور کرو۔ اِس کثیر ضلعی کے ضلعوں کے طولوں کے مجموعہ ا ا$_1$ + ا$_1$ ا$_2$ + ……… + ا$_{ن-1}$ ب کی ایک محدود قیمت ف ہے۔ پھر قوس ا ب کے اندر ایک نیا کثیر ضلعی ا اَ$_1$ اَ$_2$ … اَ$_{نَ-1}$ ب بناؤ جس میں نَ > ن اور اس کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع کثیر ضلعی ا ا$_1$ ا$_2$ … ب کے بڑے سے بڑے ضلع سے چھوٹا ہو؛ فرض کرو کہ اس نئے نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ ف$_2$ ہے۔ اسی طرح قوس ا ب کی متواتر تقسیم در تقسیم جاری رکھنے سے ہمیں اندرونی نابند کثیر ضلعیوں کا ایک تواتر ملتا ہے جنکے ضلعوں کے طولوں کے مجموعے اعداد ف$_1$، ف$_2$، ف$_3$، … ف$_ن$ … کے ایک تواتر سے تعبیر ہو سکتے ہیں اور یہ تواتر غیر محدود طور پر جاری رکھا جا سکتا ہے۔ اگر عدد ف$_ن$ کی ایک معین انتہا ل ہو جو قوس ا ب کی متواتر تقسیم در تقسیم کے طریقہ پر منحصر نہ ہو اور صرف اِس شرط کے تحت ہو کہ ف$_ن$ کے جواب میں نابند کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جائے جبکہ ن لا انتہا بڑا ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ قوس ا ب کا طول ل ہے۔ یہ دکھانے کے لئے کہ دائری قوس طول رکھتی ہے یہ دِکھانا ضروری ہے کہ یہ انتہا ل موجود ہے، اور اب ہم اسے ثابت کریں گے۔ تعریف سے یہ واضح ہے کہ اگر ا ب ج ایک قوس ہو اور ا ب، ب ج کے طول معین ہوں تو ا ج کا طول بھی معین ہوگا، اور ا ب ج کا طول قوسوں ا ب، ب ج کے طولوں کا مجموعہ ہوگا۔ اس لئے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ کوئی قوس جو نصف دائرہ سے کم ہے معین طول رکھتی ہے۔ اول ہم کثیر الاضلاعوں کے اس مخصوص تواتر پر غور کرتے ہیں جس میں ہر کثیر ضلعی کے راس تواتر کے (8)

باقی سب کثیر ضلعوں کے راس بھی ہیں۔ اِن نا بند کثیر الاضلاعوں کے طولوں کو $ف_1$، $ف_2$، ... $ف_ن$، ... سے تعبیر کرکے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$ف_1 < ف_2 < ف_3 \ldots < ف_ن \ldots$$

کیونکہ مبادیٔ علم ہندسہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $ا_ر ا_{ر+1}$ طول میں $ا_ر$ اور $ا_{ر+1}$ کو ملانے والے ایک نا بند کثیر ضلعی کے ضلعوں کے مجموعہ سے کم ہے نیز اعداد $ف_1$، $ف_2$، ... $ف_ن$ ... سب کے سب ایک مستقل عدد سے کم ہیں۔ کیونکہ فرض کرو کہ قوس اب کے سروں ا، ب پر مماس ت ا، ت ب ہیں، ب ت کے متوازی $ا ع_1$، ... $ا_{ن-1} ع_{ن-1}$ کھینچو اور نیز ا ت کے متوازی $ا_1 ب_1$، $ا_2 ب_2$، ... $ا_{ن-1} ب_{ن-1}$ کھینچو۔

$$ا ا_1 < ا ع_1 + ا_1 ع_1 < ا ع_1 + ت ب_1$$

اور $ا_1 ا_2 < ع_1 ع_2 + ب_1 ب_2$، وغیرہ

پس $ا ا_1 + ا_1 ا_2 + \ldots + ا_{ن-1} ب < ا ت + ب ت$

اسلئے $ف_ن < ا ت + ب ت$

اب انتہاؤں کے نظریہ کے ایک اساسی اصول کی بموجب، چونکہ عددوں $ف_1$، $ف_2$، ... $ف_ن$ ... کا تواتر ایسا ہے کہ ہر ایک اپنے بعد والے عدد سے کم ہے اور نیز ان میں سے سب عدد ایک مستقل عدد سے کم ہیں اسلئے تواتر کی ایک انتہا ل ہے ایسی کہ اگر ص ایک اختیاری مثبت عدد خواہ کتنا ہی چھوٹا ہو ن کی ایک خاص قیمت $ن_1$ ایسی دریافت ہوسکتی ہے کہ اس سے بڑی ن کی تمام قیمتوں کے لئے $ف_ن$ کا ل سے

فرق صہ سے چھوٹا ہو۔

اگر ا، ب کو ملانے والے کثیر ضلعی جن کے طول ف$_1$، ف$_2$، ... ف$_n$، ... ہیں خواہ کیسے ہی ہوں اور اگر وہ اس شرط کے ماتحت نہ ہوں کہ ہر ایک کے راس باقی دوسروں کے راس ہیں لیکن صرف اس شرط کے ماتحت ہوں کہ ن وین کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع گھٹتا ہے جیسے ن بڑھتا ہے اور اس کی انتہا صفر ہے تو ہم اس صورت میں تواتر ف$_1$، ف$_2$، ... ف$_n$، ... کا مقابلہ متذکرہ خاص تواتر کے ساتھ کرتے ہیں جس کے متعلق یہ دکھایا جا چکا ہے کہ کثیر الاضلاعوں کے طولوں کی ایک معین انتہا ل موجود ہے۔ فرض کرو کہ اس خاص تواتر ف$_1$، ف$_2$ ..... سے متعلق ایک خاص کثیر ضلعی ا ا$_1$ ا$_2$ ... ا$_{ر-1}$ ب ایسا ہے جس کا طول ل - صہ سے بڑا ہے۔

اب ایک صحیح عدد نَ معلوم کیا جا سکتا ہے ایسا کہ اگر ن ≥ نَ تو کثیر ضلعی ا عہ بہ جہ .... کہ .... ب میں جس کا طول ف$_n$ ہے بڑے سے بڑا ضلع کثیر ضلعی ا ا$_1$ ا$_2$ ... ا$_{ر-1}$ ب کے چھوٹے سے چھوٹے ضلع سے کم ہو اور نیز $\frac{صہ}{2ر}$ سے کم ہو ۔ تب نقطوں عہ، بہ، جہ، ... میں سے بعض نقطے قوسوں ا ا$_1$، ا$_1$ ا$_2$ ... میں سے ہر ایک میں واقع ہیں۔ فرض کرو کہ ا ا$_1$ میں عہ، بہ، جہ واقع ہوتے ہیں، تب

$$ا عہ + عہ بہ + بہ جہ + جہ ا_1 > ا ا_1$$

یہ اور اس قسم کی نامساوائیں ا$_1$ ضہ + ضہ صہ + ... + ک ل > ا$_1$ ا$_2$ وغیرہ استعمال کرنے سے اور چونکہ جہ ا$_1$، ا$_1$ ضہ، ....

سب کے سب $\frac{\text{صہ}}{\text{۲ر}}$ سے کم ہیں ہیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}_{\text{ن}} + \text{صہ} > \text{ا ا}_{1} + \text{ا}_{1}\text{ا}_{2} + \dots + \text{ا}_{\text{ر}-1}\text{ب} > \text{ل} - \text{صہ}،$$

اسلئے $\text{ف}_{\text{ن}} > \text{ل} - ۲\,\text{صہ}$، بشرطیکہ $\text{ن} \geq \text{نَ}$

پھر کثیر ضلعی ا ا_{1} ا_{2} ... ب پر جو اس تواتر کا ہے جن کے طول ف_{1}، ف_{2} ... ہیں غور کرو جبکہ یہ کثیر ضلعی اتنے آگے کا ہے کہ اس کا بڑے سے بڑا ضلع ا ع یہ جہ ... ک ب کے چھوٹے سے چھوٹے ضلع سے کم ہے اور نیز $\frac{\text{صہ}}{\text{۳س}}$ سے کم ہے جہاں اس آخری کثیر ضلعی میں ضلعوں کی تعداد س ہے۔ پہلے کی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ف}_{\text{ن}} < \text{صہ} + \text{ا ا}_{1} + \text{ا}_{1}\text{ا}_{2} + \dots < \text{ل} + \text{صہ}$$

لیکن یہ بتایا جا چکا ہے کہ اگر $\text{ن} \geq \text{نَ}$ تو $\text{ف}_{\text{ن}}$، ل + صہ اور ل - ۲ صہ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور اس لئے $\text{ف}_{\text{ن}}$ اور ل میں ۲ صہ سے کم فرق ہے۔ اب چونکہ صہ کا انتخاب اختیاری ہے اور اس کی ہر قیمت کے جواب میں ایک صحیح عدد نَ حاصل ہوتا ہے اسلئے یہ ثابت ہوا کہ ن کو لا انتہا بڑھانے پر $\text{ف}_{\text{ن}}$ کی وہی انتہا ل ملتی ہے جو کثیر الاضلاعوں کے اس خاص تواتر کی ہے جس پر ہم نے پہلے غور کیا ہے۔

پس یہ ثابت ہوا کہ دائری قوس کا طول ایک معین عدد سے ناپا جا سکتا ہے جبکہ طول کی کوئی اکائی مان لی جائے۔

پورے دائرہ کا محیط م بھی ان اندرونی بند کثیر الاضلاعوں کے گھیروں کے تواتر کی انتہا معلوم کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے جبکہ بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جائے جیسے جیسے تواتر آگے بڑھے۔

اب اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳۳ کے مطابق یہ ثابت کیا جائیگا

کہ ایک ہی دائرے کی مختلف قوسوں کے طولوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو مرکز پر ان قوسوں کے محاذی بننے والے زاویوں میں ہے۔

یہ ثابت کرنے کے لئے کہ دائروں کے محیط ایسے بدلتے ہیں جیسے ان کے قطر فرض کرو کہ دو دائرے ہیں جن کے قطر ق اور قَ ہیں اگر دو متشابہ کثیر ضلعی ان دائروں کے اندر بنائے جائیں تو متشابہ مستقیم الاضلاع اشکال کے خواص کی بنا پر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان کثیر الاضلاعوں کے گھیرے ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو ق اور قَ میں ہے۔ اب دائروں کے محیط م اور مَ کو ان انتہاؤں کے برابر سمجھا جا سکتا ہے جو کثیر الاضلاعوں کے دو تواتروں کے گھیروں ف ن، فَ ن کی ہیں جبکہ ف ن کے متناظر کثیر ضلعی، ن کی ہر قیمت کے لئے، اس کثیر ضلعی کے متشابہ ہو جو فَ ن کے جواب میں ہے۔ (۱۰)

اب چونکہ ف ن : فَ ن = ق : قَ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فَ ن کی انتہا کو ف ن کی انتہا کے ساتھ جو نسبت ہے وہ نسبت ق : قَ کے مساوی ہے! اور اس لئے

م : مَ = ق : قَ

دائرہ کے قطاع کا رقبہ

۱۳۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے۔ اس کی کسی قوس اب سے جو قطاع محدود ہوتا ہے اس کے رقبہ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ مثلثوں و ا ا۱، و ا۱ ا۲ ... و ان-۱ ب کے رقبوں کے مجموعے کی انتہا ہے جبکہ کثیر ضلعی ا ا۱ ا۲ ... ان-۱ ب کے ضلعوں کی تعداد لا انتہا بڑی ہو اور اس کا بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جیسا کہ دفعہ (۱۱) میں بتایا جا چکا ہے۔ یہ ثابت کرنا لازم ہوگا کہ یہ انتہا موجود ہے اور ایک

معین عدد کے برابر ہے۔

فرض کرو کہ و سے ضلعوں ا ا_1، $\text{ا}_1\text{ا}_2$ ... $\text{ا}_{\text{ن}-1}\text{ب}$ پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان کے طول ق_1، ق_2 ... $\text{ق}_\text{ن}$ ہیں، تب مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ ہے

$$\tfrac{1}{2}\left(\text{ق}_1 \times \text{اا}_1 + \text{ق}_2 \times \text{ا}_1\text{ا}_2 + \dots + \text{ق}_\text{ن} \times \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{ب}\right)$$

اور یہ مجموعہ، $\tfrac{1}{2}\,\text{قَ} \times \text{ف}_\text{ن}$ اور $\tfrac{1}{2}\,\text{قً} \times \text{ف}_\text{ن}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے جہاں قَ اور قً عددوں ق_1، ق_2 ... $\text{ق}_\text{ن}$ میں سے علی الترتیب بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے عدد ہیں اور $\text{ف}_\text{ن}$ کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ ہے۔ $\text{ف}_\text{ن}$ کی انتہا موجود ہے کیونکہ یہ قوس اب کا طول ہے۔ نیز عددوں قَ، قً کی ایک ہی انتہا ہے اور وہ دائرہ کا نصف قطر ہے، کیونکہ ان میں اور نصف قطر میں کثیر ضلعی کے بڑے سے بڑے ضلع کے نصف سے کم کا فرق ہے۔ پس قطاع کا رقبہ ایک محدود عدد ہے جو دائرہ کے نصف قطر ر اور قوس اب کے طول رط کے نصف حاصل ضرب کے مساوی ہے، جہاں ط، زاویہ اوب کا دائری ناپ ہے۔ اس طرح رقبہ اوب = $\tfrac{1}{2}\,\text{ر}^2\text{ط}$۔ پورا دائرہ ایک قطاع خیال کیا جاسکتا ہے جس کو محدود کرنے والی قوس پورا محیط ہے؛ پس پورے دائرہ کا رقبہ $\pi\,\text{ر}^2$ ہے۔

باب اول پر مثالیں

۱۔ پیمائش کی اکائی کیا ہونی چاہیے کہ اس کے لحاظ سے کسی زاویہ کا عددی ناپ اس فرق کے مساوی ہو سکے جو درجوں اور دائری ناپ میں بیان کرنے پر اس کے عددی ناپوں کے درمیان ہوتا ہے۔

اج = جب (عہ+بہ)، اب = جب عہ، اور ج د = جم بہ؛ اس طرح مسئلہ بالاضابطہ

جب (عہ + بہ) = جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ

کے مماثل ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = عہ،
اج د = بہ، تو اب = جب (عہ - بہ) اور مسئلہ بالاضابطہ

جب (عہ - بہ) + جب بہ جم عہ = جم بہ جب عہ

کے مماثل ہے۔

(۳) فرض کرو کہ ب د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ا د ب = عہ،
زاویہ ج ب د = بہ، تو ا د ج = $\frac{1}{2}\pi$ + عہ - بہ، اس طرح اج =
جم (عہ - بہ) اور مسئلہ بالاضابطہ

جم (عہ - بہ) = جم عہ جم بہ + جب عہ جب بہ

کے مماثل ہے۔

(۴) فرض کرو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = عہ،
ا د ج = بہ، تب ب ج ا = عہ + بہ - $\frac{1}{2}\pi$، اب = -جم (عہ + بہ) اور
مسئلہ بالاضابطہ

- جم (عہ + بہ) + جم عہ جم بہ = جب عہ جب بہ

کے مماثل ہے۔

مثال:- مسائل ذیل کے ثبوت میں ٹولمی کا مسئلہ استعمال کرو:-

جب عہ جب (بہ - جہ) + جب بہ جب (جہ - عہ) + جب جہ جب (عہ - بہ) = ۰

جب (عہ + بہ) جب (بہ + جہ) = جب عہ جب جہ + جب بہ جب (عہ + بہ + جہ)

دو جیوب یا دو جیوب التمام کے مجموعہ یا فرق کے لئے ضابطے

۴۴- جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم فوراً حاصل کرتے ہیں

جب (ا + ب) + جب (ا - ب) = ۲ جب ا جم ب،

جب (ا + ب) - جب (ا - ب) = ۲ جم ا جب ب،

جم (ا + ب) + جم (ا - ب) = ۲ جم ا جم ب

جم (ا - ب) - جم (ا + ب) = ۲ جب ا جب ب

فرض کرو ا + ب = ج، ا - ب = د، تو چونکہ ا = $\frac{1}{2}$ (ج + د) اور ب = $\frac{1}{2}$ (ج - د)، اس لئے حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔

جب ج + جب د = ۲ جب $\frac{1}{2}$ (ج + د) جم $\frac{1}{2}$ (ج - د) ... (۵)

جب ج - جب د = ۲ جم $\frac{1}{2}$ (ج + د) جب $\frac{1}{2}$ (ج - د) ... (۶)

جم ج + جم د = ۲ جم $\frac{1}{2}$ (ج + د) جم $\frac{1}{2}$ (ج - د) ... (۷)

جم د - جم ج = ۲ جب $\frac{1}{2}$ (ج + د) جب $\frac{1}{2}$ (ج - د) ... (۸)

(42) یہ اہم ضابطے (۵)، (۶)، (۷)، (۸) دو زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام کے مجموعہ یا فرق کو دو دائری تفاعلوں کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کرتے ہیں، ان کو الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے :-

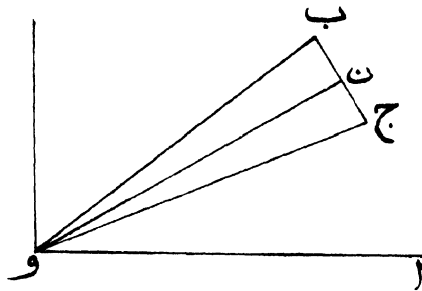
دو زاویوں کی جیوب کا مجموعہ، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیوب کا فرق، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیوب التمام کا مجموعہ، ان زاویوں کے

نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیوب التمام کا فرق، اِن زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور اُلٹے نصف فرق کی جیب کے دوچند حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

۴۵۔ یہ ضابطے ہندسی طور پر ظِلوں کے طریقہ سے ثابت کئے جا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ب و ا = ج، ج و ا = د، اور فرض کرو کہ و ب = و ج، ب ج پر عمود و ن کھینچو تو ن، ب ج کا نقطہ وسطی ہے، نیز

ن و ا = ½ (ج + د)، ن و ب = ن و ج = ½ (ج - د)

اب و ا پر و ب اور و ج کے ظِلوں کا مجموعہ، و ا پر و ن، ن ب، و ن اور ن ج کے ظِلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور چونکہ ن ب اور ن ج کے ظِل مساوی اور مختلف العلامت ہیں اس لئے یہ مجموعہ و ن کے ظِل کے دوچند کے مساوی ہے۔ اس لئے

و ب جم ج + و ج جم د = ۲ و ن جم ½ (ج + د)

اور چونکہ

و ن = و ب جم ½ (ج - د)

اس لئے ضابطہ

(43) جم ج + جم د = ۲ جم ½ (ج + د) جم ½ (ج - د) ... ... (۴)

حاصل ہوتا ہے۔

اگر و ا پر ظل لینے کی بجائے اسکے علی القوائم خط پر ظل لئے جائیں تو

و ب جب ج + و ج جب د = ۲ و ن جب ½ (ج + د)

اس لئے

جب ج + جب د = ۲ جب ½ (ج + د) جم ½ (ج - د) ... (۵)

نیز و ا پر و ج کا ظل = و ب کا ظل + ب ن کے ظل کا دوچند

یعنے

و ج جم د = و ب جم ج + ۲ ب ن جب ½ (ج + د)

اس لئے جم د - جم ج = ۲ جب ½ (ج + د) جب ½ (ج - د) (۸)

اور اگر ہم و ا پر کے عمود پر ظل لیں تو

و ج جب د = و ب جب ج - ۲ ب ن جم ½ (ج + د) ... (۴)

یا جب ج - جب د = ۲ جب ½ (ج - د) جم ½ (ج + د) .... (۶)

لوکارثموں کی ایجاد سے قبل تقریباً ایک صدی تک عددوں کو، جیوب کی جدولوں کے ذریعہ ضرب دینے کا ایک عجیب طریقہ رائج تھا۔ یہ طریقہ ضابطہ

جب ا جب ب = ½ { جم (ا - ب) - جم (ا + ب) }

کے استعمال پر منحصر تھا۔ زاویئے ا اور ب جن کی جیوب، علامت اعشاریہ کو نکالدینے کے بعد، اُن اعداد کے مساوی ہوتے ہیں جن کو ضرب دینا مقصود ہوتا ہے جیوب کی ایک جدول سے معلوم کئے جاسکتے ہیں اور پھر اسی جدول سے جم (ا + ب)، جم (ا - ب) معلوم ہوسکتی ہیں، ان آخری جیوب التمام کے فرق کا نصف مطلوبہ

حاصل ضرب ہے۔ اس طریقہ کو προσθαφαιρεσις کہتے تھے۔ گلیشر کے ایک مضمون "On multiplication by a table of single entry" میں جو فلاسیفکل میگزین بابتہ ۱۸۷۸ء میں شائع ہوا تھا اس طریقہ کا ذکر ملے گا۔

امثلہ

۱۔ ثابت کرو کہ

جب ا جب (ب ـ ج) جب (ب + ج ـ ا) + جب ب جب (ج ـ ا) ×
جب (ج + ا ـ ب) + جب ج جب (ا ـ ب) جب (ا + ب ـ ج)
= ۲ جب (ب ـ ج) جب (ج ـ ا) جب (ا ـ ب)

دائیں جانب کی دوسری اور تیسری ارقام لکھی جا سکتی ہیں

½ جب ب {جم (ب ـ ۲ ا) ـ جم (۲ ج ـ ب)} + ½ جب ج {جم (ج ـ ۲ ب) ـ
جم (۲ ا ـ ج)}

اور یہ = ¼ {جب ۲ (ب ـ ا) + جب ۲ ا ـ جب ۲ ج ـ جب ۲ (ب ـ ج)}
+ ¼ {جب ۲ (ج ـ ب) + جب ۲ ب ـ جب ۲ ا ـ جب ۲ (ج ـ ا)}
= ¼ (جب ۲ ب ـ جب ۲ ج) ـ ½ جب ۲ (ب ـ ج) + ¼ {جب ۲ (ب ـ ا) ـ جب ۲ (ج ـ ا)}
= جب (ب ـ ج) {½ جم (ب + ج) ـ جم (ب ـ ج) + ½ جم (ب + ج ـ ۲ ا)}
جو = جب (ب ـ ج) {جم ا جم (ب + ج ـ ا) ـ جم (ب ـ ج)}

اس میں رقم جب ا جب (ب ـ ج) جب (ب + ج ـ ا) جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جب (ب ـ ج) {جم (ب + ج ـ ۲ ا) ـ جم (ب ـ ج)}

یعنی ۲ جب (ب ـ ج) جب (ج ـ ا) جب (ا ـ ب)

(۲) ـ ثابت کرو کہ

Σ جم ا جب (ب ـ ج) جب (ب + ج ـ ا)

=۲جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

اسکو مثال (۱) سے ا، ب، ج کو ۹۰° - ا، ۹۰° - ب، ۹۰° - ج میں تبدیل کرکے اخذ کیا جا سکتا ہے، یا بلاواسطہ مثال (۱) کی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔

متماثلات ذیل ثابت کرو:

(۳) Σ جب ا جب (ب - ج) = ۰، Σ جم ا جب (ب - ج) = ۰۔

(۴) Σ جب (ب + ج) جب (ب - ج) = ۰، Σ جم (ب + ج) جب (ب - ج) = ۰۔

(۵) Σ جب ب جب ج جب (ب - ج) = - جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

Σ جم ب جم ج جم (ب - ج) = - جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

(۶) اگر ا + ب + ج = π تو ثابت کرو کہ

جب^۲ ا = جب^۲ ب + جب^۲ ج - ۲ جب ب جب ج جم ا

اور جم^۲ ا = ۱ - جم^۲ ب - جم^۲ ج - ۲ جم ا جم ب جم ج

مثلثی متماثلات کی ایک کثیر تعداد اسی طرح کے جبری متماثلات کے مماثل ہے[1] مثلاً حسب ذیل جبری متماثلات مثالوں (۱) تا (۵) کے جواب میں ہیں:-

Σ ا (ب - ج) (ب + ج - ا) = ۲ (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب)

(۱) اور (۲) کے جواب میں،

Σ ا (ب - ج) = ۰، (۳) کے جواب میں؛

Σ (ب + ج) (ب - ج) = ۰، (۴) کے جواب میں؛

Σ ب ج (ب - ج) = - (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب)، (۵) کے جواب میں

[1] ایسی مطابقات کی ایک کثیر تعداد ایم۔ گیلن (M. Gelin) نے "Mathesis" جلد دوم میں دی ہے۔

ہم ان مطابقات کا نظریہ ساتویں باب میں بیان کریں گے۔

مماس اور مماس التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے

۴۶۔ جیب اور جیب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم دو زاویوں کے مجموعہ یا فرق کے مماس یا مماس التمام کے لئے ان زاویوں کے مماس یا مماس التمام کی رقوم میں ضابطے اخذ کر سکتے ہیں۔ مثلاً

$$\text{مس}(ا \pm ب) = \frac{\text{جب}(ا \pm ب)}{\text{جم}(ا \pm ب)} = \frac{\text{جب ا جم ب} \pm \text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب} \mp \text{جب ا جب ب}}،$$

پس اس کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کو جم ا جم ب سے تقسیم کرنے پر

$$\text{مس}(ا \pm ب) = \frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} \pm \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{1 \mp \frac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب}}}$$

اس لئے حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں

$$\text{مس}(ا + ب) = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{1 - \text{مس ا مس ب}} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\text{مس}(ا - ب) = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{1 + \text{مس ا مس ب}} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

اسی طرح اور دو ضابطے حاصل ہوتے ہیں (45)

$$\text{مم}(ا + ب) = \frac{\text{مم ا مم ب} - 1}{\text{مم ا} + \text{مم ب}} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\text{مم}(ا - ب) = \frac{\text{مم ا مم ب} + 1}{\text{مم ب} - \text{مم ا}} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

ضوابط (۹) تا (۱۲) مماس اور مماس التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے ہیں۔

مختلف ضوابط

۴۷ ۔ حسب ذیل ضابطے اُن ضابطوں سے اخذ کئے جا سکتے ہیں جو ہم نے دو زاویوں کے لئے حاصل کئے ہیں ۔
یہ ضابطے استحالات کو عمل میں لانے میں اکثر مفید ہوتے ہیں۔ طالب علم کو ہر ضابطہ کی تصدیق خود کر لینی چاہیئے۔

$$\text{جب}\,(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جب}\,(\text{ا}-\text{ب}) = \text{جب}^2\,\text{ا} - \text{جب}^2\,\text{ب} = \text{جم}^2\,\text{ب} - \text{جم}^2\,\text{ا} \quad \ldots (۱۳)$$

$$\text{جم}\,(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب}) = \text{جم}^2\,\text{ا} - \text{جب}^2\,\text{ب} = \text{جم}^2\,\text{ب} - \text{جب}^2\,\text{ا} \quad \ldots (۱۴)$$

$$\text{جب}\,(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب}) = \text{جب ا جم ا} + \text{جب ب جم ب} \quad \ldots (۱۵)$$

$$\text{جم}\,(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جب}\,(\text{ا}-\text{ب}) = \text{جب ا جم ا} - \text{جب ب جم ب} \quad \ldots (۱۶)$$

$$\frac{\text{جب}\,(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جب}\,(\text{ا}-\text{ب})} = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{\text{مس ا} - \text{مس ب}} \quad \ldots (۱۷)$$

$$\frac{\text{جم}\,(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب})} = \frac{۱ - \text{مس ا مس ب}}{۱ + \text{مس ا مس ب}} \quad \ldots (۱۸)$$

$$\frac{\text{جب}\,(\text{ا}\pm\text{ب})}{\text{جم ا جم ب}} = \text{مس ا} \pm \text{مس ب} \quad \ldots (۱۹)$$

دو جیوب یا جیوب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہمیں فوراً حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں :—

$$\frac{\text{جب ا} + \text{جب ب}}{\text{جب ا} - \text{جب ب}} = \frac{\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{ا}+\text{ب})}{\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{ا}-\text{ب})} \quad (۲۰)$$

$$\frac{\text{جب ا} \pm \text{جب ب}}{\text{جم ا} + \text{جم ب}} = \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{ا}\pm\text{ب}) \quad (۲۱)$$

$$\frac{\text{جب ا} \pm \text{جب ب}}{\text{جم ب} - \text{جم ا}} = \text{مم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} \mp \text{ب}) \quad \cdots\cdots \quad (۲۲)$$

$$\frac{\text{جم ا} + \text{جم ب}}{\text{جم ب} - \text{جم ا}} = \text{مم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب})\ \text{مم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب}) \quad \cdots\cdots \quad (۲۳)$$

(46)

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

۱ − جم^2 ا − جم^2 ب − جم^2 ج + ۲ جم ا جم ب جم ج

= ۴ جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب + ج) جب $\frac{1}{2}$ (− ا + ب + ج) جب $\frac{1}{2}$ (ا − ب + ج) ×

جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب − ج)

دائیں جانب کا جملہ لکھا جا سکتا ہے

− جم^2 ا − جم (ب + ج) جم (ب − ج) + جم ا {جم (ب + ج) + جم (ب − ج)}

جو مساوی ہے {جم ا − جم (ب + ج)} {جم (ب − ج) − جم ا} کے۔

اب ان میں سے ہر جزو ضربی کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے بائیں جانب کا جملہ حاصل ہوتا ہے۔ اگر ± ا ± ب ± ج، ۲π کا ضعف ہو تو

۱ − جم^2 ا − جم^2 ب − جم^2 ج + ۲ جم ا جم ب جم ج = ۰

یہ نتیجہ بعض اوقات مفید ثابت ہوتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ

۱ − جم^2 ا − جم^2 ب − جم^2 ج − ۲ جم ا جم ب جم ج

= − ۴ جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب + ج) جم $\frac{1}{2}$ (− ا + ب + ج) جم $\frac{1}{2}$ (ا − ب + ج) جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب − ج)

اس کو (۱) سے اخذ کیا جا سکتا ہے، یا بلا واسطہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ اگر ا + ب + ج = ن π تو

جب ۲ ا + جب ۲ ب + جب ۲ ج = (−۱)$^{\text{ن}-1}$ ۴ جب ا جب ب جب ج

کیونکہ

جب ۲ ا + جب ۲ ب + جب ۲ ج = ۲ جب ا جم ا + ۲ جب (ن π − ا) جم (ب − ج)

= ۲ جب ا {(-۱)^{ن} جم (ب + ج) - (-۱)^{ن} جم (ب - ج)} ،

= (-۱)$^{ن-۱}$ ۴ جب ا جب ب جب ج

۴ — انہی مفروض کے مطابق جو مثال (۳) میں فرض کیا گیا ہے ثابت کرو کہ

۱ + جم ۲ ا + جم ۲ ب + جم ۲ ج = (-۱)^{ن} ۴ جم ا جم ب جم ج

متماثلات ذیل ثابت کرو: —

۵ — جب ۳ ا = ۴ جب ا جب (۶۰° + ا) جب (۶۰° - ا)

۶ — جم ۳ ا = ۴ جم ا جم (۶۰° + ا) جم (۶۰° - ا)

۷ — جب ا + جب ب + جب ج - جب (ا + ب + ج)

= ۴ جب $\frac{1}{2}$ (ب + ج) جب $\frac{1}{2}$ (ج + ا) جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب)

۸ — جم ا + جم ب + جم ج + جم (ا + ب + ج)

= ۴ جم $\frac{1}{2}$ (ب + ج) جم $\frac{1}{2}$ (ج + ا) جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب)

۹ — Σ جب ۲ ا جب^{2} (ب + ج) - جب ۲ ا جب ۲ ب جب ۲ ج

= ۲ جب (ب + ج) جب (ج + ا) جب (ا + ب)

۱۰ — Σ جم ۲ ا جم^{2} (ب + ج) - جم ۲ ا جم ۲ ب جم ۲ ج

= ۲ جم (ب + ج) جم (ج + ا) جم (ا + ب)

۱۱ — Σ جب^{2} ا جب (ب + ج - ا) - ۲ جب ا جب ب جب ج

= جب (ب + ج - ا) جب (ج + ا - ب) جب (ا + ب - ج)

۱۲ — Σ جم^{2} ا جم (ب + ج - ا) - ۲ جم ا جم ب جم ج

= جم (ب + ج - ا) جم (ج + ا - ب) جم (ا + ب - ج)

مثالیں (۹) اور (۱۰) جبری متماثلہ

Σ ۲ ا (ب + ج)^{2} - ۸ ا ب ج = ۲ (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب)

کے جواب میں ہیں اور (۱۱) اور (۱۲) متماثلہ

کے ا^2 (ب + ج - ا) - ۲ ا ب ج = (ب + ج - ا) (ج + ا - ب) (ا + ب - ج)
کے جواب ہیں۔

تین زاویوں کے لئے جمع کے ضابطے

۴۸۔ جمع کے ضابطوں (۱) اور (۲) کی مدد سے ہم تین زاویوں کے حاصل جمع کے دائری تفاعلوں کو ان زاویوں کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کرسکتے ہیں، چنانچہ

جب (ا + ب + ج) = جب (ا + ب) جم ج + جم (ا + ب) جب ج

= (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جم ج + (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جب ج،

اور جم (ا + ب + ج)

= جم (ا + ب) جم ج - جب (ا + ب) جب ج

= (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جم ج - (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جب ج،

پس جب (ا + ب + ج)

= جب ا جم ب جم ج + جب ب جم ج جم ا + جب ج جم ا جم ب
- جب ا جب ب جب ج . . . . (۲۴)

اور جم (ا + ب + ج)

= جم ا جم ب جم ج - جم ا جب ب جب ج - جم ب جب ج جب ا
- جم ج جب ا جب ب . . . . . . (۲۵)

ضابطوں (۲۴) اور (۲۵) کو اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

جب (ا + ب + ج)

= جم ا جم ب جم ج (مس ا + مس ب + مس ج - مس ا مس ب مس ج)

اور جم (ا + ب + ج)

= جم ا جم ب جم ج (۱ ـ مس ب مس ج ـ مس ج مس ا ـ مس ا مس ب)

پس عمل تقسیم سے یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

مس (ا + ب + ج)

= (مس ا + مس ب + مس ج ـ مس ا مس ب مس ج) / (۱ ـ مس ب مس ج ـ مس ج مس ا ـ مس ا مس ب)

اسی طرح ضابطہ ذیل بھی حاصل ہو سکتا ہے

مم (ا + ب + ج)

= (مم ا مم ب مم ج ـ مم ا ـ مم ب ـ مم ج) / (مم ب مم ج + مم ج مم ا + مم ا مم ب ـ ۱) ۔ (۲۷)

(48)

مثالیں

۱ ـ ثابت کرو کہ مس (۴۵° + ل) ـ مس (۴۵° ـ ل) = ۲ مس ۲ ل

۲ ـ ثابت کرو کہ اگر ا + ب + ج = ن π تو

مس ا + مس ب + مس ج ـ مس ا مس ب مس ج = ۰

اور اگر ا + ب + ج = (۲ م + ۱) $\frac{\pi}{2}$ تو

مس ب مس ج + مس ج مس ا + مس ا مس ب = ۱

اور مماس التمام کے لئے متناظر مسئلے بیان کرو۔

زاویوں کی کسی تعداد کے لئے جمع کے ضابطے

۴۹ ــ یہ ظاہر ہے کہ اب ہم چار زاویوں کے حاصل جمع کے دائری تفاعلوں کے لئے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں، اور پھر پانچ زاویوں کے حاصل جمع کے لئے، اور علیٰ ہذا۔ استقراء کے طریقے سے ہم ثابت کریں گے کہ ن زاویوں ا۱، ا۲، ا۳، ...، ان کے حاصل جمع کی جیب

اور جیب التمام کے لئے یہ ضابطے ہیں

$$\text{جب}\,(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}}) = \text{ج}_1-\text{ج}_3+\text{ج}_5-\cdots \qquad (۲۸)$$

$$\text{جم}\,(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\cdots\ \text{ا}_{\text{ن}}) = \text{ج}_0-\text{ج}_2+\text{ج}_4-\cdots \qquad (۲۹)$$

جہاں $\text{ج}_{\text{ر}}$ سے ن زاویوں میں سے ر، ر کی جیوب اور باقی ن − ر زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے اور ن زاویوں میں سے ر زاویے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کئے گئے ہیں، پس

$$\text{ج}_0 = \text{جم ا}_1\,\text{جم ا}_2\cdots\text{جم ا}_{\text{ن}}\,،$$

$$\text{ج}_1 = \text{جب ا}_1\,\text{جم ا}_2\,\text{جم ا}_3\cdots\text{جم ا}_{\text{ن}} + \text{جم ا}_1\,\text{جب ا}_2\,\text{جم ا}_3\cdots\text{جم ا}_{\text{ن}}\cdots\cdots\,،$$

ضوابط (۲۸) اور (۲۹) صورتوں ن = ۲، ن = ۳ کے لئے ضابطوں (۱)، (۲) اور (۲۴)، (۲۵) کے مطابق ہیں، یہ مان لو کہ یہ ضابطے ن زاویوں کے لئے درست ہیں، ہم ثابت کریں گے کہ یہ، (ن + ۱) زاویوں کے لیے بھی درست ہیں، اب

$$\text{جب}\,(\text{ا}_1+\text{ا}_2+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}}+\text{ا}_{\text{ن}+1})$$

$$=\text{جب}(\text{ا}_1+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}})\,\text{جم ا}_{\text{ن}+1}+\text{جم}(\text{ا}_1+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}})\,\text{جب ا}_{\text{ن}+1}$$

$$=\text{جم ا}_{\text{ن}+1}(\text{ج}_1-\text{ج}_3-\text{ج}_5\cdots)+\text{جب ا}_{\text{ن}+1}(\text{ج}_0-\text{ج}_2+\text{ج}_4\cdots)\,،$$

فرض کرو کہ $\text{ج}'_{\text{ر}}$ سے زاویوں $\text{ا}_1، \text{ا}_2 \cdots \text{ا}_{\text{ن}+1}$ میں سے ر، ر زاویوں کی جیوب اور باقی ن + ۱ − ر زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جبکہ ن + ۱ زاویوں میں سے ر زاویے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کئے گئے ہوں۔ تب

$$ج'_1 = ج_1 \text{ جم } ل_{ن+1} + ج_0 \text{ جب } ل_{ن+1}$$

کیونکہ $ج_1$ جم $ل_{ن+1}$ کی ہر رقم میں زاویوں $ل_1، ل_2 \ldots ل_ن$ میں سے ایک کی جیب ہے اور $ج_0$ جب $ل_{ن+1}$ کی ہر رقم میں صرف جب $ل_{ن+1}$ ہے۔

(49)

اسی طرح

$$ج'_3 = ج_3 \text{ جم } ل_{ن+1} + ج_2 \text{ جب } ل_{ن+1}$$

$$ج'_5 = ج_5 \text{ جم } ل_{ن+1} + ج_4 \text{ جب } ل_{ن+1}$$

.. ..

.. ..

اس لئے $\text{جب}(ل_1 + ل_2 + \ldots + ل_{ن+1}) = ج'_1 - ج'_3 + ج'_5 - \ldots$

اسی طرح ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ $\text{جم}(ل_1 + \ldots + ل_{ن+1}) = ج'_0 - ج'_2 + ج'_4 \ldots$

پس اگر ضوابط (۲۸) اور (۲۹)، ن زاویوں کے لئے درست ہیں تو وہ ن + ۱ زاویوں کے لئے بھی درست ہیں، اور یہ ثابت کیا جاچکا ہے کہ وہ، ن = ۲، ۳ کے لئے درست ہیں اس لئے وہ عام طور پر درست ہیں۔

ان ضابطوں کو اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$\text{جب}(ل_1 + ل_2 + \ldots + ل_ن) = \text{جم } ل_1 \text{ جم } ل_2 \times \ldots \times \text{جم } ل_ن (م_1 - م_3 + م_5 \ldots)$$

$$\text{جم}(ل_1 + ل_2 + \ldots + ل_ن) = \text{جم } ل_1 \text{ جم } ل_2 \ldots \text{جم } ل_ن (1 - م_2 + م_4 - \ldots)،$$

جن میں $م_ر$ سے مس $ل_1$، مس $ل_2$ ...، مس $ل_ن$ میں سے ر، ر مماسوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، اس لئے تقسیم کے عمل سے

$$\text{مس}(ل_1 + ل_2 + \ldots + ل_ن) = \frac{م_1 - م_3 + م_5 - \ldots}{1 - م_2 + م_4 - \ldots} \qquad (۳۰)$$

جو ن زاویوں کے مجموعہ کے مماس کو ان زاویوں کے مماسوں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

ضابطہ (۳۰) کو بلا واسطہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔ مان لو کہ وہ ن زاویوں کے لئے درست ہے ہم ثابت کریں گے کہ وہ ن + ۱ زاویوں کے لئے بھی درست ہے۔ اس طرح

$$\text{مس}\,(\text{ا}_{۱}+\text{ا}_{۲}+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}+۱})=\frac{\text{مس}\,(\text{ا}_{۱}+\text{ا}_{۲}+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}})+\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+۱}}{۱-\text{مس}\,(\text{ا}_{۱}+\text{ا}_{۲}+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}})\,\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+۱}}$$

$$=\frac{(\text{م}_{۱}-\text{م}_{۳}+\text{م}_{۵}-\cdots)+\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+۱}\,(۱-\text{م}_{۲}+\text{م}_{۴}-\cdots)}{(۱-\text{م}_{۲}+\text{م}_{۴}\cdots)-\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+۱}\,(\text{م}_{۱}-\text{م}_{۳}+\text{م}_{۵}-\cdots)}$$

اب اگر ن+۱ زاویوں میں سے ر، ر زاویوں کے مماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع $\text{مَ}_{\text{ر}}$ سے تعبیر ہو تو

$$\text{مَ}_{۱}=\text{م}_{۱}+\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+۱}$$

$$\text{مَ}_{۲}=\text{م}_{۲}+\text{م}_{۱}\,\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+۱}$$

$$\text{مَ}_{۳}=\text{م}_{۳}+\text{م}_{۲}\,\text{مس}\,\text{ا}_{\text{ن}+۱}$$

اس لئے

$$\text{مس}\,(\text{ا}_{۱}+\text{ا}_{۲}+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}+۱})=\frac{\text{مَ}_{۱}-\text{مَ}_{۳}+\text{مَ}_{۵}-\cdots\cdots}{۱-\text{مَ}_{۲}+\text{مَ}_{۴}-\cdots\cdots}$$

اور چونکہ ضابطہ (۳۰)، ن = ۲، ۳ کے لئے درست ہے اس لئے ن = ۴ کے لئے درست ہے اور اس لئے عام طور پر درست ہے۔

(50)

جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو جیوب یا جیوب التمام کے حاصل جمع کے طور پر بیان کرنا

۵۰ — ہم ایسے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں جو زاویوں کی کسی تعداد کی جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو ان زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام

کے مجموعہ کے طور پر بیان کریں ۔

مثلاً

۲ جب $ا_{۱}$ جب $ا_{۲}$ = جم ($ا_{۱} - ا_{۲}$) − جم ($ا_{۱} + ا_{۲}$)

$۲^{۲}$ جب $ا_{۱}$ جب $ا_{۲}$ جب $ا_{۳}$ = ۲ جب $ا_{۳}$ {جم ($ا_{۱} - ا_{۲}$) − جم ($ا_{۱} + ا_{۲}$)}

= جب ($ا_{۱} - ا_{۲} + ا_{۳}$) + جب ($- ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳}$)

+ جب ($ا_{۱} + ا_{۲} - ا_{۳}$) − جب ($ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳}$)

= Σ جب ($- ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳}$) − جب ($ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳}$)

$۲^{۳}$ جب $ا_{۱}$ جب $ا_{۲}$ جب $ا_{۳}$ جب $ا_{۴}$ = ۲ جب ($ا_{۱} - ا_{۲} + ا_{۳}$) جب $ا_{۴}$ + ...

− ۲ جب ($ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳}$) جب $ا_{۴}$

= جم ($ا_{۱} - ا_{۲} + ا_{۳} - ا_{۴}$) − جم ($ا_{۱} - ا_{۲} + ا_{۳} + ا_{۴}$)

+ جم ($- ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳} - ا_{۴}$) − جم ($- ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳} + ا_{۴}$)

+ جم ($ا_{۱} + ا_{۲} - ا_{۳} - ا_{۴}$) − جم ($ا_{۱} + ا_{۲} - ا_{۳} + ا_{۴}$)

− جم ($ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳} - ا_{۴}$) + جم ($ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳} + ا_{۴}$)

= جم ($ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳} + ا_{۴}$) − Σ جم ($ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳} - ا_{۴}$)

+ $\frac{۱}{۲}$ Σ جم ($ا_{۱} + ا_{۲} - ا_{۳} - ا_{۴}$)

اسی طرح

۲ جم $ا_{۱}$ جم $ا_{۲}$ = جم ($ا_{۱} - ا_{۲}$) + جم ($ا_{۱} + ا_{۲}$)

$۲^{۲}$ جم $ا_{۱}$ جم $ا_{۲}$ جم $ا_{۳}$ = ۲ جم ($ا_{۱} - ا_{۲}$) جم $ا_{۳}$ + ۲ جم ($ا_{۱} + ا_{۲}$) جم $ا_{۳}$

= جم ($- ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳}$) + جم ($ا_{۱} - ا_{۲} + ا_{۳}$)

+ جم ($ا_{۱} + ا_{۲} - ا_{۳}$) + جم ($ا_{۱} + ا_{۲} + ا_{۳}$)

= Σ جم (-ل۱ + ل۲ + ل۳) + جم (ل۱ + ل۲ + ل۳)

۲^۳ جم ل۱ جم ل۲ جم ل۳ جم ل۴ = Σ جم (-ل۱ + ل۲ + ل۳ + ل۴) + ½ Σ جم (ل۱ + ل۲ - ل۳ - ل۴)
+ جم (ل۱ + ل۲ + ل۳ - ل۴)؛

ن زاویوں کے لئے عام ضابطے یہ ہیں:۔ اگر ن جفت ہے تو

$(-1)^{\frac{ن}{۲}}\ ۲^{ن-۱}$ جب ل۱ جب ل۲ .... جب لن

= جن - جن-۱ + جن-۲ ... + $(-1)^{\frac{ن}{۲}}\ \frac{1}{۲}$ ج½ن ..... (۳۱)

(51) جہاں جن-ر وہ حاصل جمع ہے جو زاویوں ل۱، ل۲ ... لن میں سے ن-ر/ن-ر زاویوں کو مثبت اور باقی ر زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی جیوب التمام کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے، ہر اجتماع میں منفی زاویے لئے گئے ہیں۔ اگر ن طاق ہے تو

$(-1)^{\frac{ن-1}{۲}}\ ۲^{ن-۱}$ جب ل۱ جب ل۲ ... جب لن

= دن - دن-۱ + دن-۲ ..... + $(-1)^{\frac{ن-1}{۲}}$ د½(ن+۱) ..... (۳۲)

جہاں دن-ر وہ حاصل جمع ہے جو زاویوں میں سے ن-ر، ن-ر زاویوں کو مثبت اور باقی ر زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی جیوب کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اگر ن جفت ہے تو

$۲^{ن-۱}$ جم ل۱ جم ل۲ .... جم لن

= جن + جن-۱ + جن-۲ ...... + ½ ج½ن ..... (۳۳)

اور اگر ن طاق ہے تو

$۲^{ن-۱}$ جم ل۱ جم ل۲ جم ل۳ .... جم لن

$$= \text{ج}_{\text{ن}} + \text{ج}_{\text{ن}-۱} + \dots + \text{ج}_{\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)} \quad \dots \dots \quad (۳۴)$$

ضابطوں (۳۱)، (۳۲)، (۳۳)، (۳۴) کو اوپر ن = ۲، ۳، ۴ کے لئے ثابت کیا جا چکا ہے اور اب ان کو استقراء کے طریقہ سے عام صورت کے لئے ثابت کیا جائے گا، مان لو کہ ضابطہ (۳۱) ن زاویوں کے لئے درست ہے، اس کو ۲ جب $\text{ا}_{\text{ن}+۱}$ سے ضرب دو اور کسی رقم ۲ $\text{جم}_{\text{ن}-\text{ر}}$ جب $\text{ا}_{\text{ن}+۱}$ کی بجائے جیوب کا مجموعہ رکھو تو حاصل ضرب

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\, ۲^{\text{ن}} \text{ جب ا}_۱ \text{ جب ا}_۲ \dots \text{ جب ا}_{\text{ن}} \text{ جب ا}_{\text{ن}+۱}$$

کے لئے حسب ذیل جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{دَ}_{\text{ن}+۱} - \text{دَ}_{\text{ن}} + \dots + (-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}} \text{دَ}_{\frac{۱}{۲}(\text{ن}+۲)}$$

جہاں $\text{دَ}_{\text{ر}}$ وہ حاصل جمع ہے جو ن + ۱ زاویوں میں سے ر، ر زاویوں کو مثبت اور باقی زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی جیوب کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے، پس یہ وہی ہے جو ضابطہ (۳۲) ہو جاتا ہے جبکہ اس میں ن کو ن + ۱ میں بدلا جائے، پھر یہی عمل اس نتیجہ کے ساتھ کرو تو حاصل ضرب

$$(-۱)^{\frac{\text{ن}+۱}{۲}}\, ۲^{\text{ن}+۱} \text{ جب ا}_۱ \text{ جب ا}_۲ \dots \text{ جب ا}_{\text{ن}+۲}$$

$$= \text{جَ}_{\text{ن}+۲} - \text{جَ}_{\text{ن}+۱} \dots + (-۱)^{\frac{\text{ن}+۲}{۲}} \frac{۱}{۲} \text{جَ}_{\frac{۱}{۲}(\text{ن}+۲)}$$

جہاں $\text{جَ}_{\text{ر}}$، ن + ۲ زاویوں کے لحاظ سے ہے، اس طرح ضابطہ (۳۱)، قیمت ن + ۲ کے لئے ثابت ہو چکا اگر ہم قیمت ن کے لئے ضابطوں (۳۱) اور (۳۲) کو درست مان لیں۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ضابطہ (۳۲)، ن + ۲ زاویوں کے لئے درست ہے، اور چونکہ یہ ضابطے ن = ۳، ۴ کے لئے ثابت کئے جا چکے ہیں اس لئے وہ عام صورت

میں بھی درست ہیں۔ جیوب التمام کی کسی تعداد کے حاصل ضربوں کے ضابطے (۳۳) اور (۳۴) اسی طریقہ سے ثابت کیے جا سکتے ہیں۔

مثال — ثابت کرو کہ ن زاویوں ع، ب، ج، ض، ... کے لئے

Σ جب (ع ± ب ± ج ± ض ± ....) = ۲^ن-۱ جب ع جم ب جم ج جم ض ...،

Σ جم (ع ± ب ± ج ± ض ± ....) = ۲^ن-۱ جم ع جم ب جم ج جم ض ...،

جہاں Σ سے وہ حاصل جمع تعبیر ہوتا ہے جو علامتوں کی تمام ممکن ترتیبوں کو جو ن-۱ ابہامات کی باعث پیدا ہو سکتی ہیں لینے سے بنتا ہے۔

ضعفی زاویوں کے دائری تفاعلوں کے لئے ضوابط

۵۱ — جمع کے ضابطوں میں جو ہم نے دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے لئے حاصل کیے ہیں ہر زاویہ کو ا کے مساوی فرض کریں تو حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں:—

جب ۲ ا = ۲ جب ا جم ا، . . . . (۳۵)

جم ۲ ا = جم^۲ ا - جب^۲ ا = ۱ - ۲ جب^۲ ا = ۲ جم^۲ ا - ۱ . . . (۳۶)

جب ۳ ا = ۳ جب ا جم^۲ ا - جب^۳ ا

یا جب ۳ ا = ۳ جب ا - ۴ جب^۳ ا، . . . . (۳۷)

جم ۳ ا = جم^۳ ا - ۳ جم ا جب^۲ ا

یا جم ۳ ا = ۴ جم^۳ ا - ۳ جم ا، . . . . (۳۸)

جب ن ا = ن جب ا جم^ن-۱ ا - (ن (ن-۱)(ن-۲) / ۳!) جب^۳ ا جم^ن-۳ ا + ... (۳۹)

جم ن ا = جم^ن ا - (ن (ن-۱) / ۲!) جب^۲ ا جم^ن-۲ ا

$$+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۴} جب^۴ ا جم^{ن-۴} ا - \dots (۴۰)$$

یہ آخری ضابطے (۳۹) اور (۴۰)، (۲۸) اور (۲۹) سے حاصل ہوتے ہیں، کیونکہ دفعہ ۹۴ میں ج ر میں اتنی ہی ارقام شامل ہوتی ہیں جتنی تعداد ان اجتماعوں کی ہے جو ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کو باہم لینے سے حاصل ہوتے ہیں، اور ج ر

$$= \frac{ن(ن-۱) \dots (ن-ر+۱)}{\lfloor ر} جب^ر ا جم^{ن-ر} ا$$

ضابطوں (۳۹)، (۴۰) کو اس شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$جب ن ا = جم^ن ا \left\{ ن مس ا - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳} مس^۳ ا + \dots \right\}$$

$$جم ن ا = جم^ن ا \left\{ ۱ - \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲} مس^۲ ا + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۴} مس^۴ ا \dots \right\}$$

(53)

نیز (۹)، (۲۶) اور (۳۰) سے

$$مس ۲ ا = \frac{۲ مس ا}{۱ - مس^۲ ا} \quad \dots \dots (۴۱)$$

$$مس ۳ ا = \frac{۳ مس ا - مس^۳ ا}{۱ - ۳ مس^۲ ا} \quad \dots \dots (۴۲)$$

$$مس ن ا = \frac{ن مس ا - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳} مس^۳ ا + \dots}{۱ - \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲} مس^۲ ا + \dots} \quad \dots (۴۳)$$

اس طرح ہم نے ایک زاویہ کے ضعف کے دائری تفاعلوں کے لئے خود اس زاویہ کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں ضابطے حاصل کئے ہیں۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ تواتروں

جب ا، جب ۲ ا، جب ۳ ا، ....

جم ا، جم ۲ ا، جم ۳ ا، ......

میں سے ہر ایک تواتر متوالی (Recurring) ہے، کیونکہ

جب (ن+۱) ا = ۲ جم ا جب ن ا - جب (ن-۱) ا،

جم (ن+۱) ا = ۲ جم ا جم ن ا - جم (ن-۱) ا؛

پس ہر ایک تواتر کی ہر رقم اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ اس سے ما قبل رقم کو ۲ جم ا سے ضرب دیکر حاصل ضرب میں سے اس ما قبل رقم کی پچھلی رقم کو تفریق کیا جائے اس طریقہ سے تواتروں کی ارقام یکے بعد دیگرے محسوب کیجا سکتی ہیں اگر ہم ضابطہ (۳۵) اور (۳۶) کو مان لیں۔

اس لئے سلسلوں

۱ + لا جب ا + لا^{2} جب ۲ ا + ...، اور ۱ + لا جم ا + لا^{2} جم ۲ ا + ...

میں سے ہر ایک کے ربط کا پیمانہ یہ ہے

۱ - ۲ لا جم ا + لا^{2}

جیب یا جیب التمام کی قوتوں کے لئے ضعفی زاویوں کی جیوب یا جیوبِ التمام کی رقوم میں جملے

۵۲ — کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی کسی قوت کے لئے خود زاویہ کے ضِعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں جملے حاصل کرنے کے لئے دفعہ (۵۰) کے ضابطوں میں تمام زاویوں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنا چاہیئے، اس طرح حسب ذیل ضابطے حاصل ہونگے۔

۲ جب^{2} ا = ۱ - جم ۲ ا

۴ جب^{3} ا = ۳ جب ا - جب ۳ ا،

۸ جب^{4} ا = جم ۴ ا - ۴ جم ۲ ا + ۳

۲ جم^۲ ل = ۱ + جم ۲ ل ،

۴ جم^۳ ل = ۳ جم ل + جم ۳ ل ،

۸ جم^۴ ل = جم ۴ ل + ۴ جم ۲ ل + ۳ ،

(54)

(-۱)^(ن/۲) ۲^(ن-۱) جب^ن ل = جم ن ل - ن جم (ن-۲) ل + [ن (ن-۱) / |۲] جم (ن-۴) ل - ...

+ (-۱)^(ن/۲) ۱/۲ [|ن / (|ن/۲ |ن/۲)] ، ... ... (۴۴)

(ن جفت)،

(-۱)^((ن-۱)/۲) ۲^(ن-۱) جب^ن ل = جب ن ل - ن جب (ن-۲) ل + [ن (ن-۱) / |۲] جب (ن-۴) ل - ...

+ (-۱)^((ن-۱)/۲) [|ن / (|½(ن-۱) |½(ن+۱))] جب ل، ... ... (۴۵)

(ن طاق)،

۲^(ن-۱) جم^ن ل = جم ن ل + ن جم (ن-۲) ل + [ن (ن-۱) / |۲] جم (ن-۴) ل + ...

+ ۱/۲ [|ن / (|ن/۲ |ن/۲)] ، ... ... (۴۶)

(ن جفت)،

۲^(ن-۱) جم^ن ل = جم ن ل + ن جم (ن-۲) ل + [ن (ن-۱) / |۲] جم (ن-۴) ل + ...

+ [|ن / (|½(ن-۱) |½(ن+۱))] جم ل، ... ... (۴۷)

(ن طاق)

ضابطوں (۴۴) اور (۴۵) کو (۴۶)، (۴۷) سے ان میں ل کی بجائے ۹۰° - ل رکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مقلوب تفاعلوں کے درمیان رشتے

۳۵ — اس باب کے جمع کے ضابطوں کے جواب میں وہ ضابطے معلوم کئے جاسکتے ہیں جن میں مقلوب تفاعل شریک ہوں۔ مثلاً ضابطوں (۱) اور (۳) میں جم ا = ا، جم ب = ب رکھنے سے ہمیں معلوم ہوگا کہ

$$\text{جم}^{-1}\text{ا} \pm \text{جم}^{-1}\text{ب} = \text{جم}^{-1}\left\{\text{اب} \mp \sqrt{1-\text{ا}^2}\,\sqrt{1-\text{ب}^2}\right\},$$

اسی طرح (۲) اور (۴) سے حاصل ہوگا

$$\text{جب}^{-1}\text{ا} \pm \text{جب}^{-1}\text{ب} = \text{جب}^{-1}\left\{\text{ا}\sqrt{1-\text{ب}^2} \pm \text{ب}\sqrt{1-\text{ا}^2}\right\}$$

(۹)، (۱۰)، (۱۱)، اور (۱۲) سے

$$\text{مس}^{-1}\text{ا} \pm \text{مس}^{-1}\text{ب} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ا} \pm \text{ب}}{1 \mp \text{اب}}$$

$$\text{مم}^{-1}\text{ا} \pm \text{مم}^{-1}\text{ب} = \text{مم}^{-1}\frac{\text{اب} \mp 1}{\text{ب} \pm \text{ا}}$$

اور (۲۶) اور (۳۰) سے

$$\text{مس}^{-1}\text{ا} + \text{مس}^{-1}\text{ب} + \text{مس}^{-1}\text{ج} = \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{اب ج}}{1 - \text{ب ج} - \text{ج ا} - \text{اب}}\right)$$

$$\text{مس}^{-1}\text{ا}_1 + \text{مس}^{-1}\text{ا}_2 + \dots \text{مس}^{-1}\text{ا}_{\text{ن}} = \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{س}_1 - \text{س}_3 + \text{س}_5 \dots}{1 - \text{س}_2 + \text{س}_4 \dots}\right), \qquad (55)$$

جہاں $\text{س}_{\text{ر}}$، مقداروں ا_1، ا_2، ا_3 ... $\text{ا}_{\text{ن}}$ میں سے ر، ر مقداروں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ان ضابطوں میں، ایک مقلوب تفاعل کے سوا باقی سب مقلوب تفاعلوں کو اختیاری طور پر کوئی مخصوص قیمتیں دیجا سکتی ہیں اور اس ایک مقلوب تفاعل کی مخصوص قیمت کا تعین دوسرول

کی قیمتیں مقرر کرنے کے بعد ہوسکتا ہے۔ مزید براں اگر کسی ضابطہ میں (مثلاً) تین مقلوب تفاعل شامل ہوں اور ان میں سے دو کی صدر قیمتیں دیجائیں تو یہ ضروری نہیں ہے کہ تیسرے مقلوب تفاعل کی قیمت بھی صدر ہو مثلاً ضابطہ

مس$^{-1}$ ا + مس$^{-1}$ ب = مس$^{-1}$ (ا + ب)/(۱ - اب)

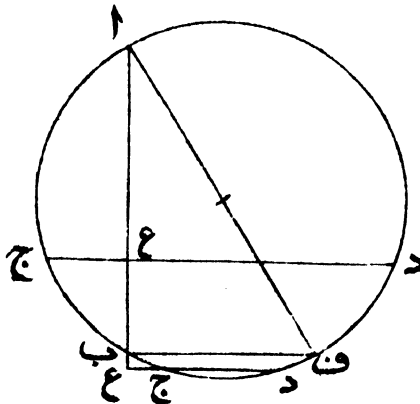
میں اگر مس$^{-1}$ ا اور مس$^{-1}$ ب دونوں مثبت ہوں اور ان کی قیمتیں صدر ہوں یعنی وہ قیمتیں جو صفر اور $\frac{۱}{۲}$ π کے درمیان ہیں، اور اگر ان کا مجموعہ $\frac{۱}{۲}$ π سے بڑا ہو تو یہ مجموعہ مقلوب تفاعل

مس$^{-1}$ (ا + ب)/(۱ - اب)

کی صدر قیمت نہیں ہے؛ یہ صدر قیمت، صفر اور - $\frac{۱}{۲}$ π کے درمیان ایک زاویہ ہے جس کا مماس وہی ہے جو مس$^{-1}$ ا اور مس$^{-1}$ ب کا مجموعہ ہے۔

ضابطوں کے ہندسی ثبوت

۴۵ - اس باب کے اکثر ضابطوں کے ہندسی ثبوت دئے جا سکتے ہیں، ایسے ثبوتوں کی صرف تین مثالیں دیجائیں گی۔ یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ بالعموم یہ ثبوت زاویوں کی صرف ایک محدود وسعت کے لئے درست ہوتے ہیں۔

(۱) ضابطہ مس (ا ± ب) = $\frac{\text{مس ا ± مس ب}}{\text{۱ ∓ مس ا مس ب}}$ ثابت کرو۔

(56) فرض کرو کہ ایک دائرے کے دو وتر ا ب، ج د ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں، اور فرض کرو کہ زاویے ا د ع، ب د ع کو ا اور ب سے تعبیر کیا گیا ہے، تو چونکہ

$$\text{اع} \times \text{ع ب} = \text{ج ع} \times \text{ع د} \quad \text{اس لئے}$$

$$\frac{\dfrac{\text{اع} \pm \text{ع ب}}{\text{ع د}}}{1 - \dfrac{\text{اع}}{\text{ع د}} \times \dfrac{\text{ع ب}}{\text{ع د}}} = \frac{\text{اع} \pm \text{ع ب}}{\text{ع د} \pm \text{ع ج}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب ن}}$$

اس لئے

$$\text{مس}(\text{ا} \pm \text{ب}) = \frac{\text{مس ا} \pm \text{مس ب}}{1 \mp \text{مس ا مس ب}}$$

(۲) ضابطہ $\text{جب } ۲\text{ا} = ۲ \text{ جب ا جم ا}$،

اور $\text{جم } ۲\text{ا} = \text{جم}^2 \text{ا} - \text{جب}^2 \text{ا}$

ثابت کرو۔

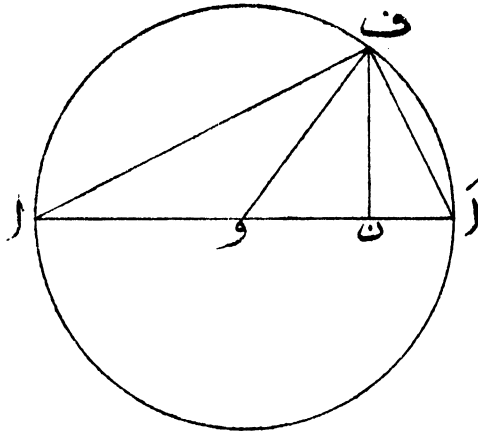
فرض کرو کہ ا و اَ، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ف ا اَ = ا، تب ف و اَ = ۲ ا،
ف ن، ا اَ پر عمود نکالو۔

تب　جب ۲ا = ف ن / و ف ، لیکن ف ن × ا آ = ۲ △ ا ف آ
= ا ف × ف آ

اس لئے　جب ۲ا = (ا ف × آ ف) / (و ف × ا آ) = (ا آ² جب ا جم ا) / (و ف × ا آ) = ۲ جب ا جم ا ،

نیز　جم ۲ا = و ن / و ف = (ا ن² − آ ن²) / (۲ × ا آ × و ف) = (ا ف² − آ ف²) / ا آ² = جم² ا − جب² ا

(۳) ضابطہ　جب ۳ا = ۳ جب ا − ۴ جب³ ا ،

اور　جم ۳ا = ۴ جم³ ا − ۳ جم ا

کو ثابت کرو۔

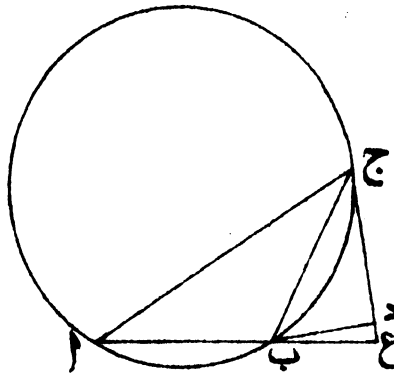
فرض کرو کہ ج ا ب = ا ج ب = ا ؛ مثلث ا ب ج کا بیرونی دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ ا ب، نقطہ ج پر کے مماس سے نقطہ ع پر ملتا ہے۔ ب د، ج ع پر عمود نکالو۔

(57)

زاویہ ب ع د = ۳ ا یا ۱۸۰° − ۳ ا

اب　ا ع / ب ع = △ ا ج ع / △ ب ج ع = ا ج² / ب ج² = ۴ جم² ا

اس لئے $\frac{\text{اب}}{\text{بع}}$ = ۴ جم^2 ا - ۱ = ۳ - ۴ جب^2 ا ؛

پس جب ۳ا = $\frac{\text{بد}}{\text{بع}} = \frac{\text{بد}}{\text{اب}} \times \frac{\text{اب}}{\text{بع}}$ = ۳ جب ا - ۴ جب^3 ا ،

اور جم ۳ا = $\frac{\text{دع}}{\text{بع}} = \frac{\text{دج}}{\text{بع}} - \frac{\text{عج}}{\text{بع}} = \frac{\text{دج}}{\text{بج}} \times \frac{\text{بج}}{\text{بع}} - \frac{\text{اج}}{\text{اب}}$

= جم ا (۴ جم^2 ا - ۱) - ۲ جم ا = ۴ جم^3 ا - ۳ جم ا

(۱) اور (۳) کے ثبوت مسٹر ہارٹ نے (Messenger of Mathematics) کی جلد چہارم میں دئے تھے۔

مثالیں

ضوابط ذیل کو ہندسی طور پر ثابت کرو۔

(۱) مس^2 ا = $\frac{\text{۱ - جم ۲ا}}{\text{۱ + جم ۲ا}}$

(۲) مس (۴۵° + ا) - مس (۴۵° - ا) = ۲ مس ۲ا

(۳) جب ا جب ب = جب^2 $\frac{1}{2}$ (ا + ب) - جب^2 $\frac{1}{2}$ (ا - ب)

(۴) جب^2 عہ + جب^2 بہ = جب^2 (عہ + بہ) - ۲ جب عہ جب بہ جم (عہ + بہ)

(۵) مس$^{-1}$ $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ - مس$^{-1}$ $\frac{\text{م - ن}}{\text{م + ن}}$ = $\frac{\pi}{4}$

(۶) جم^2 ا + جم^2 ب + جم^2 ج + ۲ جم ا جم ب جم ج = ۱ ،
جہاں ا + ب + ج = ۱۸۰°

(۷) جب ا + جب ب - جب ج = ۴ جب $\frac{1}{2}$ا جب $\frac{1}{2}$ب جم $\frac{1}{2}$ج
جہاں ا + ب + ج = ۱۸۰°

(۸) مم طہ = قم ۲ طہ + مم ۲ طہ

(۹) جم ۳۶° - جب ۱۸° = $\frac{۱}{۲}$

چوتھے باب پر مثالیں

مماثلات ۱ تا ۱۵ ثابت کرو۔

۱- جم² ا + جم² (۱۲۰° + ا) + جم² (۱۲۰° - ا) = $\frac{۳}{۲}$

۲- (جم ا + جب ا)⁴ + (جم ا - جب ا)⁴ = ۳ - جم ۴ا

۳- جب ۳ا جب³ ا + جم ۳ا جم³ ا = جم³ ۲ا

۴- ۴ جم³ ا جب ۳ا + ۴ جب³ ا جم ۳ا = ۳ جب ۴ا

۵- جب³ ا + جب³ (۱۲۰° + ا) - جب³ (۱۲۰° - ا) = - $\frac{۳}{۴}$ جب ۳ا

۶- $\frac{\text{جب ا + جب ۳ا + جب ۵ا + جب ۷ا}}{\text{جم ا + جم ۳ا + جم ۵ا + جم ۷ا}}$ = مس ۴ا

۷- ۱۶ جم⁵ ا - جم ۵ا = ۵ جم ا (۱ + ۲ جم ۲ا)

۸- قم (م + ن) لا قم م لا قم ن لا - مم (م + ن) لا مم م لا مم ن لا

= مم م لا + مم ن لا - مم (م + ن) لا

۹- Σ جم ا (جم ۳ب - جم ۳ج)

= ۴ (جم ب - جم ج) (جم ج - جم ا) (جم ا - جم ب) (جم ا + جم ب + جم ج)

۱۰- Σ جب ا (جب² ب + جب² ج) جب (ب - ج)

= جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب) جب (ا + ب + ج)

۱۱- مس (ا + ۶۰°) مس (ا - ۶۰°) + مس ا مس (ا + ۶۰°) + مس (ا - ۶۰°) مس ا

= - ۳

۱۲- مم (ا + ۶۰°) مم (ا - ۶۰°) + مم ا مم (ا + ۶۰°) + مم (ا - ۶۰°) مم ا

= - ۳

۱۳- (جم ۳ا / جم ا) − (جم ۶ا / جم ۲ا) + (جم ۹ا / جم ۳ا) − (جم ۱۸ا / جم ۶ا)

= ۲ (جم ۲ا − جم ۴ا + جم ۶ا − جم ۱۲ا)

۱۴- Σ جب (ب + ج + د − ا) / جب (ا − ب) جب (ا − ج) جب (ا − د) = ۰

۱۵- جم ۴ا / جب ا جب (ا − ب) جب (ا − ج) + جم ۴ب / جب ب جب (ب − ا) جب (ب − ج)

\+ جم ۴ج / جب ج جب (ج − ا) جب (ج − ب) = ۸ جب (ا + ب + ج) + قم ا قم ب قم ج

اگر ا + ب + ج = π تو روابط از مثال ۱۶ تا ۲۷ ثابت کرو۔

۱۶- Σ س ا م ب م ج = Σ س ا − ۲ Σ م ا

۱۷- Σ م ا = م ا م ب م ج + قم ا قم ب قم ج

۱۸- Σ جب (ب − ج) جم^{3} ا = − جب (ب − ج) جب (ج − ا) جب (ا − ب)

۱۹- Σ (جب ب + جب ج) (جم ج + جم ا) (جم ا + جم ب)

= (جب ب + جب ج) (جب ج + جب ا) (جب ا + جب ب)

۲۰- Σ جب ا جم (ا − ب) جم (ا − ج)

= ۳ جب ا جب ب جب ج + جب ۲ا جب ۲ب جب ۲ج

۲۱- Σ جب ۲ب جب ۲ج = ۴ { جب^{2} ا جب ب جب ج + جم^{2} ا جم^{2} ب

× جم^{2} ج + جم ا جم ب جم ج }

۲۲- Σ جم ۲ا (س ب − س ج)

= −۲ جب (ب − ج) جب (ج − ا) جب (ا − ب) قطا قط ب قط ج،

(59)

۲۳- Σ جم۲ا (جب۲ب + جب۲ج) = ۲ جب ب جب ج

۲۴- Σ جم ا جب۳ا = { Σ جب۲ا } { ۳/۲ + Σ جم۲ا }

۲۵- (جب ا + جب ب + جب ج)(− جب ا + جب ب + جب ج)(جب ا − جب ب + جب ج) × (جب ا + جب ب − جب ج) = جب۲ا جب۲ب جب۲ج

۲۶-

جب۲ا	مم ا	۱
جب۲ب	مم ب	۱
جب۲ج	مم ج	۱

= ۰

۲۷- Σ قم ب قم ج قط (ب − ج)

= قط (ب − ج) قط (ج − ا) قط (ا − ب) (۳ + ۸ جم ا جم ب جم ج)

۲۸- اگر عہ + بہ + حہ = ۱/۲ π تو ثابت کرو کہ

جب۲ عہ + جب۲ بہ + جب۲ حہ + ۲ جب عہ جب بہ جب حہ = ۱

۲۹- ثابت کرو کہ

۱ / (۱ + ۲ جم (۱/۳ π + طہ)) + ۱ / (۱ + ۲ جم (۱/۳ π − طہ)) = ۱ / (۲ جم طہ − ۱)

۳۰- ثابت کرو کہ

جب۲ (طہ + عہ) + جب۲ (طہ + بہ) − ۲ جم (عہ − بہ) جب (طہ + عہ) جب (طہ + بہ)
طہ پر منحصر نہیں ہے۔

۳۱- اگر مس بہ = ن جب عہ جم عہ / (۱ − ن جب۲ عہ) تو ثابت کرو کہ

مس (عہ − بہ) = (۱ − ن) مس عہ

۳۲- اگر مس فہ = جب عہ جب طہ / (جم طہ − جم عہ)

تو ثابت کرو کہ

مس طہ = جب عہ جب فہ / (جم فہ ± جم عہ)

۳۳۔ اگر ۲√۲ جم ا = جم ب + جم^۳ ب ، ۲√۲ جب ا = جب ب − جب^۳ ب

تو ثابت کرو کہ ± جب (ا − ب) = جم ۲ ب = ۱/۳

۳۴۔ ثابت کرو کہ

(جم ۳ طہ + جم ۳ فہ) / (۲ جم (طہ − فہ) − ۱) = (جم طہ + جم فہ) جم (طہ + فہ) − (جب طہ + جب فہ) جب (طہ + فہ)

۳۵۔ اگر طہ اور فہ مساوات

جب طہ + جب فہ = ۳√ (جم فہ − جم طہ)

کو پورا کریں تو　جب ۳ طہ + جب ۳ فہ = ۰

۳۶۔ ثابت کرو کہ مس ۷۰° = مس ۲۰° + ۲ مس ۴۰° + ۴ مس ۱۰°

۳۷۔ اگر جم^۴ عہ / جم^۲ بہ + جب^۴ عہ / جب^۲ بہ = ۱ تو

جم^۴ بہ / جم^۲ عہ + جب^۴ بہ / جب^۲ عہ = ۱

۳۸۔ اگر جم (ا + ب) جم (ج + د) = جم (ا − ب) جم (ج − د)

تو　مم ا مم ب مم ج = مم د

۳۹۔ اگر　عہ + بہ + حہ = ½ π تو

(جم عہ + جب عہ)(جم بہ + جب بہ)(جم حہ + جب حہ) = ۲ (جم عہ جم بہ جم حہ + جب عہ جب بہ جب حہ)

۴۰۔ اگر ا + ب + ج = π ، اور جم ا = جم ب جم ج

تو　مم ب مم ج = ½

(60)

۴۱۔ اگر ۴ جب^۲ عہ جب^۲ بہ جب^۲ حہ + جب^۴ عہ + جب^۴ بہ + جب^۴ حہ

− ۲ جب۲ بہ جب۲ جہ − ۲ جب۲ جہ جب۲ عہ − ۲ جب۲ عہ جب۲ بہ = ۰

تو ثابت کرو کہ عہ ± بہ ± جہ، π کا ضعف ہے۔

۴۲۔ اگر $\frac{\text{مس (عہ + بہ − جہ)}}{\text{مس (عہ − بہ + جہ)}} = \frac{\text{مس جہ}}{\text{مس بہ}}$ تو ثابت کرو کہ

جب ۲ عہ + جب ۲ بہ + جب ۲ جہ = ۰

۴۳۔ اگر قط عہ = قط بہ قط جہ + مس بہ مس جہ

تو ثابت کرو کہ قط بہ = قط جہ قط عہ + مس جہ مس عہ اور قط جہ = قط عہ قط بہ + مس عہ مس بہ

۴۴۔ اگر جم (طہ + فہ) = $\frac{\text{جب}^2\text{ فہ جم طہ − جم}^2\text{ فہ جب طہ}}{\text{جم طہ مس عہ}} = \frac{\text{جب}^2\text{ طہ جم فہ − جم}^2\text{ طہ جب فہ}}{\text{جم فہ مس بہ}}$

تو جم (عہ + بہ) = $\frac{\text{جب}^2\text{ بہ جم عہ − جم}^2\text{ بہ جب عہ}}{\text{جم عہ مس طہ}} = \frac{\text{جب}^2\text{ عہ جم بہ − جم}^2\text{ عہ جب بہ}}{\text{جم بہ مس فہ}}$

۴۵۔ اگر ا، ب، ج مثبت زاویے ہوں ایسے کہ ا + ب + ج = ۹۰° تو ثابت کرو کہ

قط ا قط ب قط ج + ۲ Σ مس ب مس ج = ۲

۴۶۔ اگر $\frac{\text{جم(طہ + بہ) جم(طہ + جہ) + ۱}}{\text{جم (بہ + جہ)}} = \frac{\text{جم(طہ + جہ) جم(طہ + عہ) + ۱}}{\text{جم (جہ + عہ)}} = \frac{\text{جم(طہ + عہ) جم(طہ + بہ) + ۱}}{\text{جم (عہ + بہ)}}$

تو ثابت کرو کہ قم (بہ − عہ) قم (جہ − عہ) + قم (جہ − بہ) قم (عہ − بہ) + قم (عہ − جہ) قم (بہ − جہ) = ۱

۴۷۔ اگر جب۳ طہ + جب۳ فہ = ۱۴ جب۲ طہ جب۲ فہ، اور جب طہ + جب فہ = جب $\frac{۱}{۴}$ π

تو ثابت کرو کہ ۲ جب طہ = جب ($\frac{۱}{۳}$ π ± $\frac{۱}{۴}$ π) | جب $\frac{۱}{۳}$ π، یا جم ($\frac{۱}{۳}$ π ± $\frac{۱}{۴}$ π) | جم $\frac{۱}{۴}$ π،

۴۸۔ اگر جم (ا + ب + ج) = جم ا جم ب جم ج

تو ۸ جب (ب + ج) جب (ج + ا) جب (ا + ب) + جب ۲ ا جب ۲ ب جب ۲ ج = ۰

۴۹۔ اگر مس طہ + مس فہ + مس پہ = − مس طہ مس فہ مس پہ = مس (طہ + فہ + پہ)

تو یا زاویوں طہ، فہ، پہ میں سے دو زاویے م π + $\frac{۱}{۴}$ π، ن π − $\frac{۱}{۴}$ π کے مساوی ہیں یا ان میں سے ایک اور نیز باقی دو کا مجموعہ π کے ضعف ہیں۔

۵۰۔ اگر $\frac{\text{جب(بہ − جہ)}}{\text{جم عہ}}$ جم(ط − ۲عہ) + $\frac{\text{جب(جہ − عہ)}}{\text{جم بہ}}$ جم(ط − ۲بہ) + $\frac{\text{جب(عہ − بہ)}}{\text{جم جہ}}$ جم(ط − ۲جہ)

= جب(بہ − جہ) جب(جہ − عہ) جب(عہ − بہ)

تو ثابت کرو کہ　　جم ط = جم عہ جم بہ جم جہ

۵۱۔ اگر عہ، بہ، جہ، صنہ کوئی چار زاویے ہوں اور ۲ثہ = عہ + بہ + جہ + صنہ تو

جم عہ جم بہ جم جہ جم صنہ + جب عہ جب بہ جب جہ جب صنہ

= جم(ثہ − عہ) جم(ثہ − بہ) جم(ثہ − جہ) جم(ثہ − صنہ)

+ جب(ثہ − عہ) جب(ثہ − بہ) جب(ثہ − جہ) جب(ثہ − صنہ)

۵۲۔ ثابت کرو کہ　　(61)

مس$^{-1}$ لا = ۲ مس$^{-1}$ { قم مس$^{-1}$ لا − مس قم$^{-1}$ لا }

۵۳۔ ثابت کرو کہ

۲ مس$^{-1}$ لا + ۲ مس$^{-1}$ ما = جب$^{-1}$ { $\frac{\text{۲(لا + ما)(۱ − لا ما)}}{\text{(۱ + لا}^2\text{)(۱ + ما}^2\text{)}}$ }

۵۴۔ ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ { ½ (جم ۲عہ قط ۲بہ + جم ۲بہ قط ۲عہ) } = مس$^{-1}$ { مس^2 (عہ + بہ) مس^2 (عہ − بہ) } + مس$^{-1}$ ۱

۵۵۔ ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ ۱ + مس$^{-1}$ ۲ + مس$^{-1}$ ۳ = π = ۲ (مس$^{-1}$ ۱ + مس$^{-1}$ ½ + مس$^{-1}$ ⅓)

۵۶۔ اگر　　جم$^{-1}$ لا + جم$^{-1}$ ما + جم$^{-1}$ ی = π

تو　　لا^2 + ما^2 + ی^2 + ۲ لا ما ی = ۱

۵۷۔ اگر مس$^{-1}$ ما = ۵ مس$^{-1}$ لا تو ما کو لا کے ایک جبری تفاعل کے طور پر معلوم کرو۔ اس لئے ثابت کرو کہ مس °۱۸، مساوات ۵لا^4 − ۱۰لا^2 + ۱ = ۰ کی ایک اصل ہے۔

۵۸ - اگر ۲ ثہ = عہ + بہ + جہ تو ثابت کرو کہ

مسؔ‌ا (۲ جم عہ جم بہ جم جہ / جم۲ عہ + جم۲ بہ + جم۲ جہ − ۱) − مسؔ‌ا [مس ثہ مس (ثہ − عہ) مس (ثہ − بہ) مس (ثہ − جہ)]

= مسؔ‌ا ۱

۵۹ - ثابت کرو کہ

مسؔ‌ا √(ا (ا + ب + ج) / ب ج) + مسؔ‌ا √(ب (ا + ب + ج) / ج ا) + مسؔ‌ا √(ج (ا + ب + ج) / ا ب) = π

۶۰ - ثابت کرو کہ مساوات

جبؔ‌ا لا ± جبؔ‌ا ما ± جبؔ‌ا ی ± جبؔ‌ا ۶ = ن π ، (جہاں ن صحیح عدد ہے)

کا جبری مماثل حسب ذیل ہے

{ ۴ (س − لا) (س − ما) (س − ی) (س − ۶) − (لا ما + ی ۶) (لا ی + ما ۶) (لا ۶ + ما ی) }

× { ۴ س (س − لا − ما) (س − لا − ی) (س − لا − ۶) − (ی ۶ − لا ما) (ما ۶ − لا ی) ×

(ما ی − لا ۶) } = ۰

جہاں ۲ س = لا + ما + ی + ۶

مثال ۶۱ تا ۶۷ کی مساواتیں حل کرو:-

۶۱ - جب طہ + ۲ جم طہ = ۱

۶۲ - جب ۵ طہ = ۱۶ جب۵ طہ

۶۳ - جب ۰ طہ − جب طہ = جب ۳ طہ

۶۴ - مس ۲ طہ = ۸ جم۲ طہ − مم طہ

۶۵ - مس (۴۵° + ا) = ۳ مس (۴۵° − ا)

۶۶ - ۲ جب (طہ − فہ) = جب (طہ + فہ) = ۱

۶۷ - قط ۴ طہ − قط ۲ طہ = ۲

۶۸ - جب م طہ + جب ن طہ + جب (م + ن) طہ = ۰

(62) ۶۹ - جب $\frac{ن+۱}{۲}$ طہ + جب $\frac{ن-۱}{۲}$ طہ = جم طہ

۷۰ - مس طہ + قط ۲ طہ = ۱

۷۱ - ۲ (جب^{۴} طہ + جم^{۴} طہ) = ۱

۷۲ - مس طہ + مس ۳ طہ + مس ۵ طہ = ۰

۷۳ - مم$^{-۱}$ لا - مم$^{-۱}$ (لا + ۲) = ۱۵°

۷۴ - ا جب$^{-۱}$ لا + ب جم$^{-۱}$ ما = عہ،

و جم$^{-۱}$ لا - ب جب$^{-۱}$ ما = یہ

۷۵ - قم ۴ عہ - قم ۴ طہ = مم ۴ عہ - مم ۴ طہ

۷۶ - تفاعلوں (ا) جب لا + جب ۲ لا،

(ب) جم ۲ لا \ جم لا

کی ترسیمات کھینچو۔

۷۷ - مساوات ا (جب طہ - جم عہ) = ب (جب عہ - جم طہ)

کے سب حل دریافت کرو۔

۷۸ - اگر م صحیح عدد ہو اور ا + ب + ج = π تو ثابت کرو کہ

جب ۲ م ا + جب ۲ م ب + جب ۲ م ج = (-۱)$^{م+۱}$ ۴ جب م ا جب م ب جب م ج،

جم ۲ م ا + جم ۲ م ب + جم ۲ م ج = (-۱)^{م} ۴ جم م ا جم م ب جم م ج - ۱

۷۹ - ثابت کرو کہ لا + ۸ لا ی + ۴ ی^{۲} = ۴ لا^{۲} ما

جہاں لا = جب ا + جب ب + جب ج، ما = جب ب جب ج + جب ج جب ا

+ جب ا جب ب، ی = جب ا جب ب جب ج

۸۰ - اگر $\frac{۱ - مس ب مس ج}{جم ۲ ا} + \frac{۱ - مس ج مس ا}{جم ۲ ب} = ۲ \frac{۱ - مس ا مس ب}{جم ۲ ج}$

تو ثابت کرو کہ یا تو مس ا، مس ب، مس ج سلسلہ حسابیہ میں ہیں یا
ا + ب + ج، π کا ایک صحیح عددی ضعف ہے۔

۸۱ - اگر جم ا = جم طہ جب فہ، جم ب = جم فہ جب یہ، جم ج = جم یہ جب طہ
اور ا + ب + ج = π تو ثابت کرو کہ مس طہ مس فہ مس یہ = ۱

۸۲ - اِن مساواتوں کو حل کرو:—

۴ (جم ۲ طہ + جم ۴ طہ) (جم ۳ طہ + جم طہ) = ۱

۴ (جم ۳ طہ + جم ۵ طہ) (جم ۶ طہ + جم ۷ طہ) = −۱

(63)

پانچواں باب

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

ضوابط

۵۵ — اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطہ (۳۴) میں ل کی بجائے $\frac{1}{2}$ عہ لکھیں تو

جم عہ = جم^2 $\frac{1}{2}$ عہ − جب^2 $\frac{1}{2}$ عہ = ۲ جم^2 $\frac{1}{2}$ عہ − ۱ = ۱ − ۲ جب^2 $\frac{1}{2}$ عہ

اس لئے ۱ − جم عہ = ۲ جب^2 $\frac{1}{2}$ عہ ، ۱ + جم عہ = ۲ جم^2 $\frac{1}{2}$ عہ ،

جذر المربع لینے سے جم $\frac{1}{2}$ عہ اور جب $\frac{1}{2}$ عہ کے لئے جم عہ کی رقوم میں حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں:-

جب $\frac{1}{2}$ عہ = ± $\sqrt{\frac{1}{2}(۱ - \text{جم عہ})}$

جم $\frac{1}{2}$ عہ = ± $\sqrt{\frac{1}{2}(۱ + \text{جم عہ})}$

ان میں سے پہلے ضابطہ کو دوسرے سے تقسیم کرو تو

مس $\frac{1}{2}$ عہ = ± $\sqrt{\frac{۱ - \text{جم عہ}}{۱ + \text{جم عہ}}}$

اِن تین ضابطوں میں علامت کا ابہام ہے، اب اگر عہ دیا گیا ہے تو

تفاعلوں جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ میں سے ہر ایک کی ایک یگانہ قیمت ہے، اور اس لئے اِن کے لئے جو جملے حاصل ہونگے ان میں علامت کا ابہام نہیں ہو سکتا۔ محصلہ بالا تین جملوں میں علامت کا ابہام اس وجہ سے ہے کہ اِن سے جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جب کہ جم عہ کی قیمت دیگئی ہو، نہ کہ جب، عہ دیا گیا ہو۔
اب جیسا کہ ہم نے دفعہ ۴۳ میں ثابت کیا ہے زاویوں ۲ ن π عہ میں سے سب زاویوں کی جیب التمام وہی ہے جو عہ کی ہے جبکہ ن ایک صحیح عدد ہو؛ اس لئے وہ ضابطے جو جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کو جم عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں اُن سے نہ صرف خود جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں حاصل ہونگی بلکہ ان سے ضابطہ $\frac{1}{2}$ (۲ ن π ± عہ) میں شریک تمام زاویوں کے اِن تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہونگی۔

(64) جب $\frac{1}{2}$ (۲ ن π ± عہ) کی جو قیمتیں ہو سکتی ہیں اُن کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں دو صورتوں پر غور کرنا چاہیئے، ایک وہ صورت جبکہ ن جفت ہو اور دوسری وہ جبکہ ن طاق ہو۔ اگر ن = ۲ م تو

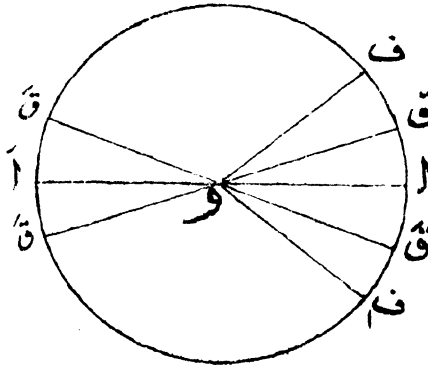
جب $\frac{1}{2}$ (۴ م π ± عہ) = جب (± $\frac{1}{2}$ عہ) = ± جب $\frac{1}{2}$ عہ

لیکن اگر ن = ۲ م + ۱ تو

جب $\frac{1}{2}$ (۴ م π + ۲ π ± عہ) = جب (π ± عہ) = ∓ جب $\frac{1}{2}$ عہ

پس جب $\frac{1}{2}$ عہ اور − جب $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں اُس ضابطہ سے حاصل ہوتی ہیں جو جب $\frac{1}{2}$ عہ کو جم عہ کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ جم $\frac{1}{2}$ (۲ ن ۱۱ ± عہ) اور مس $\frac{1}{2}$(۲ن ۱۱ ± عہ) کی قیمتیں ± جم $\frac{1}{2}$ عہ، ± مس $\frac{1}{2}$ عہ ہیں، اور اس طرح اُن ضابطوں سے جو جم $\frac{1}{2}$ عہ اور مس $\frac{1}{2}$ عہ کو جم عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں جم $\frac{1}{2}$ عہ، ـ جم $\frac{1}{2}$ عہ اور مس $\frac{1}{2}$ عہ، ـ مس $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں علی الترتیب حاصل ہوتی ہیں۔ پس متذکرہ صدر تین ضابطوں میں علامت کا جو ابہام ہے اُس کی توضیح ہو چکی۔

۵۶ ـــ محصلہ بالا تین ضابطوں میں علامت کا جو ابہام ہے اُس کی ہندسی توضیح بھی ہو سکتی ہے۔

اگر ا و ف = عہ اور ا و فٖ = ـ عہ تو ہم اختتامی زاویوں کے دو جٹ (وا، وف)، (وا، وفٖ) ہی وہ جٹ ہیں جن میں سے ہر زاویے کی جیب التمام وہی ہے جو عہ کی ہے، اگر زاویوں ا و ف، ا و فٖ کے ناصف علی الترتیب ق و ق، قَ و قَ ہوں تو زاویوں (و ا، و فٖ) کا ناصف و قٖ یا و قَ ہے، اس لئے جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کے ضابطوں سے جبکہ جم عہ دیا گیا ہو اِن تمام ہم اختتامی

(65)

زاویوں کی جیب، جیب التمام، مماس حاصل ہوتے ہیں جو چار جوڑوں (و۱، وق۱) (و۱، وق) (و۱، وق) (و۲، وق) میں شامل ہیں۔ پہلے اور چوتھے جوڑوں کے زاویوں کی جیوب، جب $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی ہیں، اور دوسرے اور تیسرے جوڑوں کے زاویوں کی جیوب، – جب $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی ہیں؛ پہلے اور تیسرے جوڑوں کے زاویوں کی جیوب التمام، جم $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی ہیں اور دوسرے اور چوتھے جوڑوں کی جیوب التمام، – جم $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی، پہلے اور دوسرے جوڑوں کے زاویوں کے مماس، مس $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی ہیں، اور تیسرے اور چوتھے جوڑوں کے زاویوں کے مماس، – مس $\frac{1}{2}$ ع کے مساوی۔

۵۷ — اب ہم دفعہ ۵۵ کے تین ضابطوں سے علامت کے ابہامات دُور کرینگے۔ تفاعل جب $\frac{1}{2}$ ع مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ ع، ۲ ن ٹ اور (۲ ن + ۱) ٹ کے درمیان یا (۲ ن + ۱) ٹ اور (۲ ن + ۲) ٹ کے درمیان واقع ہو، یعنی بموجب اس کے کہ $\frac{ع}{۲ٹ}$، ۲ ن اور ۲ ن + ۱ یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان واقع ہو۔

اس لئے ہمیں ضابطہ

$$\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ ع} = (-1)^{\text{ف}} \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \text{جم ع})} \quad \cdots\cdots (1)$$

حاصل ہوتا ہے جس میں ف ایسا مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور پر $\frac{ع}{۲ٹ}$ سے عین چھوٹا ہے۔

تفاعل جم $\frac{1}{2}$ ع مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ ع، ۲ ن ٹ – $\frac{1}{2}$ ٹ اور ۲ ن ٹ + $\frac{1}{2}$ ٹ کے درمیان یا ۲ ن ٹ + $\frac{1}{2}$ ٹ

اور ۲ ن π + $\frac{۳}{۲}$ π کے درمیان واقع ہو یعنی بوجب اس کے کہ $\frac{۱}{۲}$ (عہ+π)/π ، ۲ ن اور ۲ ن + ۱ یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان واقع ہو؛ اسلئے

$$\text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = (-۱)^{\text{ق}} \sqrt{\tfrac{۱}{۲}\,(۱ + \text{جم عہ})} \quad \ldots\ldots \quad (۲)$$

جس میں ق وہ صحیح عدد ہے جو $\frac{۱}{۲}$ (عہ + π)/π سے جبری طور پر عین چھوٹا ہے۔
اسی طرح

$$\text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = (-۱)^{\text{ف - ق}} \sqrt{\frac{۱ - \text{جم عہ}}{۱ + \text{جم عہ}}} \quad \ldots\ldots \quad (۳)$$

جس میں عدد ف - ق ہمیشہ یا تو صفر ہے یا ± ۱ -

۵۸ — اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطہ (۴۵) میں ا کی بجائے $\frac{۱}{۲}$ عہ لکھیں تو

$$\text{جب عہ} = ۲\ \text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}\ \text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}$$

اس لئے

$$\text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = \frac{\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}}{\text{جم}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}} = \frac{\text{جب عہ}}{۲\ \text{جم}^{۲}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}} = \frac{۲\ \text{جب}^{۲}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}}{\text{جب عہ}}$$

اس طرح ہمیں حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں :—

$$\text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = \frac{\text{جب عہ}}{۱ + \text{جم عہ}} = \frac{۱ - \text{جم عہ}}{\text{جب عہ}} \quad \ldots\ldots \quad (۴)$$

جن سے مس $\frac{۱}{۲}$ عہ بغیر کسی ابہام کے حاصل ہوتا ہے - ان ضابطوں سے مس $\frac{۱}{۲}$ عہ حاصل ہوگا جبکہ جب عہ اور جم عہ دونوں دئے جائیں؛ اب ضابطہ ۲ ن π + عہ میں وہ سب زاویئے شامل ہیں جن کی جیب اور جیب التمام وہی ہیں جو عہ کی جیب اور جیب التمام ہیں، اس لئے مس $\frac{۱}{۲}$ عہ کے مذکورہ بالا ضابطوں سے جو جب عہ اور جم عہ کی رقوم میں بیان ہوئے ہیں زاویوں ن π + $\frac{۱}{۲}$ عہ میں سے سب زاویوں کے مماس حاصل ہوتے ہیں، اور

(66) یہ تمام زاویے ایک ہی مماس مس $\frac{1}{2}$ عہ رکھتے ہیں، اسی وجہ سے ضوابط (۴) میں علامت کا ابہام نہیں ہے۔

۵۹ — اب ہم جب عہ کی رقوم میں جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کے لئے ضابطے حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$۱ + \text{جب عہ} = ۱ + ۲\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = (\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} + \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ})^2$$

نیز

$$۱ - \text{جب عہ} = ۱ - ۲\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = (\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} - \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ})^2$$

اس لئے

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} + \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = \pm\sqrt{۱ + \text{جب عہ}}$$

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} - \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = \pm\sqrt{۱ - \text{جب عہ}}$$

اس لئے

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = \tfrac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{۱ + \text{جب عہ}} \pm \sqrt{۱ - \text{جب عہ}}\right\},$$

$$\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = \tfrac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{۱ + \text{جب عہ}} \mp \sqrt{۱ - \text{جب عہ}}\right\}$$

مبہم علامتوں میں سے ہر علامت لیجا سکتی ہے؛ اس لئے جب عہ کی رقوم میں جب $\frac{1}{2}$ عہ کی چار قیمتیں ملتی ہیں۔ یہ ضابطے جو جب $\frac{1}{2}$ عہ اور جم $\frac{1}{2}$ عہ کو جب عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ان سے علی الترتیب اُن تمام زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام حاصل ہوتی ہیں جو ضابطہ $\frac{1}{2}$ (ن ۲ + (−۱)$^{\text{ن}}$ عہ) میں شامل ہیں، کیونکہ جیسا کہ ہم نے دفعہ (۴۳) میں بتا دیا ہے اِن زاویوں کی جیوب جو (ن ۲ + (−۱)$^{\text{ن}}$ عہ) میں شامل ہیں جب عہ کے مساوی ہیں۔ زاویوں $\frac{1}{2}$ (ن ۲ + (−۱)$^{\text{ن}}$ عہ) کی جیب اور جیب التمام معلوم کرنے کے لئے ہمیں چار صورتوں پر غور کرنا چاہیئے۔

(۱) اگر ن = ۴ م تو

$$\tfrac{1}{2}(\text{ن}\ ۲ + (-۱)^{\text{ن}}\ \text{عہ}) = ۲\text{م}\ ۲ + \tfrac{1}{2}\ \text{عہ}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب جب $\frac{1}{2}$ عہ اور جم $\frac{1}{2}$ عہ ہے

(۲) اگر ن = ۴م + ۱ تو

$$\tfrac{1}{2}\left(\text{ن}\,\pi + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{عہ}\right) = ۲\text{م}\,\pi + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب جم $\frac{1}{2}$ عہ اور جب $\frac{1}{2}$ عہ ہے۔

(۳) اگر ن = ۴م + ۲ تو

$$\tfrac{1}{2}\left(\text{ن}\,\pi + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{عہ}\right) = ۲\text{م}\,\pi + \pi + \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب − جب $\frac{1}{2}$ عہ اور − جم $\frac{1}{2}$ عہ ہے

(۴) اگر ن = ۴م + ۳ تو

$$\tfrac{1}{2}\left(\text{ن}\,\pi + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{عہ}\right) = (۲\text{م}+۱)\,\pi + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}$$

ان زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب − جم $\frac{1}{2}$ عہ اور − جب $\frac{1}{2}$ عہ کے مساوی ہے۔

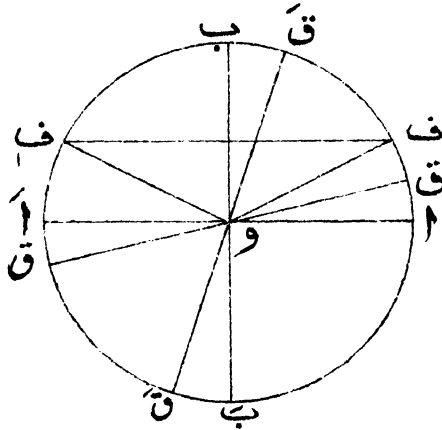
(67) اس طرح جب $\frac{1}{2}$ عہ کے ضابطے سے چار قیمتیں جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، − جب $\frac{1}{2}$ عہ، − جم $\frac{1}{2}$ عہ حاصل ہوتی ہیں اور جم $\frac{1}{2}$ عہ کے ضابطہ سے چار قیمتیں جم $\frac{1}{2}$ عہ، جب $\frac{1}{2}$ عہ، − جم $\frac{1}{2}$ عہ، − جب $\frac{1}{2}$ عہ۔

لا اور ما کی قیمتوں کے وہ چار جٹ جو مساواتوں

$$\left.\begin{aligned}(\text{لا}+\text{ما})^{۲} &= ۱ + \text{جب عہ}\\ (\text{لا}-\text{ما})^{۲} &= ۱ - \text{جب عہ}\end{aligned}\right\}$$

کو پورا کرتے ہیں حسب ذیل ہیں

$$\left.\begin{aligned}\text{لا} &= \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\\ \text{ما} &= \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\end{aligned}\right\}،\quad \left.\begin{aligned}\text{لا} &= \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\\ \text{ما} &= \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\text{لا} &= -\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\\ \text{ما} &= -\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\end{aligned}\right\}،\quad \left.\begin{aligned}\text{لا} &= -\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\\ \text{ما} &= -\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\end{aligned}\right\}$$

۶۰- گزشتہ دفعہ کے ضابطوں کے ابہامات کی ہندسی توضیح حسب سابق ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ف و ا = عہ، فَ و ا = ۲π - عہ تو وہ

زاویے جن کی جیب وہی ہے جو عہ کی ہے ہم اختتامی زاویوں (و ا، و ف)، (و ا، و فَ) کے دو حبٹ ہیں، پس اگر زاویوں ا و ف، ا و فَ کے ناصف ق و ق، قَ و قَ ہوں تو ہم اختتامی زاویوں (و ا، و ق) (و ا، و ق)، (و ا، و قَ)، (و ا، و قَ) کے چار حبٹ وہ زاویے ہونگے جن کی جیب اور جیب التمام ان ضابطوں سے حاصل ہوگی جو جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ کو بیان کرتے ہیں جبکہ جب عہ دیا گیا ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ قَ و ب = $\frac{1}{2}$ عہ اور قَ و ا = $\frac{1}{2}$ (π - عہ)، اس لئے ہم اختتامی زاویوں کے ان چار حبٹوں کی جیوب جب $\frac{1}{2}$ عہ، - جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، - جم $\frac{1}{2}$ عہ ہیں اور ان کی جیوب التمام جم $\frac{1}{2}$ عہ، - جم $\frac{1}{2}$ عہ، جب $\frac{1}{2}$ عہ، - جب $\frac{1}{2}$ عہ ہیں - جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ کی علی الترتیب چار قیمتیں ہیں جو اوپر کے دو ضابطوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

۶۱- چونکہ

جب $\frac{1}{2}$ عہ + جم $\frac{1}{2}$ عہ = $\sqrt{2}$ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ جب $\frac{1}{2}$ عہ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جم $\frac{1}{2}$ عہ)

= $\sqrt{2}$ جب ($\frac{1}{2}$ عہ + $\frac{1}{4}$ ط)

(68) اور اسی طرح

جب $\frac{1}{2}$ عہ − جم $\frac{1}{2}$ عہ = $\sqrt{2}$ جب ($\frac{1}{2}$ عہ − $\frac{1}{4}$ ط)

اس لئے جب $\frac{1}{2}$ عہ + جم $\frac{1}{2}$ عہ مثبت ہے یا منفی بموجب اس کے کہ $\frac{\text{عہ}}{2\text{ط}}$ + $\frac{1}{4}$ ، ۲ ن اور ۲ ن + ۱ کے درمیان واقع ہے یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان۔

اور جب $\frac{1}{2}$ عہ − جم $\frac{1}{2}$ عہ مثبت ہے یا منفی بموجب اس کے کہ $\frac{\text{عہ}}{2\text{ط}}$ − $\frac{1}{4}$ ، ۲ ن اور ۲ ن + ۱ کے درمیان واقع ہے یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان۔

اس لئے

جب $\frac{1}{2}$ عہ + جم $\frac{1}{2}$ عہ = $(-1)^{\text{ف}}\sqrt{1+\text{جب عہ}}$ ،

جب $\frac{1}{2}$ عہ − جم $\frac{1}{2}$ عہ = $(-1)^{\text{ق}}\sqrt{1-\text{جب عہ}}$ ،

جہاں ف مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور پہ $\frac{\text{عہ}}{2\text{ط}}$ + $\frac{1}{4}$ سے عین چھوٹا ہے اور ق وہ صحیح عدد ہے جو جبری طور پہ $\frac{\text{عہ}}{2\text{ط}}$ − $\frac{1}{4}$ سے عین چھوٹا ہے۔ اس طرح ہمیں یہ تین ضابطے ملتے ہیں

جب $\frac{1}{2}$ عہ = $\frac{1}{2}\left\{(-1)^{\text{ف}}\sqrt{1+\text{جب عہ}} + (-1)^{\text{ق}}\sqrt{1-\text{جب عہ}}\right\}$ (۵)

جم $\frac{1}{2}$ عہ = $\frac{1}{2}\left\{(-1)^{\text{ف}}\sqrt{1+\text{جب عہ}} - (-1)^{\text{ق}}\sqrt{1-\text{جب عہ}}\right\}$ (۶)

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = \frac{(-1)^{\text{ف}}\sqrt{1+\text{جب عہ}} + (-1)^{\text{ق}}\sqrt{1-\text{جب عہ}}}{(-1)^{\text{ف}}\sqrt{1+\text{جب عہ}} - (-1)^{\text{ق}}\sqrt{1-\text{جب عہ}}} \quad \text{،..}\ (7)$$

۶۲ — جب $\tfrac{1}{2}$ عہ، جم $\tfrac{1}{2}$ عہ، مس $\tfrac{1}{2}$ عہ کو مس عہ کی رقوم میں بیان کرو۔ چونکہ

$$\text{جب}^2\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \text{جم عہ}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{مس}^2\ \text{عہ}}}\right)\text{،}$$

$$\text{جم}^2\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{مس}^2\ \text{عہ}}}\right)$$

$$\text{اس لئے جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{مس}^2\ \text{عہ}}}\right)}\text{،}$$

$$\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{مس}^2\ \text{عہ}}}\right)}$$

$$\text{اور اس لئے مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = \pm\frac{\sqrt{1+\text{مس}^2\ \text{عہ}} - 1}{\text{مس عہ}}$$

ان میں سے ہر ضابطہ میں علامت کے ابہامات ہیں۔ ہم ان کی بحث کو طالب علم پر چھوڑتے ہیں کیونکہ ان کی توضیح پچھلی صورتوں کی طرح ہوسکتی ہے۔

یہ توجہ طلب ہے کہ مس $\tfrac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں، مس $\tfrac{1}{2}$ عہ کی دو درجی مساوات

$$\text{مس عہ} = \frac{2\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ}}{1 - \text{مس}^2\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ}}$$

(69)

کی اصلیں ہیں، یہ مساوات گزشتہ باب کے ضابطہ (۴۱) میں ا کی بجاے $\tfrac{1}{2}$ عہ رکھنے سے حاصل کی گئی ہے۔

٦٣ — تفاعل جب عہ، جم عہ، مس عہ بغیر ابہام کے مس $\frac{1}{2}$ عہ کی رقوم میں بیان کئے جا سکتے ہیں، کیونکہ وہ تمام زاویے جن کا مماس وہی ہے جو $\frac{1}{2}$ عہ کا ہے ضابطہ ن π + $\frac{1}{2}$ عہ میں شامل ہیں، اور ۲(ن π + $\frac{1}{2}$ عہ) یا ۲ ن π + عہ وہ زاویے ہیں جن کے تمام دائری تفاعل وہی ہیں جو عہ کے ہیں۔ پس

$$\text{جب عہ} = \frac{2\,\text{جب}\,\frac{1}{2}\text{عہ}\ \text{جم}\,\frac{1}{2}\text{عہ}}{\text{جم}^2\,\frac{1}{2}\text{عہ} + \text{جب}^2\,\frac{1}{2}\text{عہ}} = \frac{2\,\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{عہ}}{1 + \text{مس}^2\,\frac{1}{2}\text{عہ}},$$

$$\text{جم عہ} = \frac{\text{جم}^2\,\frac{1}{2}\text{عہ} - \text{جب}^2\,\frac{1}{2}\text{عہ}}{\text{جم}^2\,\frac{1}{2}\text{عہ} + \text{جب}^2\,\frac{1}{2}\text{عہ}} = \frac{1 - \text{مس}^2\,\frac{1}{2}\text{عہ}}{1 + \text{مس}^2\,\frac{1}{2}\text{عہ}}$$

اس لئے نیز

$$\text{مس عہ} = \frac{2\,\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{عہ}}{1 - \text{مس}^2\,\frac{1}{2}\text{عہ}}$$

مثالیں

(۱)۔ اگر ۲ جم طہ = $\sqrt{1 - \text{جب}\,2\,\text{طہ}} - \sqrt{1 + \text{جب}\,2\,\text{طہ}}$ تو ثابت کرو کہ طہ کو

$(8\,\text{ن} + 5)\frac{\pi}{4}$ اور $(8\,\text{ن} + 7)\frac{\pi}{4}$

کے درمیان واقع ہونا چاہئے جن میں ن ایک صحیح عدد ہے۔

(۲)۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}\text{ا}}{\sqrt{1 + \text{جب}\,\text{ا}}} + \frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}\text{ا}}{\sqrt{1 - \text{جب}\,\text{ا}}} = \text{قط}\,\text{ا}$$

جس میں جذور مثبت اعداد کو تعبیر کرتے ہیں بشرطیکہ ا،

$(4\,\text{ن} - \frac{1}{2})\pi$ اور $(4\,\text{ن} + \frac{1}{2})\pi$

کے درمیان واقع ہو جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔ دوسری صورتوں میں علامتیں کیا ہونی چاہئیں۔

(۳)۔ ثابت کرو کہ $\frac{\sqrt{\text{۱ − جب لا}} + \text{۱}}{\sqrt{\text{۱ + جب لا}} - \text{۱}}$ کی چار قیمتیں حسب ذیل ہیں:

مم $\frac{1}{4}$ لا ، مس $\frac{1}{4}$ (π + لا) ، − مس $\frac{1}{4}$ لا ، − مم $\frac{1}{4}$ (π + لا)

(۴)۔ اگر جب ۲ا = و تو ثابت کرو کہ مس ا کی چار قیمتیں جملہ

$\frac{1}{\text{و}}\left\{(\text{۱} + \text{و})^{\frac{1}{2}} - \text{۱}\right\}\left\{\text{۱} + (\text{۱} - \text{و})^{\frac{1}{2}}\right\}$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۵)۔ ضابطہ مس $\frac{1}{2}$ ا = ± $\frac{\sqrt{\text{۱ + مس}^2\text{ ا}} - \text{۱}}{\text{مس ا}}$ میں ثابت کرو کہ مشتبہ علامت کی بجائے $(-1)^{\text{م}}$ رکھنے سے ابہام دور کیا جا سکتا ہے جہاں م، $\frac{\text{ا} + 90^\circ}{180^\circ}$ سے عین چھوٹا ایک صحیح عدد ہے۔

دئے ہوئے زاوئے کے ایک ثلث کے دائری تفاعل

(70)

۶۴ — اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطوں (۳۷)، (۳۸)، (۴۲) میں ا کی بجائے $\frac{1}{3}$ ع درج کریں تو ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں

جب ع = ۳ جب $\frac{1}{3}$ ع − ۴ جب^3 $\frac{1}{3}$ ع ، ... ... (۸)

جم ع = ۴ جم^3 $\frac{1}{3}$ ع − ۳ جم $\frac{1}{3}$ ع ، ... ... (۹)

مس ع = $\frac{\text{۳ مس } \frac{1}{3}\text{ ع − مس}^3 \frac{1}{3}\text{ ع}}{\text{۱ − ۳ مس}^2 \frac{1}{3}\text{ ع}}$ ، ... ... (۱۰)

اس طرح ہمیں ہر صورت میں ایک کعبی مساوات ملتی ہے جس سے $\frac{1}{3}$ ع کے دائری تفاعلوں کو ع کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں معلوم

کیا جاسکتا ہے۔ پس اگر جب عہ دیا گیا ہے تو جب $\frac{1}{3}$ عہ کی تین الگ الگ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، اگر جم عہ دیا گیا ہے تو جم $\frac{1}{3}$ عہ کی تین قیمتیں الگ الگ حاصل ہوتی ہیں اور اگر مس عہ دیا گیا ہے تو مس $\frac{1}{3}$ عہ کی تین الگ الگ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۱) ضابطہ (۸) کی صورت میں جب عہ دیا گیا ہے اور جب $\frac{1}{3}$ عہ کے لئے زاویوں (و ا، و ف)، (و ا، و ف$_1$) میں سے سب کے ایک ثلث کی جیوب کی قیمتیں حاصل ہونگی، کیونکہ زاویہ (و ا، و ف) اور (و ا، و ف$_1$) کی جیب وہی ہے جو عہ کی ہے۔ فرض کرو کہ زاویوں (و ا، و ف) کی تثلیث

کرنے والے خطوط و ق$_1$، و ق$_2$، و ق$_3$ ہیں اور اس طرح زاویہ ق$_1$ و ا $= \frac{1}{3}$ عہ، اور ق$_1$ ق$_2$ ق$_3$ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے اور

ق$_2$ و ا $= \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}$ عہ، ق$_3$ و ا $= \frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}$ عہ

اسی طرح زاویوں (و ا، و ف$_1$) کی تثلیث کرنے والے خطوط و ق$_1$، و ق$_2$، و ق$_3$ ہیں اور اس طرح ق$_1$ ق$_2$ ق$_3$ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے

اور ق$_1$ و ا = $\frac{1}{3}$ (π - عہ) اور ق$_2$ و ا = π - $\frac{1}{3}$ عہ اور ق$_3$ و ا = $\frac{5}{3}$ π - $\frac{1}{3}$ عہ

ہم فوراً یہ دیکھتے ہیں کہ ق ق$_2$، ق$_1$ ق$_2$، ق$_1$ ق$_3$ متوازی ہیں وا کے؛ ہم اختتامی زاویوں (وا، وق$_1$) (وا، وق$_2$) کے دو جٹوں کی جیوب، جب $\frac{1}{3}$ عہ ہیں؛ جٹوں (وا، وق$_2$)، (وا، وق$_1$) کی جیوب، (71)

جب ($\frac{2}{3}$ π + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں؛ اور (وا، وق$_3$) (وا، وق$_3$) کی جیوب،

جب ($\frac{4}{3}$ π + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں۔ اسلئے جب $\frac{1}{3}$ عہ میں جو کعبی مساوات (۸) ہے اسکی تین اصلیں حسب ذیل ہیں:

جب $\frac{1}{3}$ عہ، جب ($\frac{1}{3}$ π - $\frac{1}{3}$ عہ)، اور ـ جب ($\frac{1}{3}$ π + $\frac{1}{3}$ عہ)

(۲) ضابطہ (۹) کی صورت میں وہ زاویے جن کی جیب التمام وہی ہے جو عہ کی ہے (وا، وف) اور (وا، وف$_1$) ہیں۔ فرض کرو کہ زاویوں کے پہلے جٹ کی تثلیث کرنے والے خطوط وق$_1$، وق$_2$، وق$_3$ ہیں جہاں ق$_1$ و ا = $\frac{1}{3}$ عہ اور ق$_1$ ق$_2$ ق$_3$ متساوی الاضلاع مثلث ہے، دوسرے جٹ کی تثلیث کرنے والے خطوط وق$_1$، وق$_2$، وق$_3$ ہیں جہاں ق$_1$ و ا = - $\frac{1}{3}$ عہ اور ق$_1$ ق$_2$ ق$_3$ متساوی اضلاع مثلث ہے۔ ہم فوراً دیکھتے ہیں کہ ق ق$_1$، ق$_2$ ق$_2$

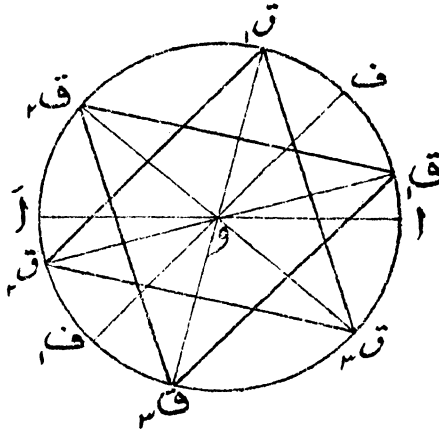
ق۳ ق۲ عمود ہیں وا پر۔ زاویوں (وا، وق۱)، (وا، وق۱) کے دوجٹوں کی جیوب التمام جم $\frac{1}{3}$ عہ ہیں، دوجٹوں (وا، وق۲) (وا، وق۲) کی جیوب التمام جم ($\frac{2}{3}$ ۲ + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں، اور دوجٹوں (وا، وق۳)(وا، وق۳) کی جیوب التمام جم ($\frac{4}{3}$ ۲ + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں۔ اس لئے جم $\frac{1}{3}$ عہ میں جو کعبی مساوات (۹) ہے اس کی تین اصلیں جم $\frac{1}{3}$ عہ، ۔جم ($\frac{1}{3}$ ۲ - $\frac{1}{3}$ عہ) اور ۔جم ($\frac{1}{3}$ ۲ + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں۔

(۳) ضابطہ (۱۰) کی صورت میں وہ زاویے جن کا مماس وہی ہے جو عہ کا ہے (وا، وف) اور (وا، وف۱) ہیں۔ حسب سابق شکل صفحہ ۱۱۱ میں زاویوں کے پہلے جٹ کی تثلیث کرنے والے خطوط وق، وق۱، وق۲ ہیں اور دوسرے جٹ کی تثلیث کرنے والے وق، وق۲، وق۳ ہیں جہاں ق۱ ق۲ ق۳ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے اور ق۱ وا = $\frac{1}{3}$ (۲ + عہ)۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ق۱ و ق۲، ق۲ و ق۳، اور ق۳ و ق۱ دائرے کے قطر ہیں۔ جٹوں (وا، وق۱)، (وا، وق۲) کے مماس مس $\frac{1}{3}$ عہ ہیں؛ (وا، وق۲)، (وا، وق۲) کے مماس مس ($\frac{2}{3}$ ۲ + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں، اور (وا، وق۳)، (وا، وق۱) کے مماس مس ($\frac{4}{3}$ ۲ + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں۔ اس لئے مس $\frac{1}{3}$ عہ کی کعبی مساوات (۱۰) کی اصلیں مس $\frac{1}{3}$ عہ، ۔مس ($\frac{1}{3}$ ۲ - $\frac{1}{3}$ عہ)، مس ($\frac{1}{3}$ ۲ + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں۔

(72) اس دفعہ کے نتیجوں کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں:۔ لا میں کعبی مساوات

۳ لا - ۴ لا^3 = جب عہ

کی اصلیں حسب ذیل ہیں:

کبھی مساوات

جب ⅓ عہ، جب ⅓ (۲π − عہ)، − جب ⅓ (۲π + عہ) ؛

۴ لا۳ − ۳ لا = جم عہ

کی اصلیں ہیں

جم ⅓ عہ، − جم ⅓ (π − عہ)، − جم ⅓ (π + عہ)

اور کبھی مساوات

مس عہ (۱ − ۳ لا۲) = ۳ لا − لا۳

کی اصلیں ہیں

مس ⅓ عہ، − مس ⅓ (π − عہ)، مس ⅓ (π + عہ)

بعض زاویوں کے دائری تفاعلوں کی تعیین

۶۵— اس باب کے ضابطے ایسے زاویوں کے دائری تفاعلوں کو معلوم کرنے میں استعمال کئے جا سکتے ہیں جو اُن زاویوں کے کسری یا تحت ضعفی ہوں جن کے دائری تفاعل معلوم ہیں۔

(۱) چونکہ جب ¼ π = جم ¼ π = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لئے دفعہ ۵۷ کے ضابطوں (۱) اور (۲) کی رو سے

جب $\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$، جم $\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$،

جب $\frac{1}{16}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$، جم $\frac{1}{16}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

اور اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے ہم جب $\frac{1}{2^n}\pi$ اور جم $\frac{1}{2^n}\pi$ کو محسوب کر سکتے ہیں۔

(۲) چونکہ جب $\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$، جم $\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

اس لئے ضابطوں (۵) اور (۶) کی رو سے

جب $\frac{1}{12}\pi = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$، جم $\frac{1}{12}\pi = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

یہ قیمتیں جب 15°، جم 15° کے لئے دفعہ ۴۴ میں حاصل کی ہوئی قیمتوں کے مطابق ہیں۔ پس عمل کو اسی طرح جاری رکھنے سے ہم تمام زاویوں $\frac{\pi}{2^n \times 3}$ کی جیوب اور جیوب التمام محسوب کر سکتے ہیں۔

(73)

(۳) — چونکہ جب $\frac{1}{5}\pi = 2$ جب $\frac{1}{10}\pi$ جم $\frac{1}{10}\pi$

اور جب $\frac{2}{5}\pi = 2$ جب $\frac{1}{5}\pi$ جم $\frac{1}{5}\pi$

اس لئے جب $\frac{1}{5}\pi$ جب $\frac{2}{5}\pi = 4$ جب $\frac{1}{5}\pi$ جم $\frac{1}{5}\pi$ جب $\frac{1}{10}\pi$ جم $\frac{1}{10}\pi$؛

اب چونکہ جب $\frac{2}{5}\pi =$ جم $\frac{1}{10}\pi$،

اس لئے 4 جم $\frac{1}{5}\pi$ جب $\frac{1}{10}\pi = 1$،

یا جب $\frac{3}{10}\pi -$ جب $\frac{1}{10}\pi = \frac{1}{2}$،

یعنی جم $\frac{1}{5}\pi -$ جب $\frac{1}{10}\pi = \frac{1}{2}$،

نیز $\left(\text{جم}\ \frac{۱}{۵}\pi + \text{جب}\ \frac{۱}{۱۰}\pi\right)^۲ = \frac{۱}{۴} + ۱ = \frac{۵}{۴}$ ؛

اس لیے $\text{جم}\ \frac{۱}{۵}\pi + \text{جب}\ \frac{۱}{۱۰}\pi = \frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$

یا $\text{جب}\ \frac{۱}{۱۰}\pi = \frac{۱}{۴}(\sqrt{۵} - ۱)$، $\text{جم}\ \frac{۱}{۵}\pi = \frac{۱}{۴}(\sqrt{۵} + ۱)$

اور اس لیے $\text{جم}\ \frac{۱}{۱۰}\pi = \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}$، $\text{جب}\ \frac{۱}{۵}\pi = \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}$ ؛

یہ قیمتیں دفعہ ۳۴ میں دی ہوئی قیمتوں کے مطابق ہیں ۔

یہ امر توجہ طلب ہے کہ اگر ع کوئی زاویہ ہو جس کی جیب اور جیب التمام معلوم ہے اور م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو شکل $\frac{م ع}{ن}$ کے تمام زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام ایسی شکل میں معلوم کی جا سکتی ہیں جس میں صرف جذروں کے نکالنے کا عمل شامل ہوتا ہے، کیونکہ ہم نے یہ دکھا دیا ہے کہ شکل $\frac{ع}{۲^ن}$ کے تمام زاویوں کے دائری تفاعل کس طرح معلوم کیے جا سکتے ہیں اور جب یہ معلوم ہو جائیں تو گزشتہ باب کے ضابطوں کی مدد سے جب $\frac{م ع}{۲^ن}$ اور جم $\frac{م ع}{۲^ن}$ معلوم کیے جا سکتے ہیں ۔

۶۶ - اب ہم ۳° سے شروع کر کے ۹۰° تک اُن تمام زاویوں کے دائری تفاعل معلوم کر سکتے ہیں جن کا فرق ۳° یا $\frac{\pi}{۶۰}$ ہے۔ چنانچہ

$$\text{جب}\ ۳^\circ = \text{جب}\ (۱۸^\circ - ۱۵^\circ)$$

$$= \text{جب}\ ۱۸^\circ\ \text{جم}\ ۱۵^\circ - \text{جم}\ ۱۸^\circ\ \text{جب}\ ۱۵^\circ$$

$$= \frac{۱}{۱۶}(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})(\sqrt{۵} - ۱) - \frac{۱}{۸}(\sqrt{۳} - ۱)\sqrt{۵ + \sqrt{۵}}$$

اسی طرح $\text{جم}\ ۳^\circ = \frac{۱}{۸}(\sqrt{۳} + ۱)\sqrt{۵ + \sqrt{۵}} + \frac{۱}{۱۶}(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})(\sqrt{۵} - ۱)$

نیز چونکہ

$۶^\circ = ۳۶^\circ - ۳۰^\circ$ ، $۹^\circ = ۴۵^\circ - ۳۶^\circ$ ، $۱۲^\circ = ۳۰^\circ - ۱۸^\circ$ ،

۲۱° = ۳۶° − ۱۵°، ۲۴° = ۴۵° − ۲۱°، ۲۷° = ۳۰° − ۳°،

۳۳° = ۴۵° − ۱۲°، ۳۹° = ۴۵° − ۶°، ۴۲° = ۴۵° − ۳°،

اس لیے ہم زاویوں ۳°، ۶°، ...، ۴۵° کی جیوب التمام محسوب کر سکتے ہیں ۔ اِس سے آگے بڑھنا غیر ضروری ہے کیونکہ ۴۵° سے بڑے کسی زاویے کی جیب یا جیب التمام اس کے متمم کی جیب التمام یا جیب کے مساوی ہوتی ہے اور یہ متمم زاویہ ۴۵° سے کم ہوتا ہے۔ محسوب کردہ نتیجوں کی فہرست جدول ذیل میں دی گئی ہے۔

(74)

جیب

زاویہ	جیب
$3^\circ = \frac{1}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right\}$
$6^\circ = \frac{1}{30}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1\right)$
$9^\circ = \frac{1}{20}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2} - 2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$
$12^\circ = \frac{1}{15}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)$
$15^\circ = \frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$
$18^\circ = \frac{1}{10}\pi$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$
$21^\circ = \frac{7}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}} - (\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\right\}$
$24^\circ = \frac{2}{15}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$
$27^\circ = \frac{3}{20}\pi$	$\frac{1}{8}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{10} + \sqrt{2}\right)$
$30^\circ = \frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$
$33^\circ = \frac{11}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right\}$

زاویہ	جیب
$36^\circ = \frac{1}{5}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
$39^\circ = \frac{13}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$
$42^\circ = \frac{7}{30}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$
$45^\circ = \frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$48^\circ = \frac{4}{15}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)$
$51^\circ = \frac{17}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\right\}$
$54^\circ = \frac{3}{10}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
$57^\circ = \frac{19}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right\}$
$60^\circ = \frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$63^\circ = \frac{7}{20}\pi$	$\frac{1}{8}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$
$66^\circ = \frac{11}{30}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right)$
$69^\circ = \frac{23}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$
$72^\circ = \frac{2}{5}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$75^\circ = \frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$78^\circ = \frac{13}{30}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)$
$81^\circ = \frac{9}{20}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$
$84^\circ = \frac{7}{15}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\right)$
$87^\circ = \frac{29}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right\}$
$90^\circ = \frac{1}{2}\pi$	1

اس جدول میں زاویوں ۳°، ۶°، ....، ۹۰° کی جیوب دی گئی ہیں:

(75)

اور متمم زاویوں کی جیوب لینے سے جیوب التمام معلوم ہو سکتی ہیں - اوپر کے جملوں میں جو اعداد مجذور ہیں اُن کی قیمتیں اعشاریہ کے ۲۴ مقامات تک مسطر ہیں - گرے نے (میسنجر آف میتھیماٹکس جلد ششم) میں دی ہیں - ہٹن کی جدولوں میں ان کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۰ مقامات تک دی گئی ہیں - مکمل جدول جس میں ان زاویوں کے مماس قاطع، قاطع التمام منطق نسب نما والی کسروں کی شکل میں درج ہیں گیلن (Gelin) کی کتاب ٹرگنومیٹری میں ملے گی -

پانچویں باب پر مثالیں

اشلہ ۱ تا ۸ کے رشتے ثابت کرو جن میں ا + ب + ج = ۱۸۰°

(۱) مس ۱/۲ ا / مس ۱/۲ ج = (۱ - جم ا + جم ب + جم ج) / (۱ - جم ج + جم ا + جم ب)

(۲) جب (ا - ب) جب (ا - ج) + جب (ب - ج) جب (ب - ا) + جب (ج - ا) جب (ج - ب) = ۲ جم ۱/۲ (ب - ج) جم ۱/۲ (ج - ا) × جم ۱/۲ (ا - ب)
- ۲ جب ۳/۲ ا جب ۳/۲ ب جب ۳/۲ ج

(۳) جم^۴ ۱/۲ ا + جم^۴ ۱/۲ ب + جم^۴ ۱/۲ ج + ۲ جم ا جم^۲ ۱/۲ ب جم^۲ ۱/۲ ج
+ ۲ جم ب جم^۲ ۱/۲ ج جم^۲ ۱/۲ ا + ۲ جم ج جم^۲ ۱/۲ ا جم^۲ ۱/۲ ب
= ۸ جم^۲ ۱/۲ ا جم^۲ ۱/۲ ب جم^۲ ۱/۲ ج

(۴) Σ جب^۳ ا = ۳ جم ۱/۲ ا جم ۱/۲ ب جم ۱/۲ ج + جم ۳/۲ ا جم ۳/۲ ب جم ۳/۲ ج

(۵) Σ قم ا (ا + مم ب مم ج)
= قم ا قم ب قم ج {۴ جم ۱/۲ (ب - ج) جم ۱/۲ (ج - ا) جم ۱/۲ (ا - ب) - ۱}

(۶) ثابت کرو قم ۱ (۱ - مم ب مم ج)
= ½ قط ½ ۱ قط ½ ب قط ½ ج + قم ۱ قم ب قم ج

(۷) ثابت کرو جب ۲ ۱ جب (ب - ج)
= ۱۶ جم ½ ۱ جم ½ ب جم ½ ج جب ½ (ب - ج) جب ½ (ج - ۱) جب ½ (۱ - ب)

(۸) (جم ½ ۱ - جب ½ ب + جب ½ ج) / (جم ½ ب + جب ½ ج - جب ½ ۱) = (۱ + مس ¼ ۱) / (۱ + مس ¼ ب)

(۹) ثابت کرو متماثلہ
جب ½ (ب - ج) / جب ½ (ب + ج) + جب ½ (ج - ۱) / جب ½ (ج + ۱) + جب ½ (۱ - ب) / جب ½ (۱ + ب)
+ جب ½ (ب - ج) جب ½ (ج - ۱) جب ½ (۱ - ب) / جب ½ (ب + ج) جب ½ (ج + ۱) جب ½ (۱ + ب) = ۰

(۱۰) اگر ۱ + ب + ج = °۳۶۰ اور اگر
جم ۱ = (د - ۱)(ب - ج) / (د + ۱)(ب + ج)، جم ب = (د - ب)(ج - ۱) / (د + ب)(ج + ۱)، جم ج = (د - ج)(۱ - ب) / (د + ج)(۱ + ب)
تو
مس ½ ۱ + مس ½ ب + مس ½ ج = ± ۱

(۱۱) ثابت کرو کہ
مس ½ (لا + ما) مس ½ (لا - ما) = (قم ۲ لا قم ما - قم ۲ ما قم لا) / (قم ۲ لا قم ما + قم ۲ ما قم لا)

(۱۲) اگر مم ½ عہ + مم ½ ہ = ۲ مم طہ تو ثابت کرو کہ

{۱ - ۲ قط طہ جم (عہ - طہ) + قط² طہ} {۱ - ۲ قط طہ جم (ہ - طہ) + قط² طہ} = مس⁴ طہ

(۱۳) اگر ا + ب + ج + د = ۳۶۰° تو ثابت کرو کہ

جم $\frac{1}{2}$ ا جم $\frac{1}{2}$ د جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج - جم $\frac{1}{2}$ ب جم $\frac{1}{2}$ ج جب $\frac{1}{2}$ ا جب $\frac{1}{2}$ د

= جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب) جب $\frac{1}{2}$ (ا + ج) جم $\frac{1}{2}$ (ا + د)

(۱۴) ثابت کرو کہ

جب^{2} $\frac{1}{2}$ (ب - ج) + جب^{2} $\frac{1}{2}$ (ج - ا) جب^{2} $\frac{1}{2}$ (ا - ب)

+ ۲ جم $\frac{1}{2}$ (ب - ج) جم $\frac{1}{2}$ (ج - ا) جم $\frac{1}{2}$ (ا - ب) = ۲

(۱۵) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب(ما - ی) + جب(ی - لا) + جب(لا - ما)}}{\text{۱ + جم(ما - ی) + جم(ی - لا) + جم(لا - ما)}}$$

= - مس $\frac{1}{2}$ (ما - ی) مس $\frac{1}{2}$ (ی - لا) مس $\frac{1}{2}$ (لا - ما)

(۱۶) دریافت کرو کہ عہ، بہ، جہ میں کیا رشتہ ہونا چاہیئے کہ

جم عہ + جم بہ + جم جہ = ۱ + ۴ جب $\frac{1}{2}$ عہ جب $\frac{1}{2}$ بہ جب $\frac{1}{2}$ جہ

(۱۷) اگر ا + ب + ج + د = ۳۶۰° تو ثابت کرو کہ

جم(ب + ج + د) + جم(ج + د + ا) + جم(د + ا + ب) + جم(ا + ب + ج)

= - ۴ جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب) جم $\frac{1}{2}$ (ا + ج) جم $\frac{1}{2}$ (ا + د)

(۱۸) اگر مس $\frac{1}{2}$ طہ = مس^{3} $\frac{1}{2}$ فہ اور مس فہ = ۲ مس عہ

تو ثابت کرو کہ طہ + فہ = ۲ عہ

(۱۹) اگر جب^{2} سہ = $\frac{\text{جب س جب (س - طہ) جب (س - فہ) جب (س - پہ)}}{\text{۴ جم}^{2}\ \frac{1}{2}\ \text{طہ جم}^{2}\ \frac{1}{2}\ \text{فہ جم}^{2}\ \frac{1}{2}\ \text{پہ}}$

تو ثابت کرو کہ

مس^{2} $\frac{1}{2}$ سہ = مس $\frac{1}{2}$ س مس $\frac{1}{2}$ (س - طہ) مس $\frac{1}{2}$ (س - فہ) مس $\frac{1}{2}$ (س - پہ)

جہاں ۲ س = ط + فہ + بہ

(۲۰) اگر ا + ب + ج + د = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جب ا + جب ب + جب ج - جب د

= ۴ جم $\frac{1}{2}$ (ا + د) جم $\frac{1}{2}$ (ب + د) جم $\frac{1}{2}$ (ج + د)

(۲۱) اگر عہ + بہ + جہ = ۲ π تو ثابت کرو کہ

جب بہ (۱ + ۲ جم جہ) + جب جہ (۱ + ۲ جم عہ) + جب عہ (۱ + ۲ جم بہ)

= ۴ جب $\frac{1}{2}$ (جہ - بہ) جب $\frac{1}{2}$ (عہ - جہ) جب $\frac{1}{2}$ (بہ - عہ)

(۲۲) اگر ۲ س = ا + ب + ج تو ثابت کرو کہ

جم $\frac{1}{2}$ س جم $\frac{1}{2}$ (س - ا) جم $\frac{1}{2}$ (س - ب) جم $\frac{1}{2}$ (س - ج)

+ جب $\frac{1}{2}$ س جب $\frac{1}{2}$ (س - ا) جب $\frac{1}{2}$ (س - ب) جب $\frac{1}{2}$ (س - ج)

= جم $\frac{1}{2}$ ا جم $\frac{1}{2}$ ب جم $\frac{1}{2}$ ج

(۲۳) اگر عہ + بہ + جہ = $\frac{1}{2}\pi$ تو

(۱ - مس $\frac{1}{2}$ عہ) (۱ - مس $\frac{1}{2}$ بہ) (۱ - مس $\frac{1}{2}$ جہ) ÷ (۱ + مس $\frac{1}{2}$ عہ) (۱ + مس $\frac{1}{2}$ بہ) (۱ + مس $\frac{1}{2}$ جہ) = (جب عہ + جب بہ + جب جہ - ۱) ÷ (جم عہ + جم بہ + جم جہ)

(۲۴) اگر عہ + بہ + جہ = π تو ثابت کرو کہ

جم ($\frac{3}{2}$ بہ + جہ - ۲ عہ) + جم ($\frac{3}{2}$ جہ + عہ - ۲ بہ) + جم ($\frac{3}{2}$ عہ + بہ - ۲ جہ)

= ۴ جم $\frac{1}{4}$ (۵ عہ - ۲ بہ - جہ) جم $\frac{1}{4}$ (۵ بہ - ۲ جہ - عہ) جم $\frac{1}{4}$ (۵ جہ - ۲ عہ - بہ)

(۲۵) اگر جم^2 ط = جم عہ ÷ جم بہ ، جم^2 طَ = جم عَہ ÷ جم بہ

اور　مس ط ÷ مس طَ = مس عہ ÷ مس عَہ

تو ثابت کرو کہ　مس $\frac{1}{2}$ عہ مس $\frac{1}{2}$ عَہ = ± مس $\frac{1}{2}$ بہ

(77)

(۲۶) اگر جم عہ = جم بہ جم فہ = جم بَہ جم فَہ اور جب عہ = ۲ جب $\frac{۱}{۲}$ فہ جب $\frac{۱}{۲}$ فَہ تو ثابت کرو کہ $\pm$ مس $\frac{۱}{۲}$ عہ = مس $\frac{۱}{۲}$ بہ مس $\frac{۱}{۲}$ بَہ

(۲۷) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° اور مس $\frac{۳}{۴}$ ا مس $\frac{۳}{۴}$ ب = مس $\frac{۳}{۴}$ ج تو ثابت کرو کہ

مس $\frac{۳}{۴}$ ا + مس $\frac{۳}{۴}$ ب + مس $\frac{۳}{۴}$ ج = مم $\frac{۳}{۴}$ ا + مم $\frac{۳}{۴}$ ب + مم $\frac{۳}{۴}$ ج

(۲۸) اگر مس $\frac{۱}{۲}$ (ما + ی) + مس $\frac{۱}{۲}$ (ی + لا) + مس $\frac{۱}{۲}$ (لا + ما) = ۰
تو ثابت کرو کہ جب لا + جب ما + جب ی + ۳ جب (لا + ما + ی) = ۰

(۲۹) ثابت کرو کہ

جم عہ جب $\frac{۱}{۲}$ (طہ + عہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (بہ − جہ) + جم بہ جب $\frac{۱}{۲}$ (طہ + بہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (جہ − عہ)
+ جم جہ جب $\frac{۱}{۲}$ (طہ + جہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (عہ − بہ)
= ۲ جب $\frac{۱}{۲}$ (بہ − جہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (جہ − عہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (عہ − بہ) جب $\frac{۱}{۲}$ (عہ + بہ + جہ + طہ)

(۳۰) حل کرو مساواتیں

مس $\frac{۱}{۲}$ عہ + مس $\frac{۱}{۲}$ بہ = $\frac{۱}{۳}$

مس عہ + مس بہ = $\frac{۳}{۴}$

(۳۱) اگر $\frac{\text{جب (فہ + عہ) جب (فہ − عہ)}}{\text{جب}\left(\frac{\text{عہ + بہ}}{۲} + ۲\ \text{طہ}\right)}$ = $\frac{\text{جب (فہ + بہ) جب (فہ − بہ)}}{\text{جب}\left(\frac{\text{عہ + بہ}}{۲} - ۲\ \text{طہ}\right)}$ = جب $\frac{۱}{۲}$ (بہ − عہ)

تو ثابت کرو کہ جم^۲ $\frac{۱}{۲}$ عہ + جم^۲ $\frac{۱}{۲}$ جہ − جم^۲ طہ = $\frac{۱}{۲}$

(۳۲) اگر مس ($\frac{۱}{۴}$ π + $\frac{۱}{۲}$ طہ) = مس^۵ ($\frac{۱}{۴}$ π + $\frac{۱}{۲}$ فہ) تو ثابت کرو کہ

جب طہ = ۵ جب فہ $\frac{\text{(۱ + عہ}^۲\text{ جب}^۲\text{ فہ) (۱ + بہ}^۲\text{ جب}^۲\text{ فہ)}}{\text{(۱ + عَہ}^۲\text{ جب}^۲\text{ فہ) (۱ + بَہ}^۲\text{ جب}^۲\text{ فہ)}}$

اور عہ، بہ معلوم کرو۔

(٣٣) اگر عہ + بہ + جہ = π تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\left(\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{بہ}\ \text{مس}\tfrac{1}{2}\text{جہ}\right)+\text{مس}^{-1}\left(\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{جہ}\ \text{مس}\tfrac{1}{2}\text{عہ}\right)+\text{مس}^{-1}\left(\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{عہ}\ \text{مس}\tfrac{1}{2}\text{بہ}\right)$$

$$=\text{مس}^{-1}\left\{1+\frac{8\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{عہ}\ \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{بہ}\ \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{جہ}}{\text{جب}^2\text{عہ}+\text{جب}^2\text{بہ}+\text{جب}^2\text{جہ}}\right\}$$

(٣٤) ثابت کرو کہ تین مقداروں

$$\frac{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{جہ}-\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{بہ}}{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{بہ}\ \text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{جہ}+\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{بہ}\ \text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{جہ}},\quad \frac{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{عہ}-\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{جہ}}{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{عہ}\ \text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{جہ}+\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{جہ}\ \text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{عہ}}$$

$$\frac{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{بہ}-\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{عہ}}{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{بہ}\ \text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{عہ}+\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{بہ}\ \text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{عہ}}$$

کا حاصل جمع ان کے مسلسل حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

(٣٥) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{بہ}+\text{جہ})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{بہ}-\text{جہ})}+\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{جہ}+\text{عہ})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{جہ}-\text{عہ})}+\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}$$

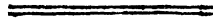
$$-\frac{3\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{بہ}+\text{جہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{جہ}+\text{عہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{بہ}-\text{جہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{جہ}-\text{عہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}$$

$$=\frac{\text{جم عہ}\ \text{جم بہ}\ \text{جم جہ}-\text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{بہ}-\text{جہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{جہ}-\text{عہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}$$

(٣٦) اگر

$$\frac{\text{جم عہ}+\text{جم بہ}+\text{جم جہ}}{\text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ})}=\frac{\text{جب عہ}+\text{جب بہ}+\text{جب جہ}}{\text{جب}(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ})}$$

تو ثابت کرو کہ ہر کسر
جم (به + جه) + جم (جه + عه) + جم (عه + به)
کے مساوی ہے اور نیز
{مس عه - مس $\frac{1}{2}$ (به + جه)} / {مس عه + مس $\frac{1}{2}$ (به + جه)}
کے مساوی ہے۔

(78)

چھٹا باب

مختلف مسئلے

۶۷ - اس باب میں ہم اُن جملوں کو مستحیل کرنے کی مختلف مثالیں دینگے جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں۔ اِن میں سے بعض مسئلے خود دلچسپ ہیں اور باقی دوسرے اُن طریقوں کی خاطر دیے گئے ہیں جو انھیں ثابت کرنے میں استعمال ہوئے ہیں۔ اِن جملوں کو جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں مستحیل کرنے میں مہارت صرف بہت مشق سے ہی پیدا ہو سکتی ہے، تاہم اُن طریقوں کا احتیاط سے مطالعہ کرنے سے جو ہم نے مختلف صورتوں میں استعمال کیے ہیں طالب علم کو اس قسم کے تفاعلوں کے برتنے کی قابلیت حاصل کرنے میں بہت مدد ملے گی۔

متماثلات اور استحالات

۶۸ - مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ

جب ۲ عہ جب (بہ - جہ) + جب ۲ بہ جب (جہ - عہ) + جب ۲ جہ جب (عہ - بہ)

= {جب (بہ + جہ) + جب (جہ + عہ) + جب (عہ + بہ)} ×

{جب (جہ - بہ) + جب (بہ - عہ) + جب (عہ - جہ)}

اس مساوات کی بائیں جانب جو اجزائے ضربی ہیں وہ علی الترتیب دو مقداروں جب جہ جم بہ + جب عہ جم جہ + جب بہ جم عہ اور جم جہ جب بہ + جم عہ جب جہ + جم بہ جب عہ کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کے مساوی ہیں؛ اس لیے ان اجزائے ضربی کا حاصل ضرب

(جب جہ جم بہ + جب بہ جم عہ + جب عہ جم جہ)^2 - (جم جہ جب بہ + جم بہ جب عہ + جم عہ جب جہ)^2

کے مساوی ہے۔ اب چونکہ جب^2 جہ جم^2 بہ - جم^2 جہ جب^2 بہ = جب^2 جہ - جب^2 بہ

اس لیے مربع ارقام کا جبری مجموعہ صفر ہے؛ باقی رقمیں

= ۲ جب عہ جم عہ (جب بہ جم جہ - جم بہ جب جہ) + ۲ جب بہ جم بہ (جب جہ جم عہ - جم جہ جب عہ)

+ ۲ جب جہ جم جہ (جب عہ جم بہ - جم عہ جب بہ)

= جب ۲ عہ جب (بہ - جہ) + جب ۲ بہ جب (جہ - عہ) + جب ۲ جہ جب (عہ - بہ)؛

اس طرح متماثلہ

$\sum$ جب ۲ عہ جب (بہ - جہ) = $\sum$ جب (بہ + جہ) $\sum$ جب (جہ - بہ)

ثابت ہو چکی۔

(79) (۲) پچھلی مثال میں عہ، بہ، جہ کی بجائے علی الترتیب $\frac{1}{4}\pi$ + عہ، $\frac{1}{4}\pi$ + بہ، $\frac{1}{4}\pi$ + جہ رکھو تو متماثلہ ذیل حاصل ہو گی :-

$\sum$ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) = $\sum$ جم (بہ + جہ) $\sum$ جب (جہ - بہ)

(۳) ثابت کرو کہ

$\sum$ جب^3 عہ جب (بہ - جہ) = - جب (عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

اس صورت میں بہت سی دیگر صورتوں کی طرح ہم مساوات کی دائیں جانب کی مقداروں جب^3 عہ، جب^3 بہ کی بجائے ان کے مماثل ضعفی زاویوں کی جیوب کی رقوم میں جو جملے ہیں اُن کو رکھتے ہیں؛ تب دائیں جانب کا جملہ

ہو جاتا ہے

$\frac{۳}{۴}$ ∑ جب عہ جب (بہ - جہ) - $\frac{۱}{۴}$ ∑ جب ۳ عہ جب (بہ - جہ)

یا - $\frac{۱}{۴}$ ∑ جب ۳ عہ جب (بہ - جہ)، بموجب مثال (۳) دفعہ ۴۵ -

اب ہم جیوب کے حاصل ضربوں کی بجائے جیوب التمام کے فرق رکھتے ہیں تو جملہ ہو جاتا ہے

$\frac{۱}{۸}$ { جم (۳ عہ + بہ - جہ) - جم (۳ عہ - بہ + جہ) + جم (۲ بہ + جہ - عہ)

- جم (۳ بہ - جہ + عہ) + جم (۳ جہ + عہ - بہ) - جم (۳ جہ - عہ + بہ) }

اور خطوط وحدانی کے اندر پہلی اور آخری رقموں کا مجموعہ ہے

۲ جب ۲ (جہ - عہ) جب (عہ + بہ + جہ)

اسی طرح دوسری اور تیسری رقموں، چوتھی اور پانچویں رقموں کو ایک ساتھ لینے سے جملہ بالا ہو جاتا ہے

- $\frac{۱}{۴}$ جب (عہ + بہ + جہ) ∑ جب ۲ (جہ - عہ)

یا　- جب (عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

بموجب مثال (۳) دفعہ ۴۷ -

(۴) ثابت کرو کہ

∑ جم^{۳} عہ جب (بہ - جہ) = جم (عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

(۵) ثابت کرو کہ

∑ جب^{۳} عہ جب^{۳} (بہ - جہ) = ۳ جب عہ جب بہ جب جہ جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

مطلوبہ نتیجہ اس امر واقعہ سے مستنبط ہوگا کہ لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} - ۳ لا ما ی کا ایک جزو ضربی لا + ما + ی ہے -

رکھو لا = جب عہ جب (بہ - جہ)، ما = جب بہ جب (جہ - عہ)، ی = جب جہ جب (عہ - بہ)

تو لا + ما + ی = ۰

(۶) ثابت کرو کہ

جب (عہ + بہ) جب (عہ - بہ) جب (جہ + ضہ) جب (جہ - ضہ) + جب (بہ + جہ) جب (بہ - جہ)

× جب (عہ + ضہ) جب (عہ - ضہ) + جب (جہ + عہ) جب (جہ - عہ) جب (بہ + ضہ) جب (بہ - ضہ) = ۰

جملہ (لا^2 - ما^2) (ی^2 - د^2) + (ما^2 - ی^2) (لا^2 - د^2) + (ی^2 - لا^2) (ما^2 - د^2)

متماثلاً صفر ہوتا ہے۔ پس رکھو لا = جب عہ، ما = جب بہ، ی = جب جہ، د = جب ضہ

تو چونکہ

جب^2 عہ - جب^2 بہ = جب (عہ + بہ) جب (عہ - بہ)

اس لیے مسئلہ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ

۲ (جم بہ جم جہ - جم عہ) (جم جہ جم عہ - جم بہ) (جم عہ جم بہ - جم جہ) +

جب^2 عہ جب^2 بہ جب^2 جہ - جب^2 عہ (جم بہ جم جہ - جم عہ)^2 - جب^2 بہ (جم جہ جم عہ - جم بہ)^2

- جب^2 جہ (جم عہ جم بہ - جم جہ)^2 = (۱ - جم^2 عہ - جم^2 بہ - جم^2 جہ + ۲ جم عہ جم بہ جم جہ)^2 (80)

یہ مسئلہ اخذ ہوتا ہے اس مشہور مسئلہ سے کہ مقطع

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

کا مربع

=

ب ج - ف^2	ف گ - ج ھ	ف ھ - ب گ
ف گ - ج ھ	ج ا - گ^2	گ ھ - ا ف
ف ھ - ب گ	گ ھ - ا ف	ا ب - ھ^2

رکھو ا = ب = ج = ۱، ف = جم عہ، گ = جم بہ، ھ = جم جہ تو

ب ج - ف^2 = جب^2 عہ، وغیرہ

پھر مقطع کو پھیلاؤ تو مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوگا۔

(۸) ثابت کرو کہ

جم ۲ عہ مم $\frac{1}{2}$ (جہ - عہ) مم $\frac{1}{2}$ (عہ - بہ) + جم ۲ بہ مم $\frac{1}{2}$ (عہ - بہ) مم $\frac{1}{2}$ (بہ - جہ)

+ جم ۲ جہ مم $\frac{1}{2}$ (بہ - جہ) مم $\frac{1}{2}$ (جہ - عہ)

= جم ۲ عہ + جم ۲ بہ + جم ۲ جہ + ۲ جم (بہ + جہ) + ۲ جم (جہ + عہ) + ۲ جم (عہ + بہ)

ضابطہ مم $\frac{1}{2}$ ط = $\frac{\text{۱ + جم ط}}{\text{جب ط}}$ کے ذریعہ دائیں جانب کے ہر مماس التمام کو تبدیل کرو اور پھر پورے جملہ کا مشترک نسب نما جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) بناؤ تو شمار کنندہ ہو جاتا ہے

Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) {۱ + جم (جہ - عہ)} {۱ + جم (عہ - بہ)}

یا　Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) + Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) جم (جہ - عہ) جم (عہ - بہ)

+ Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) {جم (جہ - عہ) + جم (عہ - بہ)}

یا　{۱ + Σ جم (بہ - جہ)} Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) - $\frac{1}{2}$ Σ جم ۲ عہ جب ۲ (بہ - جہ)

+ Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) جم (جہ - عہ) جم (عہ - بہ)

اب　۱ + Σ جم (بہ - جہ) = ۴ جم $\frac{1}{2}$ (بہ - جہ) جم $\frac{1}{2}$ (جہ - عہ) جم $\frac{1}{2}$ (عہ - بہ)

بموجب مثال ۴ دفعہ ۷۴؛

اور　Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) = Σ جم (بہ + جہ) Σ جب (جہ - بہ)

= ۴ جب $\frac{1}{2}$ (بہ - جہ) جب $\frac{1}{2}$ (جہ - عہ) جب $\frac{1}{2}$ (عہ - بہ) Σ جم (بہ + جہ)

نیز　Σ جم ۲ عہ جب ۲ (بہ - جہ) = ۰

اور Σ جم ۲عہ جب (بہ - جہ) جم (جہ - عہ) جم (عہ - بہ) = ۱/۴ Σ جم ۲عہ {جب ۲ (بہ - جہ)
- جب ۲ (جہ - عہ) - جب ۲ (عہ - بہ)}

= ۱/۲ Σ جم ۲ عہ جب ۲ (بہ - جہ) - ۱/۴ Σ جم ۲ عہ Σ جب ۲ (بہ - جہ)

= جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) Σ جم ۲ عہ

پس مذکورہ بالا اشبار کنندہ

= جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) {۲ Σ جم (بہ + جہ) + Σ جم ۲ عہ}؛

اسلئے یہ جملہ = ۲ Σ جم (بہ + جہ) + Σ جم ۲ عہ

(۹) اگر

عہ + بہ + جہ = π، اور مس ۱/۴ (بہ + جہ - عہ) مس ۱/۴ (جہ + عہ - بہ) مس ۱/۴ (عہ + بہ - جہ) = ۱

تو ثابت کرو کہ ۱ + جم عہ + جم بہ + جم جہ = ۰

دی ہوئی مساوات کا مربع لینے سے،

جب² (۱/۴ π - ۱/۲ عہ) جب² (۱/۴ π - ۱/۲ بہ) جب² (۱/۴ π - ۱/۲ جہ)

= جم² (۱/۴ π - ۱/۲ عہ) جم² (۱/۴ π - ۱/۲ بہ) جم² (۱/۴ π - ۱/۲ جہ)

یا (۱ - جب عہ) (۱ - جب بہ) (۱ - جب جہ) = (۱ + جب عہ) (۱ + جب بہ) (۱ + جب جہ)

(81) پس جب عہ + جب بہ + جب جہ + جب عہ جب بہ جب جہ = ۰،

یا ۴ جم ۱/۲ عہ جم ۱/۲ بہ جم ۱/۲ جہ + جب عہ جب بہ جب جہ = ۰؛

اس لیے ۱ + ۲ جب ۱/۲ عہ جب ۱/۲ بہ جب ۱/۲ جہ = ۰،

نیز جم عہ + جم بہ + جم جہ - ۱ = ۴ جب ۱/۲ عہ جب ۱/۲ بہ جب ۱/۲ جہ؛

اس لیے جم عہ + جم بہ + جم جہ + ۱ = ۰

(۱۰) اگر مس ½ (بہ + جہ − عہ) مس ½ (جہ + عہ − بہ) مس ½ (عہ + بہ − جہ) = ۱

تو ثابت کرو کہ جب ۲ عہ + جب ۲ بہ + جب ۲ جہ = ۴ جم عہ جم بہ جم جہ

اب جب ½ (بہ + جہ − عہ) جب ½ (جہ + عہ − بہ) جب ½ (عہ + بہ − جہ)

= جم ½ (بہ + جہ − عہ) جم ½ (جہ + عہ − بہ) جم ½ (عہ + بہ − جہ)

یا {جم (بہ − عہ) − جم جہ} جب ½ (عہ + بہ − جہ) = {جم (بہ − عہ) + جم جہ} جم ½ (عہ + بہ − جہ)

یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

جم (بہ − عہ) جم ½ (عہ + بہ − جہ + ½ π) + جم جہ جب ½ (عہ + بہ − جہ + π) = ۰

اور جب ۲ عہ + جب ۲ بہ + جب ۲ جہ − ۴ جم عہ جم بہ جم جہ

= ۲ جب (عہ + بہ) جم (بہ − عہ) − ۲ جم جہ {جم (بہ − عہ) + جم (عہ + بہ) − جب جہ}

= ۲ جم (بہ − عہ) {جب (عہ + بہ) − جب (½ π − جہ)} − ۲ جم جہ {جم (بہ + عہ) − جم (½ π − جہ)}

= ۲ جب ½ (عہ + بہ + جہ − ½ π) {جم (بہ − عہ) جم ½ (عہ + بہ − جہ + ½ π)

+ جم جہ جب ½ (عہ + بہ − جہ + ½ π)}

اور یہ صفر کے مساوی ہے۔

(۱۱) اگر یہ دیا گیا ہو کہ

۴ جم (ما − ی) جم (ی − لا) جم (لا − ما) = ۱

تو ثابت کرو کہ

۱ + ۱۲ جم ۲ (ما − ی) جم ۲ (ی − لا) جم ۲ (لا − ما)

= ۴ جم ۳ (ما − ی) جم ۳ (ی − لا) جم ۳ (لا − ما)

فرض کرو کہ عہ = ما − ی، بہ = ی − لا، جہ = لا − ما

تب عہ + بہ + جہ = ۰،

پس ۱ − جم^2 عہ − جم^2 بہ − جم^2 جہ + ۲ جم عہ جم بہ جم جہ = ۰،

اس لیے جم^2 عہ + جم^2 بہ + جم^2 جہ = ۳/۴ ؛

اب جم ۳عہ جم ۳بہ جم ۳جہ = جم عہ جم بہ جم جہ (۴جم^2 عہ - ۳) (۴جم^2 بہ - ۳) (۴جم^2 جہ - ۳)

= ۱/۸ (۴ - ۲۷ - ۴۸ ∑ جم^2 بہ جم^2 جہ + ۳۶ ∑ جم^2 عہ)

= ۱/۴ (۳۱ - ۴۸ ∑ جم^2 بہ جم^2 جہ)

اور جم ۲عہ جم ۲بہ جم ۲جہ = (۲جم^2 عہ - ۱) (۲جم^2 بہ - ۱) (۲جم^2 جہ - ۱)

= (۱/۲ - ۱ + ۳ - ۴ ∑ جم^2 بہ جم^2 جہ)

= ۵/۴ - ۴ ∑ جم^2 بہ جم^2 جہ

پس ۴ جم ۳عہ جم ۳بہ جم ۳جہ - ۱۲ جم ۲عہ جم ۲بہ جم ۲جہ = ۱

(۱۲) اگر

(ما^2 + ی^2 - ۲ ما ی جم عہ) / جب^2 عہ = (ی^2 + لا^2 - ۲ ی لا جم بہ) / جب^2 بہ = (لا^2 + ما^2 - ۲ لا ما ی جم جہ) / جب^2 جہ

(82) تو ثابت کرو کہ مساواتوں کے حسب ذیل جٹوں میں سے ایک درست ہے، جہاں ۲س = عہ + بہ + جہ

لا / جم (س - عہ) = ما / جم (س - بہ) = ی / جم (س - جہ)،

لا / جم س = ما / جم (س - جہ) = ی / جم (س - بہ)

لا / جم (س - جہ) = ما / جم س = ی / جم (س - عہ)

لا / جم (س - بہ) = ما / جم (س - عہ) = ی / جم س

فرض کرو کہ مساوی کسروں میں سے ہر کسر ک^2 سے تعبیر کی گئی ہے، اور

رکھو لا = ک. جم طہ، ما = ک. جم فہ، ی = ک. جم پہ، تب

جم۲ فہ + جم۲ پہ - ۲ جم فہ. جم پہ. جم عہ = ۱ - جم۲ عہ،

یا　　(جم عہ - جم فہ جم پہ)۲ = جب۲ فہ جب۲ پہ

اس لیے　　جم عہ = جم (فہ ± پہ)؛ اسی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ جم بہ = جم (پہ ± طہ)، جم جہ = جم (طہ ± فہ)، اس لیے عمومیت کے نقصان کے بغیر ہم رکھ سکتے ہیں عہ = فہ ± پہ، بہ = پہ ± طہ، جہ = طہ ± فہ - اس غرض سے کہ یہ مساواتیں موافق ہو سکیں ہمیں تمام مبہم علامتوں کو مثبت لینا چاہیے، یا دو کو منفی اور ایک کو مثبت - پہلی صورت میں طہ = س - عہ، فہ = س - بہ، پہ = س - جہ؛ دوسری صورت میں قیمتوں کے حسب ذیل تین جٹ ملتے ہیں

طہ = س	طہ = جہ - س	طہ = س - بہ
فہ = س - جہ	فہ = س	فہ = عہ - س
پہ = بہ - س	پہ = س - بہ	پہ = س

اس طرح دی ہوئی چار مساواتوں میں سے ایک ہمیشہ پوری ہوتی ہے -

مساواتوں کا حل

۶۹ — مثالیں

(۱) حل کرو مساوات

جب ۲ طہ قط ۴ طہ + جم ۲ طہ = جم ۶ طہ

یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

جب ۲ طہ قط ۴ طہ + جم ۲ طہ - جم ۶ طہ = ۰،

یا　　جب ۲ طہ قط ۴ طہ + ۲ جب ۴ طہ جب ۲ طہ = ۰،

پس　　جب ۲ طہ = ۰، یا قط ۴ طہ + ۲ جب ۴ طہ = ۰

یعنے　　جب ۸ طہ = -۱

اِس لیے حل ہیں

ط = $\frac{1}{2}$ م π، ط = $\frac{1}{8}$ { ن π − (−۱)^{ن} $\frac{π}{2}$ }

(۲) حل کرو مساوات[1]

جم^{3} عہ قط لا + جب^{3} عہ قم لا = ۱، لا کے لیے

یہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

جم^{3} عہ جب لا + جب^{3} عہ جم لا = جب لا جم لا،

یا جب^{3} عہ جم لا − جم عہ جب^{2} عہ جب لا = جب لا (جم لا − جم عہ)، (33)

پس جب^{2} عہ جب (عہ − لا) = جب لا (جم لا − جم عہ)،

اس مساوات کی طرفین جب $\frac{1}{2}$ (عہ − لا) سے تقسیم پذیر ہیں، اس لیے اس جزو ضربی کو نکال دینے سے

۲ جب^{2} عہ جم $\frac{1}{2}$ (عہ − لا) = ۲ جب لا جب $\frac{1}{2}$ (عہ + لا)

= جم $\frac{1}{2}$ (لا − عہ) − جم $\frac{1}{2}$ (۳ لا + عہ)

اس لیے جم $\frac{1}{2}$ (۳ لا + عہ) = جم $\frac{1}{2}$ (لا − عہ) جم ۲ عہ،

یا ۲ جم $\frac{1}{2}$ (۳ لا + عہ) = جم $\frac{1}{2}$ (لا + ۳ عہ) + جم $\frac{1}{2}$ (لا − ۵ عہ)،

جس کو لکھا جاسکتا ہے

جم $\frac{1}{2}$ (۳ لا + عہ) − جم $\frac{1}{2}$ (لا + ۳ عہ) = جم $\frac{1}{2}$ (لا − ۵ عہ) − جم $\frac{1}{2}$ (۳ لا + عہ)،

اس لیے جب $\frac{1}{2}$ (لا − عہ) جب (لا + عہ) = جب (لا − عہ) جب $\frac{1}{2}$ (لا + ۳ عہ)؛

پھر مشترک جزو ضربی جب $\frac{1}{2}$ (لا − عہ) کو خارج کردینے سے

جب (لا + عہ) = − ۲ جم $\frac{1}{2}$ (لا − عہ) جب $\frac{1}{2}$ (لا + ۳ عہ)

= − { جب (لا + عہ) + جب ۲ عہ }،

[1] یہ مثال و السٹن ہوم کے مسئلوں سے لی گئی ہے۔

اس لیے جب (لا + عہ) = - جب عہ . جم عہ

اس لیے حل ہیں

لا = ۲ ن π + عہ، اور لا = ن π - عہ + (-۱)^ن جب^-۱ (جب عہ جم عہ)

(۳) حل کرو مساواتیں

ا جب (لا + ما) - ب جب (لا - ما) = ۲ م جم لا
ا جب (لا + ما) + ب جب (لا - ما) = ۲ ن جم ما

اِن سے حاصل ہوتا ہے

(۱/ن۲) {ا جب (لا + ما) + ب جب (لا - ما)}۲ - (۱/م۲) {ا جب (لا + ما) - ب جب (لا - ما)}۲

= ۴ (جم۲ ما - جم۲ لا) = ۴ جب (لا + ما) جب (لا - ما)

فرض کرو جب (لا + ما) / جب (لا - ما) = ت تو ت حسب ذیل دو درجی مساوات سے ملیگا

ا۲ ت۲ (۱/ن۲ - ۱/م۲) + ۲ ت {ا ب (۱/ن۲ + ۱/م۲) - ۲}

+ ب۲ (۱/ن۲ - ۱/م۲) = ۰

اس مساوات کی دونوں اصلوں کو ت سے تعبیر کرنے سے

ت = جب (لا + ما) / جب (لا - ما) = (مس لا + مس ما) / (مس لا - مس ما)

اس لیے مس لا / مس ما = (ت + ۱) / (ت - ۱)

نیز دی ہوئی مساواتوں میں سے ایک کو دوسرے سے تقسیم کرنے سے

م . جم لا / ن . جم ما = (ا ت - ب) / (ا ت + ب)

اور پھر ان دو مساواتوں اور رشتہ $قط^2 ما - مس^2 ما = ۱$ کے ذریعہ ما کو ساقط کرنے سے

$$\frac{ن^2}{م^2}\left(\frac{ات - ب}{ات + ب}\right)^2 قط^2 لا - \left(\frac{ت - ۱}{ت + ۱}\right)^2 مس^2 لا = ۱$$

جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$مس لا = \pm \left\{ ۱ - \frac{ن^2}{م^2}\left(\frac{ات - ت}{ات + ب}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{ن^2}{م^2}\left(\frac{ات - ب}{ات + ب}\right)^2 - \left(\frac{ت - ۱}{ت + ۱}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

اس سے مس لا کی چار قیمتیں ملتی ہیں، جن میں سے دو، دو اُس دو درجی مساوات کی ہر اصل کے جواب میں ہیں جو ت میں ہے۔ اس طرح لا معلوم ہو چکا اور پھر ما اس مساوات

$$مس ما = \frac{ت - ۱}{ت + ۱} مس لا$$

سے ملجاتا ہے۔

(84)

اسقاط

۷۰ — مثالیں —

(۱) مساواتوں $\frac{جم^3 ط}{جم(عہ - ۳ ط)} = \frac{جب^3 ط}{جب(عہ - ۳ ط)} = م$ سے ط ساقط کرو۔

چونکہ $م = \frac{جب ط جم^3 ط + جم ط جب^3 ط}{جب(عہ - ۲ ط)} = \frac{جب ط جم ط}{جب(عہ - ۲ ط)}$

اس لیے $\frac{۱}{۲م} = جب عہ جم ۲ ط - جم عہ$

نیز $م = \frac{جم^4 ط - جب^4 ط}{جم ط جم(عہ - ۳ ط) - جب ط جب(عہ - ۳ ط)} = \frac{جم ۲ ط}{جم(عہ - ۲ ط)}$

$$= \frac{۱}{جم عہ + جب عہ مس ۲ ط}$$

پس (۱/۲م + ۰.جم عہ)(۱/م − ۰.جم عہ) = جب² عہ،

یا ۲م² − ۱ = م.جم عہ،

اور یہ مطلوبہ حاصل اسقاط ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ مساواتوں

جم ۳ (ط − عہ) / جم (ط − بہ) = جم ۳ (ط + عہ − جہ) / جم (ط + بہ − جہ) = جم ۳ عہ / جم بہ

سے ط کو ساقط کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہ بہ سے آزاد ہے۔

مساوات

جم ۳ (لا − عہ) / جم (لا − بہ) = جم ۳ عہ / جم بہ

میں لا کو پورا کرنے والی تین غیر تابع قیمتیں ط، جہ − ط، اور صفر ہیں۔ اسلئے

جم ۳ لا جم ۳ عہ + جب ۳ لا جب ۳ عہ = ک (جم لا جم بہ + جب لا جب بہ)

جہاں ک = جم ۳ عہ \ جم بہ؛ جم ۳ لا، جب ۳ لا کی بجائے ان کی قیمتیں علی الترتیب جم لا، جب لا کی رقوم میں رکھنے اور پھر پوری مساوات کو جم³ لا سے تقسیم کرنے سے مس لا (= ت) میں حسب ذیل کعبی مساوات ملتی ہے

جم ۳ عہ {۴ − ۳ (۱ + ت²)} + جب ۳ عہ {۳ ت (۱ + ت²) − ۴ ت³}

= ک (جم بہ + ت جب بہ) (۱ + ت²)

یا ت³ (ک جب بہ + جب ۳ عہ) + ت² (ک جم بہ + ۳ جم ۳ عہ) +

ت (ک جب بہ − ۳ جب ۳ عہ) + ک جم بہ − جم ۳ عہ = ۰،

اِس لیے دو درجی مساوات

ت^{2} (ک جب بہ + جب ۳ عہ) + ت (ک جم بہ + ۳ جم ۳ عہ) + ک جب بہ
− ۳ جب ۳ عہ = ۰،

کی اصلیں مس طہ اور مس (جہ − طہ) ہیں؛

اِس لیے   مس طہ + مس (جہ − طہ) = (ک جم بہ + ۳ جم ۳ عہ) / (ک جب بہ + جب ۳ عہ)

اور   مس طہ مس (جہ − طہ) = (ک جب بہ − ۳ جب ۳ عہ) / (ک جب بہ + جب ۳ عہ)

پس   مس جہ = −(ک جم بہ + ۳ جم ۳ عہ) / (۴ جب ۳ عہ) = − مم ۳ عہ،

یا   جہ − ۳ عہ = (۲ ر + ۱) $\frac{1}{2}\pi$

جہاں ر کوئی صحیح عدد ہے۔ اس طرح حاصل اسقاط بہ پر منحصر نہیں ہے۔

(85)

(۳) مساواتوں

لا جم طہ / ا + ما جب طہ / ب = ۱، لا جب طہ − ما جم طہ = (ا^{2} جب^{2} طہ + ب^{2} جم^{2} طہ)$^{\frac{1}{2}}$

سے طہ ساقط کرو۔

ہر مساوات کا مربع لو اور مس طہ = ت رکھو تو مساواتیں ہو جاتی ہیں

ت^{2} (۱ − ما^{2}/ب^{2}) − ۲ ت لا ما/(ا ب) + (۱ − لا^{2}/ا^{2}) = ۰،

ت^{2} (ا^{2} − لا^{2}) + ۲ ت لا ما + (ب^{2} − ما^{2}) = ۰.

اِن مساواتوں سے ت کو ساقط کرنا ہے۔ ان کو ت^{2} اور ت کے لیے حل کرنے سے

ت^{2} / [۲ لا ما (۱ − لا^{2}/ا^{2} + (ب^{2} − ما^{2})/(ا ب))] = ت / [(ب^{2} − ما^{2})^{2}/ب^{2} − (ا^{2} − لا^{2})^{2}/ا^{2}] = ۱ / [− ۲ لا ما (ا^{2} − لا^{2})/(ا ب) − ۲ لا ما (ب^{2} − ما^{2})/ب^{2}]

پس

$$\left\{\frac{ب^2-ما^2}{ب}+\frac{ا^2-لا^2}{ا}\right\}^2\left[\left\{\frac{ب^2-ما^2}{ب}-\frac{ا^2-لا^2}{ا}\right\}^2\right]=-\frac{لا^2ما^2}{ا^3ب^3}\left\{ب(ا^2-لا^2)+ا(ب^2-ما^2)\right\}^2$$

یا $$\left\{ا+ب-\frac{لا^2}{ا}-\frac{ما^2}{ب}\right\}^2\left[\left\{\frac{ب^2-ما^2}{ب}-\frac{ا^2-لا^2}{ا}\right\}^2+\frac{۴\,لا^2ما^2}{ا\,ب}\right]=۰$$

اس لیے $$\frac{لا^2}{ا}+\frac{ما^2}{ب}=ا+ب$$

حاصل اسقاط ہے۔

(۴) مساواتوں

$$لا\ جب\ ط+ما\ جم\ ط=۲\,ا\ جب\ ۲ط،$$

$$لا\ جم\ ط-ما\ جب\ ط=ا\ جم\ ۲ط$$

سے ط ساقط کرو۔

لا اور ما کے لیے حل کرنے سے

$$لا=ا\ جم\ ط\,(۲-جم\ ۲ط)،\quad ما=ا\ جب\ ط\,(۲+جم\ ۲ط)$$

یا $$لا=ا\ جم\ ط\,(جم^2ط+۳\ جب^2ط)،\quad ما=ا\ جب\ ط\,(۳\ جم^2ط+جب^2ط)$$

اسلیے $$لا+ما=ا\,(جم\ ط+جب\ ط)^3،\quad لا-ما=ا\,(جم\ ط-جب\ ط)^3$$

پس $$(لا+ما)^{\frac{2}{3}}=ا^{\frac{2}{3}}(۱+جب\ ۲ط)،\quad (لا-ما)^{\frac{2}{3}}=ا^{\frac{2}{3}}(۱-جب\ ۲ط)$$

اور حاصل اسقاط ہے

$$(لا+ما)^{\frac{2}{3}}+(لا-ما)^{\frac{2}{3}}=۲\,ا^{\frac{2}{3}}$$

مساواتوں کی اصلوں کے درمیان رشتے

۱۷ — مثالیں۔

(۱) مساوات　　$\text{ا}\ \text{جم}\ \text{ط} + \text{ب}\ \text{جب}\ \text{ط} = \text{ج}$

پر غور کرو۔

فرض کرو کہ ط کی دو الگ الگ قیمتیں عہ، بہ ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں، تب

$$\text{ا}\ \text{جم}\ \text{عہ} + \text{ب}\ \text{جب}\ \text{عہ} = \text{ج}،$$
$$\text{ا}\ \text{جم}\ \text{بہ} + \text{ب}\ \text{جب}\ \text{بہ} = \text{ج}،$$

(۴۹)

اس لیے

$$\frac{\text{ا}}{\text{جب بہ} - \text{جب عہ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم عہ} - \text{جم بہ}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب}\,(\text{بہ} - \text{عہ})}$$

پس　　$\text{مس}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ}) = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

اور نیز　$\frac{1}{\text{ج}}\ \text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} - \text{عہ}) = \frac{1}{\text{ب}}\ \text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ}) = \frac{1}{\text{ا}}\ \text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ})$

اِن نسبتوں کو حسب ذیل طریقہ پر بھی معلوم کیا جاسکتا ہے:۔ رکھو $\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{ط} = \text{ت}$ تو دی ہوئی مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$\text{ا}\,(1 - \text{ت}^2) + 2\,\text{ب}\,\text{ت} = \text{ج}\,(1 + \text{ت}^2)$$

یا　$$\text{ت}^2(\text{ج} + \text{ا}) - 2\,\text{ب}\,\text{ت} + \text{ج} - \text{ا} = 0$$

اس دو درجی کی اصلیں $\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{عہ}$، $\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{بہ}$ ہیں، اس لیے

$$\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{عہ}\ \text{مس}\ \frac{1}{2}\text{بہ} = \frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ج} + \text{ا}}$$

اِس لیے ربط حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} - \text{عہ})}{\text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ})} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}}$$

نیز　$$\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{عہ} + \text{مس}\ \frac{1}{2}\text{بہ} = \frac{2\,\text{ب}}{\text{ج} + \text{ا}}$$

جس سے دوسرا ربط حاصل ہوسکتا ہے۔

(۲) مساوات

ا.جم ۲ ط + ب جب ۲ ط + ج.جم ط + د جب ط + ع = ۰

پر غور کرو۔

فرض کرو ت = مس ½ ط تو دی ہوئی مساوات کو ت میں چار درجی کے طور پر لکھا جا سکتا ہے چنانچہ

ت^4 (ا - ج + ع) + ت^3 (-۴ ب + ۲ د) + ت^2 (-۶ ا + ۲ ع)

+ ت (۴ ب + ۲ د) + (ا + ج + ع) = ۰ ؛

اگر اس چار درجی کی اصلیں مس ½ ط$_1$، مس ½ ط$_2$، مس ½ ط$_3$، مس ½ ط$_4$ ہوں تو

Σ مس ½ ط$_1$ = (۴ ب - ۲ د) / (ا - ج + ع)، Σ مس ½ ط$_1$ مس ½ ط$_2$ = (۲ ع - ۶ ا) / (ا - ج + ع)،

Σ مس ½ ط$_1$ مس ½ ط$_2$ مس ½ ط$_3$ = - (۴ ب + ۲ د) / (ا - ج + ع)، مس ½ ط$_1$ مس ½ ط$_2$ مس ½ ط$_3$ مس ½ ط$_4$ =

(ا + ج + ع) / (ا - ج + ع) ؛ اور ان رشتوں سے اِن چار مماسوں کے تشاکل تفاعل محسوب کیے جا سکتے ہیں۔

اگر ۲ س = ط$_1$ + ط$_2$ + ط$_3$ + ط$_4$ تو

مس س = (Σ مس ½ ط$_1$ - Σ مس ½ ط$_1$ مس ½ ط$_2$ مس ½ ط$_3$) / (۱ - Σ مس ½ ط$_1$ مس ½ ط$_2$ + مس ½ ط$_1$ مس ½ ط$_2$ مس ½ ط$_3$ مس ½ ط$_4$)

= (۴ ب - ۲ د + (۴ ب + ۲ د)) / (ا - ج + ع - (۲ ع - ۶ ا) + ا + ج + ع) = ب / ا

طالب علم حسب ذیل رشتے مشق کے طور پر ثابت کرے۔

ا / جم س = ب / جب س = - ج / (Σ جم (س - ط$_1$)) = - د / (Σ جب (س - ط$_1$)) = ع / (Σ جم ½ (ط$_1$ + ط$_2$ - ط$_3$ - ط$_4$))

(۳) اگر

جب عہ . جم (عہ + ط) مس ۲ عہ = جب بہ جم (بہ + ط) مس ۲ بہ = جب جہ جم (جہ + ط) مس ۲ جہ
= جب ضہ . جم (ضہ + ط) مس ۲ ضہ

(87) اور عہ، بہ، جہ، ضہ میں سے کسی دو زاویوں میں π کے ضِعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ عہ + بہ + جہ + ضہ + ط، π کا ضِعف ہے۔

مساوی مقداروں میں سے ہر مقدار کو ک کے مساوی رکھو تو عہ، بہ، جہ، ضہ، مساوات

جب لا جم (لا + ط) مس ۲ لا = ک

کی اصلیں ہیں۔ یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

۲ مس٢ لا (جم ط ـ جب ط مس لا) = ک (۱ ـ مس٤ لا)،

پس Σ مس عہ = $\frac{\text{۲ جب ط}}{\text{ک}}$، Σ مس عہ مس بہ = $\frac{\text{۲ جم ط}}{\text{ک}}$،

Σ مس عہ مس بہ مس جہ = ۰، مس عہ مس بہ مس جہ مس ضہ = ـ ۱

اس لیے مس (عہ + بہ + جہ + ضہ) = $\frac{\text{۲ جب ط}}{\text{ک ـ ۲ جم ط ـ ک}}$ = ـ مس ط

پس عہ + بہ + جہ + ضہ + ط، π کا ضِعف ہے۔

(۴) اگر عہ، بہ، جہ، غیر مساوی زاویے ہوں ہر ایک ۲ π سے کم تو ثابت کرو کہ مساواتیں

جم (عہ + ط) قط ۲ عہ = جم (ط + بہ) قط ۲ بہ = جم (ط + جہ) قط ۲ جہ

ایک ساتھ موجود نہیں ہو سکتیں جب تک کہ

جم (بہ + جہ) + جم (جہ + عہ) + جم (عہ + بہ)

صفر کے مساوی نہ ہو۔

ہر مساوی مقدار کو ک کے مساوی رکھنے سے

جم عہ . جم ط − جب عہ جب ط − ک جم ۲ عہ = ۰ ،

جم بہ . جم ط − جب بہ جب ط − ک جم ۲ بہ = ۰ ،

جم جہ . جم ط − جب جہ جب ط − ک جم ۲ جہ = ۰ ،

پس　　جم ط اور جب ط کو ساقط کرنے سے

Σ جم ۲ عہ جب (بہ − جہ) = ۰ ،

یا　　Σ جم (بہ + جہ) Σ جب (جہ − بہ) = ۰ ، بموجب مثال (۲) دفعہ ۶۸

پس　　Σ جم (بہ + جہ) = ۰ ، سوائے اس صورت میں جبکہ Σ جم (جہ − بہ) = ۰

یعنی　　جبکہ جب ½ (بہ − جہ) جب ½ (جہ − عہ) جب ½ (عہ − بہ) = ۰

یہ مثال بھی مثال (۳) کی طرح حل ہوسکتی ہے۔

اعظم اور اقل قیمتیں ـ لاتساویات

۷۲ ـــــ مثالیں ـ

(۱)　　ا جم ط + ب جب ط

کی بڑی سے بڑی قیمت ہے　$\sqrt{ا^2 + ب^2}$

رکھو $\frac{ب}{ا}$ = مس عہ ، تو ب = $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ جب عہ ، ا = $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ جم عہ ،

اس طرح　　ا جم ط + ب جب ط = $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ جم (ط − عہ) ،

اب چونکہ　جم (ط − عہ) ہمیشہ ± ۱ کے درمیان واقع ہوتا ہے ، اس لیے ا جم ط + ب جب عہ
± $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ کے درمیان واقع ہوگا۔

(۲) اگر　ع = $\sqrt{ا^2 جم^2 ط + ب^2 جب^2 ط}$ + $\sqrt{ا^2 جب^2 ط + ب^2 جم^2 ط}$

تو ع، $\text{ا} + \text{ب}$ اور $\sqrt{2(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)}$ کے درمیان واقع ہوگا۔

(88) فرض کرو $\text{لا} = \text{ا}^2 \,\text{جم}^2\text{ط} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\text{ط} = \frac{1}{2}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2) + \frac{1}{2}(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جم}\,2\text{ط}$

تب $\text{ع} = \sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{لا}}$،

$$\text{ع}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + 2\sqrt{\frac{1}{4}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^2 - \left\{\frac{1}{2}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2) - \text{لا}\right\}^2}$$

پس ع بڑے سے بڑا ہے جبکہ $\text{لا} = \frac{1}{2}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)$، یا ع کی بڑی سے بڑی قیمت $\sqrt{2(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)}$ ہے؛ نیز ع کم سے کم ہے جبکہ $\frac{1}{2}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2) - \text{لا}$ بڑے سے بڑا ہو یعنی جبکہ لا کم سے کم ہو اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ $\text{جم}\,2\text{ط} = -1$، اور اس صورت میں $\text{لا} = \text{ب}^2$ اور تب $\text{ع} = \text{ا} + \text{ب}$؛ اس لیے یہ ع کی کم سے کم قیمت ہے۔

(۳) اگر ط، صفر اور π کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم}\,\frac{1}{4}\text{ط} - \text{مم}\,\text{ط} > 2$$

چونکہ

$$\text{مم}\,\frac{1}{4}\text{ط} - \text{مم}\,\text{ط} = \frac{\text{جب}\,\frac{3}{4}\text{ط}}{\text{جب}\,\frac{1}{4}\text{ط}\;\text{جب}\,\text{ط}} = \frac{3 - 4\,\text{جب}^2\frac{1}{4}\text{ط}}{\text{جب}\,\text{ط}} = \frac{1 + 2\,\text{جم}\,\frac{1}{2}\text{ط}}{\text{جب}\,\text{ط}}$$

پس $\text{مم}\,\frac{1}{4}\text{ط} - \text{مم}\,\text{ط} = \text{قم}\,\text{ط} + \text{قم}\,\frac{1}{2}\text{ط}$؛

اب اگر ط، صفر اور π کے درمیان واقع ہے تو قم ط اور قم $\frac{1}{2}$ط ہر ایک اکائی سے ہرگز کم نہیں ہوسکتا، اس لیے $\text{مم}\,\frac{1}{4}\text{ط} - \text{مم}\,\text{ط} > 2$،

(۴) اگر ن زاویوں کا جن میں سے ہر ایک مثبت ہے اور $\frac{1}{2}$ π سے کم ہے مجموعہ دیا جائے تو بتاؤ کہ اِن زاویوں کی جیوب کا حاصل جمع یا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جب کہ زاویے سب کے سب مساوی ہوں۔

جیوب التمام کے لیے بھی ایسا ہی ایک مسئلہ درست ہے۔

فرض کرو کہ ع۱، ع۲، . . .، عن زاویے ہیں اور ان کا حاصل جمع ص ہے۔

تب جب عر + جب عس = ۲ جب $\frac{1}{2}$ (عر + عس) جم $\frac{1}{2}$ (عر - عس) اور

چونکہ جم $\frac{1}{2}$ (عر - عس) ایک سے کم ہے سوائے اس صورت کہ جبکہ عر = عس

اس لیے جب عر + جب عس > ۲ جب $\frac{1}{2}$ (عر + عس)

اگر عر ≠ عس، اس لیے اگر ع۱، ع۲، . . .، عن میں سے کوئی دو زاویے غیر مساوی ہوں تو ہم اِن دو زاویوں میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے حسابی اوسط کو درج کرکے ∑ جب ع کو بڑھا سکتے ہیں، پس ∑ جب ع بڑے سے بڑا ہے جب سب زاویے مساوی ہوں؛

اس لیے ∑ جب ع ≯ ن جب $\frac{ص}{ن}$ ۔

نیز جب عر جب عس = $\frac{1}{2}$ {جم (عر - عس) - جم (عر + عس)}

اور یہ $\frac{1}{2}$ {جم (عر - عس) - جم (عر + عس)} > $\frac{1}{2}$ {۱ - جم (عر + عس)}

یا > جب² $\frac{1}{2}$ (عر + عس)

اگر عر ≠ عس۔ پس حسب سابق اگر حاصل ضرب جب ع۱ جب ع۲ × . . جب عن میں کوئی دو زاویے غیر مساوی ہوں تو ہم اِن زاویوں میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے اوسط حسابی کو درج کرکے حاصل ضرب کو بڑھا سکتے ہیں؛ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب ع۱ . . . . . جب عن بڑے سے بڑا ہے جبکہ ع۱ = ع۲ = . . . = عن، اور اس حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت (جب $\frac{ص}{ن}$)ن ہے۔

(۵) پچھلی مثال کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے قاطع التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جب سب زاویے مساوی ہوں ۔

چونکہ

قم عر + قم عس

$$= \text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{عر}+\text{عس})\left\{\frac{1}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{عر}-\text{عس})-\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{عر}+\text{عس})}+\frac{1}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{عر}-\text{عس})+\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{عر}+\text{عس})}\right\}$$

پس عر + عس کی دی ہوئی قیمت کے لیے قم عر + قم عس کی کم سے کم قیمت ہے جبکہ $\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{عر}-\text{عس}) = 1$ یا جبکہ عر = عس - اِس کے بعد استدلال کی صورت وہی ہوگی جو پچھلی مثال کی ہے ۔ (89)

(۶) پچھلی دو مثالوں کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے مماسوں یا مماس التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جبکہ سب زاویے مساوی ہوں ۔

(۷) اگر عہ + بہ + جہ = π تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم عہ}\,.\,\text{جم بہ}\,.\,\text{جم جہ} \not> \tfrac{1}{8}$$

مساواتوں کے استنباطی نظام

۳۷ ـــــ مساواتوں کے نظام کو استنباطی[1] کہا جائیگا جب کہ مساواتیں باہم موافق نہ ہوں اِلّا آنکہ ہر ایک خاص رشتہ کو پورا کریں۔ جب یہ رشتہ پورا ہو تو مساواتوں کے حل تعداد میں لاانتہا ہونگے۔

---

[1] دیکھو "استنباطی مساواتوں کے نظامات پر" اوسٹن ہوم کا مضمون "Proc. London Math. Soc." جلد چہارم میں۔

نظام

ا جم بہ جم جہ + ب جب بہ جب جہ + ج + اَ (جب بہ + جب جہ) + بَ (جم بہ + جم جہ)
+ جَ جب (بہ + جہ) = ۰ ،

ا جم جہ جم عہ + ب جب جہ جب عہ + ج + اَ (جب جہ + جب عہ) + بَ (جم جہ + جم عہ)
+ جَ جب (جہ + عہ) = ۰ ،

ا جم عہ جم بہ + ب جب عہ جب بہ + ج + اَ (جب عہ + جب بہ) + بَ (جم عہ + جم بہ)
+ جَ جب (عہ + بہ) = ۰ ،

تین استنباطی مساواتوں کا ایک نظام ہے۔

مساوات

ا جم عہ جم ط + ب جب عہ جب ط + ج + اَ (جب عہ + جب ط) + بَ (جم عہ + جم ط)
+ جَ جب (عہ + ط) = ۰ ،

پر غور کرو۔ یہ مساوات پوری ہوتی ہے ط = بہ اور ط = جہ سے ۔ اس کو مس $\frac{1}{2}$ ط = م
کی مساوات کے طور پر لکھو، اس طرح :

م^2 (- ا جم عہ + ج - اَ جب عہ + بَ جم عہ - بَ - جَ جب عہ)
+ ۲ م (ب جب عہ + اَ + جَ جم عہ) + (ا جم عہ + ج + اَ جب عہ + بَ + بَ جم عہ
+ جَ جب عہ) = ۰ ،

اس مساوات سے ہم معلوم کرتے ہیں

مس $\frac{1}{2}$ بہ + مس $\frac{1}{2}$ جہ، اور مس $\frac{1}{2}$ بہ مس $\frac{1}{2}$ جہ

پس مس $\frac{1}{2}$ (بہ + جہ) = ۲ (ب جب عہ + اَ + جَ جم عہ) / ۲ (ا جم عہ + بَ + جَ جب عہ)

اسی طرح ہمیں حاصل ہونا چاہیے

مس $\frac{1}{2}$ (عہ + جہ) = (ب جب بہ + اَ + جَ جم بہ) / (ا جم بہ + بَ + جَ جب بہ) ،

اب ہم مس ½ (عہ - بہ) کی قیمت اخذ کر سکتے ہیں ؛ یہ قیمت ایک کسر ہوگی جس کا شمار کنندہ ہے

(ب جب بہ + اَ + جَ جم بہ) (ا جم عہ + بَ + جَ جب عہ) - (ب جب عہ + اَ + جَ جم عہ)

× (اَ جم بہ + بَ + جَ جب بہ)

یا

۲ جب ½ (عہ - بہ) {(جَ^۲ - ا ب) جم ½ (عہ - بہ) + (اَ جَ - ب بَ) جم ½ (عہ + بہ)

- (ا اَ - بَ جَ) جب ½ (عہ + بہ)}

(۹۰) اور نسب نما ہے

(ب جب عہ + اَ + جَ جم عہ) (ب جب بہ + اَ + جَ جم بہ) + (ا جم عہ + بَ + ج جب عہ)

(ا جم بہ + بَ + جَ جب بہ)

یا

(اَ^۲ + جَ^۲) جم عہ جم بہ + (بَ^۲ + جَ^۲) جب عہ جب بہ + (اَ^۲ + بَ^۲)

+ (اَ ب + بَ جَ) (جب عہ + جب بہ) + (اَ جَ + ا بَ) (جم عہ + جم بہ)

+ (ا + ب) جَ جب (عہ + بہ) ؛

اس کسر کو جب ½ (عہ - بہ) سے تقسیم کرو تو یہ نسب نما

= (جَ^۲ - ا ب) {ا + جم (عہ - بہ)} + (اَ جَ - ب بَ) (جم عہ + جم بہ) - (ا اَ - بَ جَ) (جب عہ - جب بہ)

پس

(ا + ب) {ا جم عہ جم بہ + ب جب عہ جب بہ + ج + اَ (جب عہ + جب بہ)

+ بَ (جم عہ + جم بہ) + جَ جب (عہ + بہ)}

= جَ^۲ - اَ^۲ - بَ^۲ + ج ا + ج ب - ا ب

اس لیے جب تک کہ شرط

$$\text{ج}^{2} - \text{ا}^{2} - \text{ب}^{2} + \text{ج ا} + \text{ج ب} - \text{ا ب} = ۰$$

پوری نہ ہو مساواتوں کا دیا ہوا نظام پورا نہیں ہو سکتا سوائے عہ، بہ، جہ کی مساوی قیمتوں کے۔ جب یہ شرط پوری ہو تو کوئی ایک مساوات باقی دو مساواتوں سے اخذ کی جا سکتی ہے۔

سلسلوں کو جمع کرنا

۴۷ ــــ بہت سے سلسلے جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں فرقوں کے طریقہ سے جمع کیے جا سکتے ہیں۔ اس طریقہ کے استعمال کی سب سے اہم مثال وہ سلسلہ ہے جو اُن مقداروں کی جیوب یا جیوب التمام کا ہوتا ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ سلسلہ ہے

$$\text{س} = \text{جم عہ} + \text{جم}(\text{عہ} + \text{بہ}) + \text{جم}(\text{عہ} + ۲\,\text{بہ}) + \cdots + \text{جم}\left[\text{عہ} + (\text{ن} - ۱)\,\text{بہ}\right]،$$

اب چونکہ

$$\text{جم عہ} = \frac{۱}{۲\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\text{بہ}}\left[\text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{۱}{۲}\text{بہ}\right) - \text{جب}\left(\text{عہ} - \frac{۱}{۲}\text{بہ}\right)\right]،$$

$$\text{جم}(\text{عہ} + \text{بہ}) = \frac{۱}{۲\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\text{بہ}}\left[\text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{۳}{۲}\text{بہ}\right) - \text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{۱}{۲}\text{بہ}\right)\right]،$$

. . . .

$$\text{جم}\left\{\text{عہ} + (\text{ن} - ۱)\,\text{بہ}\right\} = \frac{۱}{۲\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\text{بہ}}\left[\text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{۲\text{ن} - ۱}{۲}\text{بہ}\right) - \text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{۲\text{ن} - ۳}{۲}\text{بہ}\right)\right]$$

اس لیے

$$\text{س} = \frac{۱}{۲}\,\text{قم}\,\frac{۱}{۲}\text{بہ}\left\{\text{جب}\left(\text{عہ} + \frac{۲\text{ن} - ۱}{۲}\text{بہ}\right) - \text{جب}\left(\text{عہ} - \frac{۱}{۲}\text{بہ}\right)\right\}$$

$$= \text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\text{ن} - ۱}{۲}\text{بہ}\right)\text{جب}\,\frac{\text{ن بہ}}{۲}\;\text{قم}\,\frac{\text{بہ}}{۲}،\quad \ldots\ (۱)$$

(۹۱)

اسی طرح ہمیں حاصل ہوگا

جیب عہ + جیب (عہ + بہ) + جیب (عہ + ۲ بہ) + ... + جیب {عہ + (ن - ۱) بہ}

= جیب (عہ + $\frac{ن - ۱}{۲}$ بہ) جیب $\frac{ن بہ}{۲}$ قم $\frac{بہ}{۲}$، . . . . (۳)

اِس حاصل جمع کو (۱) میں عہ کی بجائے عہ + $\frac{۱}{۲}$ π درج کرکے حاصل کیا جا سکتا ہے

(۱) میں بہ کی بجائے بہ + π رکھو تو سلسلہ

جم عہ - جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) - ... + (-۱)$^{ن-۱}$ جم {عہ + (ن - ۱) بہ}

کا حاصل جمع ہوگا

جم (عہ + $\frac{ن - ۱}{۲}$ بہ) جم $\frac{ن بہ}{۲}$ قط $\frac{بہ}{۲}$، یا جیب (عہ + $\frac{ن - ۱}{۲}$ بہ) جیب $\frac{ن بہ}{۲}$ قط $\frac{بہ}{۲}$

بموجب اس کے کہ ن طاق ہو یا جفت ۔

سلسلہ

جیب عہ - جیب (عہ + بہ) + جیب (عہ + ۲ بہ) . . .

کا حاصل جمع، (۲) سے اسی طرح معلوم کیا جا سکتا ہے ۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ

$\frac{جیب ن عہ}{جیب عہ}$ = ۲ {جم (ن - ۱) عہ + جم (ن - ۳) عہ + جم (ن - ۵) عہ + ... }

نیز جم ن عہ \ جم عہ کے لیے اسی طرح کا جملہ معلوم کرو ۔

(۲) جمع کرو سلسلہ

جم^{۲} عہ + جم^{۲} (عہ + بہ) + ... + جم^{۲} [عہ + (ن - ۱) بہ]

چونکہ $\text{جم}^{۲}\text{عہ} = \frac{۱}{۲}(۱+\text{جم ۲ عہ})$، $\text{جم}^{۲}(\text{عہ}+\text{بہ}) = \frac{۱}{۲}\{۱+\text{جم ۲}(\text{عہ}+\text{بہ})\}$، ...

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے

$$\frac{۱}{۲}\text{ن} + \frac{۱}{۲}\text{جم}\{۲\,\text{عہ} + (\text{ن}-۱)\,\text{بہ}\}\ \text{جب ن بہ قم بہ}$$

اسی طرح سلسلوں (۱) اور (۲) کی رقموں کی کسی مثبت صحیح عددی قوتوں کا مجموعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(۳) جمع کرو سلسلہ $\text{قم ۲ عہ} + \text{قم ۲}^{۲}\text{عہ} + \dots + \text{قم ۲}^{\text{ن}}\text{عہ}$

چونکہ $\text{قم ۲ عہ} = \text{مم عہ} - \text{مم ۲ عہ}$، $\text{قم ۲}^{۲}\text{عہ} = \text{مم ۲ عہ} - \text{مم ۲}^{۲}\text{عہ}$، ...

$$\text{قم ۲}^{\text{ن}}\text{عہ} = \text{مم ۲}^{\text{ن}-۱}\text{عہ} - \text{مم ۲}^{\text{ن}}\text{عہ}$$

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے $\text{مم عہ} - \text{مم ۲}^{\text{ن}}\text{عہ}$

(۴) جمع کرو سلسلہ

$$\frac{\text{۳ جب لا} - \text{جب ۳ لا}}{\text{جم ۳ لا}} + \frac{\text{۳ جب ۳ لا} - \text{جب ۳}^{۲}\text{لا}}{\text{۳ جم ۳}^{۲}\text{لا}} + \dots + \frac{\text{۳ جب ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا} - \text{جب ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}{\text{۳}^{\text{ن}-۱}\text{جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}$$

چونکہ $\text{مس ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا} - \frac{۱}{۳}\text{مس ۳}^{\text{ن}}\text{لا}$

$$= \frac{\text{۳ جب ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا} - \text{جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جب ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}{\text{۳ جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}$$

$$= \frac{\text{۲ جب ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا} - \text{جب ۲} \times \text{۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا}}{\text{۳ جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}} = \frac{\text{۲ جب ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\,(\text{جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا} - \text{جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا})}{\text{۳ جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}$$

$$= \frac{-\text{۸ جب}^{۳}\,\text{۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا}}{\text{۳ جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}} = -۲\,\frac{\text{۳ جب ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا} - \text{جب ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}{\text{۳ جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}$$

اس لیے $\frac{۳\ جب\ لا - جب\ ۳\ لا}{جم\ ۳\ لا} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳}\ مس\ ۳\ لا - مس\ لا\right)$ ،

اس لیے $\frac{۳\ جب\ ۳\ لا - جب\ ۳^{۲}\ لا}{۳ . جم\ ۳^{۲}\ لا} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳^{۲}}\ مس\ ۳^{۲}\ لا - \frac{۱}{۳}\ مس\ ۳\ لا\right)$ ،

$\frac{۳\ جب\ ۳^{ن-۱}\ لا - جب\ ۳^{ن}\ لا}{۳^{ن-۱}\ جم\ ۳^{ن}\ لا} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳^{ن}}\ مس\ ۳^{ن}\ لا - \frac{۱}{۳^{ن-۱}}\ مس\ ۳^{ن-۱}\ لا\right)$ ؛

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے

$$\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳^{ن}}\ مس\ ۳^{ن}\ لا - مس\ لا\right)$$

۷۵ ـــــــ تسلسل

$ع_۱\ جم\ عہ + ع_۲\ جم\ (عہ + بہ) + ع_۳\ جم\ (عہ + ۲\ بہ) + \ldots + ع_ن\ جم\ \{عہ + (ن - ۱)\ بہ\}$ ،

$ع_۱\ جب\ عہ + ع_۲\ جب\ (عہ + بہ) + ع_۳\ جب\ (عہ + ۲\ بہ) + \ldots + ع_ن\ جب\ \{عہ + (ن - ۱)\ بہ\}$

ایسی شکل کے سلسلہ کا حاصل جمع معلوم کیا جاسکتا ہے اگر $ع_ر$ ر کا ایک منطق صحیح تفاعل ہو جس کا درجہ کوئی مثبت صحیح عدد س ہو۔

فرض کرو کہ $س = ع_۱\ جم\ عہ + ع_۲\ جم\ (عہ + بہ) + ع_۳\ جم\ (عہ + ۲\ بہ) + \ldots + ع_ن\ جم\ \{عہ + (ن - ۱)\ بہ\}$

تب

$$۲\ جم\ بہ \times س = ع_۱\ \{جم\ (عہ - بہ) + جم\ (عہ + بہ)\} + ع_۲\ \{جم\ عہ + جم\ (عہ + ۲\ بہ)\}$$

$$+ \ldots + ع_ر\ \{جم\ (عہ + \overline{ر - ۲}\ بہ) + جم\ (عہ + ر\ بہ)\}$$

$$+ \ldots + ع_ن\ \{جم\ (عہ + \overline{ن - ۲}\ بہ) + جم\ (عہ + ن\ بہ)\}$$

اس لیے

$$۲(۱-\text{جم}\,ب)\,س = (۲ع_{۱} - ع_{۲})\,\text{جم}\,عہ + (۲ع_{۲} - ع_{۱} - ع_{۳})\,\text{جم}(عہ + ب) + \dots$$

$$+ (۲ع_{ر} - ع_{ر-۱} - ع_{ر+۱})\,\text{جم}(عہ + \overline{ر-۱}\,ب) + \dots$$

$$+ (۲ع_{ن-۱} - ع_{ن-۲} - ع_{ن})\,\text{جم}(عہ + \overline{ن-۲}\,ب)$$

$$+ (۲ع_{ن} - ع_{ن-۱})\,\text{جم}(عہ + \overline{ن-۱}\,ب) - ع_{۱}\,\text{جم}(عہ - ب) - ع_{ن}\,\text{جم}(عہ + ن\,ب)$$

اب جملہ $۲ع_{ر} - ع_{ر-۱} - ع_{ر+۱}$ ایک منطق صحیح تفاعل ہے ر کا اور اس کا درجہ س-۱ ہے، اس لیے پہلی رقم اور آخری تین رقموں کو چھوڑنے سے ہمیں ایک ہی قسم کا ایک سلسلہ ملتا ہے لیکن جس کے سر دیے ہوئے سلسلہ کے سروں سے نچلے درجہ کے ہیں۔ ہم پھر اس کو ۱-جم ب سے ضرب دیتے ہیں، اور اس طرح کا عمل س مرتبہ دُہراتے ہیں؛ تب سلسلہ شکل (۱) میں تحویل ہو جائیگا۔

(۹۳)

امثلہ

(۱) جمع کرو سلسلہ

$$\text{جم}\,عہ + ۲.\text{جم}(عہ + ب) + ۳.\text{جم}(عہ + ۲ب) + \dots + ن\,\text{جم}\{عہ + (ن-۱)ب\}$$

اس صورت میں $۲ع_{ر} - ع_{ر-۱} - ع_{ر+۱} = ۰$، $۲ع_{۱} - ع_{۲} = ۰$، اس لیے

$$۲(۱-\text{جم}\,ب)\,س = (ن+۱)\,\text{جم}\{عہ + (ن-۱)ب\} - \text{جم}(عہ - ب) - ن\,\text{جم}(عہ + ن\,ب)،$$

یا

$$س = \frac{\frac{۱}{۲}(ن+۱)\,\text{جم}\{عہ + (ن-۱)ب\}}{۱-\text{جم}\,ب} - \frac{\frac{۱}{۲}\,\text{جم}(عہ - ب)}{۱-\text{جم}\,ب} - \frac{\frac{۱}{۲}ن\,\text{جم}(عہ + ن\,ب)}{۱-\text{جم}\,ب}$$

(۲) جمع کرو سلسلہ

جم عہ + ۲^{۲} جم (عہ + بہ) + ۳^{۲} جم (عہ + ۲ بہ) + ... + ن^{۲} جم {عہ + (ن - ۱) بہ}

یہ سلسلہ پچھلی مثال کے سلسلہ میں تحویل ہو جائیگا اگر اس کو ۲ (۱ - جم بہ) سے ضرب دیا جائے ۔

۷۶ — سلسلے

جم عہ + لا جم (عہ + بہ) + لا^{۲} جم (عہ + ۲ بہ) + ... + لا$^{ن-۱}$ جم [عہ + (ن - ۱) بہ]،

جب عہ + لا جب (عہ + بہ) + لا^{۲} جب (عہ + ۲ بہ) + ... + لا$^{ن-۱}$ جب [عہ + (ن - ۱) بہ]،

متوالی سلسلے ہیں جن کے ربط کا پیمانہ (scale of retation) ۱ - ۲ لا جم بہ + لا^{۲} ہے
کیونکہ

جم (عہ + ر بہ) + جم (عہ + ر-۲ بہ) = ۲ جم بہ جم (عہ + ر-۱ بہ)،

اور جب (عہ + ر بہ) + جب (عہ + ر-۲ بہ) = ۲ جم بہ جب (عہ + ر-۱ بہ)

اس لیے اِن کو متوالی سلسلوں کے جمع کرنے کے معمولی قاعدہ سے جمع کیا جاسکتا ہے ۔ اگر س سے پہلے سلسلہ کا حاصل جمع تعبیر ہو تو

س (۱ - ۲ لا جم بہ + لا^{۲})

= جم عہ - لا جم (عہ - بہ) - لا^{ن} جم (عہ + ن بہ) + لا$^{ن+۱}$ جم {عہ + (ن - ۱) بہ}

اگر لا < ۱ تو ن کو لا انتہا بڑا کرنے سے لامتناہی سلسلہ

جم عہ + لا جم (عہ + بہ) + لا^{۲} جم (عہ + ۲ بہ) + ...

کے حاصل جمع کی انتہائی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

(جم عہ - لا جم (عہ - بہ)) / (۱ - ۲ لا جم بہ + لا^{۲})

رکھو عہ = ۰ تو

$$\frac{1 - \text{لا جم به}}{1 - 2\,\text{لا جم به} + \text{لا}^2} = 1 + \text{لا جم به} + \text{لا}^2\,\text{جم}\,2\,\text{به} + \ldots \infty \text{ تک}$$

اس لیے نیز

$$\frac{1 - \text{لا}^2}{1 - 2\,\text{لا جم به} + \text{لا}^2} = 1 + 2\,\text{لا جم به} + 2\,\text{لا}^2\,\text{جم}\,2\,\text{به} + \ldots \infty \text{ تک}، \ldots (3)$$

۷۷ ـــ بعض صورتوں میں سلسلہ کا مجموعہ ایک شکل کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہم تمثیلاً دفعہ ۷۶ کے سلسلوں (۱) اور (۲) کو لینگے۔

(94)

فرض کرو کہ $و ا_1$، $ا_1 ا_2$، ...، $ا_{ن-1} ا_ن$ ایک دائرے کے مساوی وتر ہیں، اور فرض کرو کہ $و ا_1$ ممدودہ اور $ا_1 ا_2$ کے درمیان زاویہ به ہے جہاں و دائرہ کا مرکز ہے، خط مستقیم ولا کھینچو ایسا کہ $ا_1$ ولا = عہ،

تب $و ا_1$، $ا_1 ا_2$، ...، $ا_{ن-1} ا_ن$ کے میلان ولا کے ساتھ علی الترتیب یہ ہیں

عہ، عہ + به، عہ + ۲ به، ...، عہ + (ن - ۱) به

اور $و ا_ن$ کا میلان عہ + $\frac{1}{2}$(ن - ۱) به ہے؛ نیز اگر دائرہ کا قطر ق ہو تو

$و ا_1$ = ق جب $\frac{1}{2}$ به، $و ا_ن$ = ق جب $\frac{1}{2}$ ن به

اب ولا پر $و ا_1$، $ا_1 ا_2$، ...، $ا_{ن-1} ا_ن$ کے ظلوں کا مجموعہ ہے

$و ا_1$ جم (عہ) + $ا_1 ا_2$ جم (عہ + به) + ... + $ا_{ن-1} ا_ن$ جم {عہ + (ن-۱) به}،

یا ق جب $\frac{1}{2}$ به [جم عہ + جم (عہ + به) + ... + جم {عہ + (ن - ۱) به}]

اور یہ مجموعہ، $و ا_ن$ کے ظل کے مساوی ہونا چاہیے۔ جو یہ ہے

$و ا_ن$ جم {عہ + $\frac{1}{2}$(ن - ۱) به}

یا ق جب ½ ن بہ جم {عہ + ½ (ن-۱) بہ}

اس لیے

جم عہ + جم (عہ + بہ) + ... + جم {عہ + (ن-۱) بہ}

= جم {عہ + ½ (ن-۱) بہ} جب ½ ن بہ قم ½ بہ

اگر ہم و لا کے عمود دار خط مستقیم پر ظل لیں تو جیوب کے سلسلہ کا حاصل جمع ملیگا۔

امثلہ

(۱) ایک دائرہ کا قطر و ا ہے، اس کے محیط پر د، ف، ق، ... نقطے ہیں ایسے کہ زاویوں ف ا و، ق ا ف، ر ا ق، ... میں سے ہر ایک عہ ہے۔ ا ف، ا ق، ا ر، ... و پر کے مماس سے ف، ق، ر پہ ملتے ہیں۔ اس شکل کے ذریعہ سلسلہ

قط م عہ قط (م + ۱) عہ + قط (م + ۱) عہ قط (م + ۲) عہ + ... ن رقموں تک

کا مجموعہ معلوم کرو۔

(۲) ہندسی طور پر ثابت کرو کہ اگر عہ، بہ، جہ، ...، کہ، زاویوں کی کوئی تعداد ہو تو

قط عہ قط (عہ + بہ) جب بہ + قط (عہ + بہ) قط (عہ + بہ + جہ) جب جہ

+ قط (عہ + بہ + جہ) قط (عہ + بہ + جہ + ضہ) جب ضہ + ...

= قط عہ قط (عہ + بہ + جہ + ... + کہ) جب (بہ + جہ + ... + کہ)

چھٹے باب پر مثالیں

(۱) مساواتوں جم³ ط + ا جم ط = ب، جب³ ط + ا جب ط = ج

سے ط ساقط کرو۔

(۲) مساواتوں (ا + ب) مس (ط - فہ) = (ا - ب) مس (ط + فہ)،
ا.جم ۲ فہ + ب.جم ۲ ط = ج
سے ط ساقط کرو۔
(۳) ثابت کرو کہ
(95)
(اجب فہ + ب جم فہ) (اجب یہ + ب.جم یہ) جب (فہ - یہ)
+ (اجب یہ + ب.جم یہ) (اجب ط + ب جم ط) جب (یہ - ط)
+ (اجب ط + ب.جم ط) (اجب فہ + ب.جم فہ) جب (ط - فہ)
+ (ا^2 + ب^2) جب (فہ - یہ) جب (یہ - ط) جب (ط - فہ) = ۰ ؛
اور اس مساوات کی ہندسی طور پر توضیح کرو۔
(۴) مساوات جم^2 ط - جم^2 عہ = ۲ جم^3 ط (جم ط - جم عہ) - ۲ جب^3 ط (جب ط - جب عہ)
کو سادہ ترین شکل میں تحویل کرو اور اس کو حل کرو۔
(۵) ثابت کرو کہ تین حادہ زاویوں ا، ب، ج کا مجموعہ ۹۰° سے کم ہے جبکہ یہ زاویے رشتہ جم^2 ا + جم^2 ب + جم^2 ج = ا کو پورا کرتے ہوں۔
(۶) اگر ا + ب + ج = ۹۰° تو ثابت کرو کہ مس^2 ا + مس^2 ب + مس^2 ج کی کم سے کم قیمت ایک ہے۔
(۷) مساواتوں
{ جب ط + جب فہ + جب عہ = جم ط + جم فہ + جم عہ
{ ط + فہ = ۲عہ
سے ط اور فہ معلوم کرو۔
(۸) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

۸ جب $\frac{۱}{۲}$ ا جب $\frac{۱}{۲}$ ب جب $\frac{۱}{۲}$ ج ≯ ۱

(۹) اگر

(لا جب ط + ما جب فہ + ی جب پہ) ÷ (لا جم ط + ما جم فہ + ی جم پہ) = (۴ جب ط جب فہ جب پہ + جب (ط + فہ + پہ)) ÷ (۴ جم ط جم فہ جم پہ − جم (ط + فہ + پہ))

تو ثابت کرو کہ

(لا جب ½ (فہ + پہ − ط) + ما جب ½ (پہ + ط − فہ) + ی جب ½ (ط + فہ − پہ)) ÷ (لا جم ½ (فہ + پہ − ط) + ما جم ½ (پہ + ط − فہ) + ی جم ½ (ط + فہ − پہ))

= (۴ جب ½ (فہ + پہ − ط) جب ½ (پہ + ط − فہ) جب ½ (ط + فہ − پہ) + جب ½ (ط + فہ + پہ)) ÷ (۴ جم ½ (فہ + پہ − ط) جم ½ (پہ + ط − فہ) جم ½ (ط + فہ − پہ) − جم ½ (ط + فہ + پہ))

(۱۰) ثابت کرو کہ

(Σ جب ۳ عہ جب (بہ − جہ)) ÷ (Σ جب ۲ (جہ − بہ)) = جب (عہ + بہ + جہ)

اور عام صورت میں جبکہ ن کوئی طاق عدد ہو

(Σ جب ن عہ جب (بہ − جہ)) ÷ (Σ جب ۲ (جہ − بہ)) = Σ {جب (ف عہ + ق بہ + ر جہ)}

جہاں ف، ق، ر کوئی طاق اعداد ہیں جن کا مجموعہ ن ہے۔

(۱۱) اگر

ا² جم عہ جم بہ + ا (جب عہ + جب بہ) + ۱ = ۰،

ا² جم عہ جم جہ + ا (جب عہ + جب جہ) + ۱ = ۰،

تو ثابت کرو کہ

ا² جم بہ جم جہ + ا (جب بہ + جب جہ) + ۱ = ۰،

جہاں بہ، جہ کم ہیں π سے۔

(96)

(۱۲) اگر ط کی دو قیمتیں ط۱، ط۲ ہوں جو مساوات

$$۱ + \frac{\text{جم ط جم فہ}}{\text{جم}^{۲}\text{ عہ}} + \frac{\text{جب ط جب فہ}}{\text{جب}^{۲}\text{ عہ}} = ۰$$

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ اس مساوات میں اگر ط، فہ کی بجائے ط۱ اور ط۲ درج کئے جائیں تو وہ مساوات کو پورا کرینگے۔

(۱۳) اگر

ا جم عہ جم بہ + ب جب عہ جب بہ = ج ، ا جم بہ جم جہ + ب جب بہ جب جہ = ج ،

ا جم جہ جم ضہ + ب جب جہ جب ضہ = ج ، ا جم ضہ جم صہ + ب جب ضہ جب صہ = ج

اور　ا جم صہ جم عہ + ب جب صہ جب عہ = ج

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{\text{ا}^{۲}} + \frac{۱}{\text{ب}^{۲}} + \frac{۱}{\text{ج}^{۲}} = \left(\frac{۱}{\text{ب}} + \frac{۱}{\text{ج}}\right)\left(\frac{۱}{\text{ج}} + \frac{۱}{\text{ا}}\right)\left(\frac{۱}{\text{ا}} + \frac{۱}{\text{ب}}\right)$$

جہاں زاویے سب کے سب غیر مساوی، اور صفر اور ۲ π کے درمیان ہیں۔

(۱۴) اگر

جب (ط + عہ) = جب (فہ + عہ) = جب بہ

اور　ا جب (ط + فہ) + ب جب (ط - فہ) = ج

تو ثابت کرو کہ یا

ا جب (۲عہ ± ۲بہ) = ـ ج ، یا ا جب ۲عہ ∓ ب جب ۲بہ = ج

(۱۵) اگر مساوات　$\frac{\text{جم}^{۲ن}\text{ عہ}}{\text{جم}^{۲ن+۲}\text{ ط}} + \frac{\text{جب}^{۲ن}\text{ عہ}}{\text{جب}^{۲ن+۲}\text{ ط}} = ۱$

درست رہے جبکہ ن = ۱ تو ثابت کرو کہ وہ درست رہیگی جبکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو۔

(۱۶) مساواتوں

۴ (جم عہ جم طہ + جم فہ) (جم عہ جب طہ + جب فہ)

= ۴ (جم عہ جم طہ + جم پہ) (جم عہ جب طہ + جب پہ) = (جم فہ - جم پہ) (جب فہ - جب پہ)

سے طہ ساقط کرو، اور ثابت کرو کہ جم (فہ - پہ) = ۱، یا جم ۲ عہ

(۱۷) اگر مس ما / مس بہ = جب (لا - عہ) / جب عہ ، اور مس ما / مس ۲ بہ = جب (لا - ۲ عہ) / جب ۲ عہ

تو ثابت کرو کہ مس ما / جب ۲ بہ = جب لا / جب ۲ عہ = جم لا / (جم ۲ عہ - جم ۲ بہ)

(۱۸) اگر عہ، بہ، جہ، غیر مساوی ہوں اور ہر ایک π سے کم تو ثابت کرو کہ مساواتوں کا نظام

جب (۲ عہ - بہ - جہ) / جم (۲ عہ + بہ + جہ) = جب (۲ بہ - جہ - عہ) / جم (۲ بہ + جہ + عہ) = جب (۲ جہ - عہ - بہ) / جم (۲ جہ + عہ + بہ)

ایک واحد مساوات

جم ۲ (بہ + جہ) + جم ۲ (جہ + عہ) + جم ۲ (عہ + بہ) = ۰

کے مماثل ہے۔

(۱۹) اگر لا = ۲ جم (بہ - جہ) + جم (طہ + عہ) + جم (طہ - عہ)

= ۲ جم (جہ - عہ) + جم (طہ + بہ) + جم (طہ - بہ)

= -۲ جم (عہ - بہ) - جم (طہ + جہ) - جم (طہ - جہ)

تو ثابت کرو کہ لا = جب^{2} طہ اگر زاویوں عہ، بہ، جہ میں سے کسی دو کا فرق نہ معدوم ہو اور نہ π کے کسی ضعف کے مساوی ہو۔

(۲۰) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° اور اگر

∑ جب(۲ن + ۱) ا جب (ب - ج) = ۰

جہاں ن ایک صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ

∑ جب (ن - ۱) ا جب (ن + ۱) (ب - ج) = ۰

(۹۷) (۲۱) اگر مم ½(عہ + بہ) (جم جہ - جم ضہ) + مم ½(عہ + جہ) (جم ضہ - جم بہ)

+ مم ½ (عہ + ضہ) (جم بہ - جم جہ) = ۰

اور کوئی دو زاویے مساوی نہ ہوں، یا کسی دو زاویوں میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ

مم ½(بہ + عہ) (جم جہ - جم ضہ) + مم ½ (بہ + جہ) (جم ضہ - جم عہ)

+ مم ½ (بہ + ضہ) (جم عہ - جم جہ) = ۰

(۲۲) اگر جب(عہ + طہ) / جب(عہ + فہ) + جب(بہ + طہ) / جب(بہ + فہ) = جم(عہ + طہ) / جم(عہ + فہ) + جم(بہ + طہ) / جم(بہ + فہ) = ۲

تو ثابت کرو کہ یا تو عہ اور بہ میں ½ π کے طاق ضعف کا فرق ہے، یا طہ اور فہ میں π کے جفت ضعف کا فرق ہے۔

(۲۳) اگر ا جم (فہ + پہ) + ب جم (فہ - پہ) + ج = ۰،

ا جم (پہ + طہ) + ب جم (پہ - طہ) + ج = ۰،

ا جم (طہ + فہ) + ب جم (طہ - فہ) + ج = ۰،

اور اگر طہ، پہ، فہ سب غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ا² - ب² + ۲ ب ج = ۰

(۲۴) اگر جم(عہ + بہ + طہ) / جب(عہ + بہ) جم² جہ = جم (جہ + عہ + طہ) / جم (جہ + عہ) جم² بہ

اور به، جه غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات بالا کا ہر رکن

$$= \frac{\text{جم}\,(\text{به} + \text{جه} + \text{ط})}{\text{جب}\,(\text{به} + \text{جه})\,\text{جم}^{2}\,\text{عه}}$$

اور

$$\text{جم ط} = \frac{\text{جب}\,(\text{به}+\text{جه})\,\text{جب}\,(\text{جه}+\text{عه})\,\text{جب}\,(\text{عه}+\text{به})}{\text{جم}\,(\text{به}+\text{جه})\,.\,\text{جم}\,(\text{جه}+\text{عه})\,.\,\text{جم}\,(\text{عه}+\text{به}) + \text{جب}^{2}\,(\text{عه}+\text{به}+\text{جه})}$$

(۲۵) اگر ا، ب، ج مثبت زاویے ہوں جن کا مجموعہ ۱۸۰° ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج} > ۱ \quad \text{اور} \quad \not> \frac{۳}{۲}$$

(۲۶) حل کرو مساوات

$$۶۴\,\text{جب}^{۶}\,\text{ط} + \text{جب}\,۷\,\text{ط} = ۰$$

(۲۷) اگر ۲ س = لا + ما + ی تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,(\text{س} - \text{لا}) + \text{مس}\,(\text{س} - \text{ما}) + \text{مس}\,(\text{س} - \text{ی}) - \text{مس س}$$

$$= \frac{۴\,\text{جب لا جب ما جب ی}}{۱ - \text{جم}^{۲}\,\text{لا} - \text{جم}^{۲}\,\text{ما} - \text{جم}^{۲}\,\text{ی} - ۲\,\text{جم لا جم ما جم ی}},$$

$$\text{نیز}\quad \text{مس}^{-۱}(\text{س} - \text{لا}) + \text{مس}^{-۱}(\text{س} - \text{ما}) + \text{مس}^{-۱}(\text{س} - \text{ی}) - \text{مس}^{-۱}\,\text{س}$$

$$= \text{مس}^{-۱}\frac{۱۶\,\text{لا ما ی}}{(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} + ۴)^{۲} - ۴\,(\text{ما}^{۲}\,\text{ی}^{۲} + \text{ی}^{۲}\,\text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۲}\,\text{ما}^{۲})}$$

(۲۸) اگر

$$\frac{\text{جم ط}}{\text{جم عه}} + \frac{\text{جب ط}}{\text{جب عه}} = \frac{\text{جم فه}}{\text{جم عه}} + \frac{\text{جب فه}}{\text{جب عه}} = ۱$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم ط}\,.\,\text{جم فه}}{\text{جم}^{۲}\,\text{عه}} + \frac{\text{جب ط جب فه}}{\text{جب}^{۲}\,\text{عه}} + ۱ = ۰$$

(۲۹) اگر ۲ جب عہ جم (ط + فہ) = ۲ جم (ط - فہ) + جم^۲ عہ ،

اور ۲ جب عہ جم (ط + پہ) = ۲ جم (پہ - ط) + جم^۲ عہ ،

تو ثابت کرو کہ ۲ جب عہ جم (فہ + پہ) = ۲ جم (فہ - پہ) + جم^۲ عہ

(۳۰) اگر جم (ما - ی) + جم (ی - لا) + جم (لا - ما) = - ۳/۲

تو ط کی تمام قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

جم^۳ (لا + ط) + جم^۳ (ما + ط) + جم^۳ (ی + ط) - ۳ جم (لا + ط) جم (ما + ط) جم (ی + ط) = ۰

(۳۱) اگر

جب ر ا / ل = جب (ر + ۱) ا / م = جب (ر + ۲) ا / ن

تو ثابت کرو کہ

جم ر ا / (۲ م^۲ - ل (ل + ن)) = جم (ر + ۱) ا / (م (ن - ل)) = جم (ر + ۲) ا / (ن (ل + ن) - ۲ م^۲)

(۳۲) ثابت کرو کہ مساواتیں

(لا + ۱/لا) جب عہ = ما/ی + ی/ما + جم^۲ عہ ،

(ما + ۱/ما) جب عہ = ی/لا + لا/ی + جم^۲ عہ ،

(ی + ۱/ی) جب عہ = لا/ما + ما/لا + جم^۲ عہ

غیر تابع نہیں ہیں اور وہ

لا + ما + ی = ۱/لا + ۱/ما + ۱/ی = - جب عہ

کے مماثل ہیں ۔

۳۳ ۔ ثابت کرو کہ جملہ

۲ جم (بہ - جہ) جم (طہ + بہ) جم (طہ + جہ) + ۲ جم (جہ - عہ) جم (طہ + جہ) جم (طہ + جہ)

+ ۲ جم (عہ - بہ) جم (طہ + عہ) جم (طہ + بہ) - جم۲ (طہ + عہ) - جم۲ (طہ + بہ) - جم۲ (طہ + جہ) - ۱

طہ پر منحصر نہیں ہے، اس کی قیمت جیوب التمام کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کرو۔

(۳۴) اگر مساوات

مس (طہ + ¼ π) = ۳ مس ۳ طہ

کے چار حل عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں اور ان میں سے کسی دو کے مماس مساوی نہ ہوں تو ثابت کرو کہ

مس عہ + مس بہ + مس جہ + مس ضہ = ۰،

مس۲ عہ + مس۲ بہ + مس۲ جہ + مس۲ ضہ = ۴/۳

(۳۵) اگر　　۶ مس (ر + لا) = ۳ مس (ر + ما) = ۲ مس (ر + ی)

تو ثابت کرو کہ　　۳ جب۲ (لا - ما) + ۵ جب۲ (ما - ی) - ۲ جب۲ (ی - لا) = ۰

(۳۶) حل کرو مساواتیں

جب⁻¹ لا - جب⁻¹ ما = ۲/۳ π
جم⁻¹ لا - جم⁻¹ ما = ۱/۳ π

(۳۷) ثابت کرو کہ مسلسل کسر

۱/(۲ مس عہ +) ۱/(۲ مس عہ +) ۱/(۲ مس عہ) ......

کا ن واں مستدق ہے

[(مس عہ + قط عہ)ن - (مس عہ - قط عہ)ن] / [(مس عہ + قط عہ)ن+۱ - (مس عہ - قط عہ)ن+۱]

(۳۸) مساواتوں

۳ ل جم طہ + ل جم ۳ طہ = ۴ لا
۳ ل جب طہ - ل جب ۳ طہ = ۴ ما

سے ط ساقط کرو ۔

(۳۹) اگر $\frac{\text{مس (ط - عہ)}}{\text{ف}} = \frac{\text{مس (فہ - عہ)}}{\text{ق}} = \frac{\text{مس (یہ - عہ)}}{\text{ر}}$ (۹۹)

تو ثابت کرو کہ

$\text{ف (ق - ر)}^2 \text{ جم (فہ - یہ)} + \text{ق (ر - ف)}^2 \text{ جم (یہ - ط)} + \text{ر (ف - ق)}^2 \text{ جم (ط - فہ)} = 0$

(۴۰) $\frac{1}{1 + \text{ا جم ط} + \text{ب جب ط}}$ کو اس شکل

$\frac{1}{2}\text{ا} + \text{ا}_1 \text{ جم (ط - عہ)} + \text{ا}_2 \text{ جم ۲ (ط - عہ)} + \dots$

کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ ۔

(۴۱) مساوات مس ۳ ط ـ مس ۲ ط ـ مس ط = ۰ کو حل کرو ۔

(۴۲) اگر

$\text{جم}^3 \text{ لا} + \text{جم}^3 \text{ ما} = \text{جم ۳ عہ}$، $\text{جب}^3 \text{ لا} + \text{جب}^3 \text{ ما} = \text{جب ۳ عہ}$ اور لا + ما = ۲ بہ

تو ثابت کرو کہ

$\text{۸ جب}^2 \text{ ۲ (عہ + بہ)} = \text{۲۷ جب ۲ بہ جب}^2 \text{ ۴ بہ جم (۳ عہ + بہ)}$

(۴۳) اگر ا جم فہ جم یہ + ب جب فہ جب یہ = ج،

ا جم یہ جم ط + ب جب یہ جب ط = ج،

ا جم ط جم فہ + ب جب ط جب فہ = ج

تو ثابت کرو کہ ب ج + ج ا + ا ب = ۰، اِلّا آنکہ ا = ب = ج

(۴۴) حل کرو مساوات

$\text{جم}^{-1} (\text{لا} + \frac{1}{2}) + \text{جم}^{-1} \text{ لا} + \text{جم}^{-1} (\text{لا} - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \pi$

(۴۵) مساواتوں

ا۳ ما جب فہ + ب۳ لا جم فہ + ا ب (ا۲ جب۲ فہ + ب) جم۲ فہ = ۰ ،

ا لا قط فہ − ب ما قم فہ = ا۲ − ب۲

سے فہ ساقط کرو۔

(۴۶) حل کرو مساوات

جم ۵ ط + ۵ جم ۳ ط + ۱۰ جم ط = ۱/۲

(۴۷) مساواتوں

ا جم ط . جم ۲ ط = ۲ (ا جم ط − لا) ،

ا جب ط جب ۲ ط = ۲ (ا جب ط − ما)

سے ط ساقط کرو۔

(۴۸) ثابت کرو کہ مساوات　　۳ لا + ما = نَ (جہاں ن صحیح عدد ہے)
کے حل ثابت صحیح اعداد میں (بشمول صفر) معلوم کیے جائیں تو ان کی تعداد ہے

۱/۳ [ن + ۲ + (−۱)^ن − (جم ۱/۶ (۲ن + ۱) π) / (جم ۱/۶ π)]

(۴۹) حل کرو مساوات

۶ جم ۳ ط − جب ۳ ط − ۱۰ جم ۲ ط + ۵ جب ۲ ط + ۲۲ جم ط − ۵ جب ط = ۱۰

(۵۰) (قم۲ ط − مس۲ ط) / (قم۲ ط + مس۲ ط − ۱)

کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

(۵۱) (100) ثابت کرو کہ کسر مسلسل

(قط۲ عہ)/(−۴) (قط۲ عہ)/(−۴) (قط۲ عہ)/(−۴) .... ر خارج قسمتوں تک

= (جب ر عہ) / (۲ جب (ر + ۱) عہ جم عہ)

(۵۲) مساواتوں

ا جب (طہ - عہ) + ب جب (طہ + عہ) = لا جب (فہ + بہ) + ما جب (فہ - بہ)،

ا جم (طہ - عہ) - ب جم (طہ + عہ) = لا جم (فہ + بہ) - ما جم (فہ - بہ)

طہ ± فہ = جہ

سے طہ، فہ ساقط کرو۔

(۵۳) ثابت کرو کہ

Σ جم عہ (جم ۳ بہ - جم ۳ جہ)

= ۴ (جم بہ - جم جہ) (جم جہ - جم عہ) (جم عہ - جم بہ) (جم عہ + جم بہ + جم جہ)

(۵۴) اگر ا جم عہ + ب جم بہ + ج جم جہ = ۰،

ا جب عہ + ب جب بہ + ج جب جہ = ۰،

ا قط عہ + ب قط بہ + ج قط جہ = ۰

تو ثابت کرو کہ بالعموم ± ا ± ب ± ج = ۰

(۵۵) مساواتوں

جب ۳ ($\frac{1}{4}\pi$ + طہ) + ۳ جب ($\frac{1}{4}\pi$ + طہ) = ۲ ا،

جب ۳ ($\frac{1}{4}\pi$ - طہ) + ۳ جب ($\frac{1}{4}\pi$ - طہ) = ۲ ب

سے طہ ساقط کرو۔

(۵۶) اگر مساوات مس (طہ + عہ) = ک مس ۲ طہ

کو پورا کرنیوالی طہ کی قیمتیں طہ۱، طہ۲، طہ۳ ہوں اور ان میں سے کسی دو میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ

طہ۱ + طہ۲ + طہ۳ + عہ

π کا ایک ضعف ہے۔

(۵۷) ثابت کرو کہ

Σ (جم ۴ ا) / (جب ا جب (ا - ب) جب (ا - ج)) = ۸ جب (ا + ب + ج) + قم ا قم ب قم ج

(۵۸) ثابت کرو کہ

۲ {جب³ (ط - ع) جم ۲ (ع - ف) جب (ب - ج) + جب³ (ط - ب) جم ۲ (ب - ف) جب (ج - ع)
+ جب³ (ط - ج) جم ۲ (ج - ف) جب (ع - ب)}

= {جب ۲ ع + جب ۲ ب + جب ۲ ج - ۳ جب ۲ ط} جب (ب - ج) جب (ج - ع) جب (ع - ب)

جہاں ف = ½ (ع + ب + ج - ۳ ط)

(۵۹) اگر ا + ب + ج + د = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

(س - جب ا) (س - جب ب) (س - جب ج) (س - جب د)

= ¼ (جب ا جب ب + جب ج جب د) (جب ب جب ج + جب ا جب د)
(جب ج جب ا + جب ب جب د)

جہاں ۲ س = جب ا + جب ب + جب ج + جب د

(101)

(۶۰) ثابت کرو کہ سلسلہ

جم ع + جم (ع + ب) + جم (ع + ۲ ب) + ...

کی ن رقموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ جبکہ ان میں سے دو دو کو لیکر ضرب دیا جائے یہ ہے

¼ قم² ½ ب قط ½ ب جب ½ ن ب [جب ½ ن ب جم ½ ب + جب ½ (ن - ۱) ب
× جم {۲ ع + (ن - ۱) ب}] - ¼ ن

(۶۱) اگر (جم ط + جب ط) / (۲ + جم ۲ ط + جب ۲ ط) = ۴ (جم ۲ ط - جب ۲ ط) (جم ط - جب ط) / (۴ (جم ۲ ط - جب ۲ ط)² - (جم ط - جب ط)²)

تو ثابت کرو کہ ط کی تین قیمتیں ہونگی ایسی کہ

مس ط₁ + مس ط₂ + مس ط₃ = ۹

(۶۲) اگر مس ۲ ط۔ مس ط = مس ۲ فہ ۔ مس فہ = مس ۲ بہ ۔ مس بہ
توثابت کرو کہ ط + فہ + بہ، ½ π کا ایک طاق ضعف ہے بشرطیکہ مس ط، مس فہ، مس بہ سب غیر مساوی ہوں۔

(۶۳) اگر
لا جم عہ + ما جب عہ + ی + جم ۲ عہ = ۰،
لا جم بہ + ما جب بہ + ی + جم ۲ بہ = ۰،
لا جم جہ + ما جب جہ + ی + جم ۲ جہ = ۰،

توثابت کرو کہ

لا جم فہ + ما جب فہ + ی + جم ۲ فہ
= ۸ جب ½ (عہ + بہ + جہ + فہ) جب ½ (فہ ۔ عہ) جب ½ (فہ ۔ بہ) جب ½ (فہ ۔ جہ)

(۶۴) مساواتوں

مس ط + مس فہ = ا،
قط ط + قط فہ = ب،
قم ط + قم فہ = ج

سے ط اور فہ ساقط کرو اور ثابت کرو کہ اگر ب اور ج ہم علامت ہوں تو

ب ج > ۲ ا

(۶۵) ثابت کرو کہ مساواتوں

جم (ط ۔ ۳ عہ) / جم³ عہ = جم (ط ۔ ۳ بہ) / جم³ بہ = جم (ط ۔ ۳ جہ) / جم³ جہ

سے ط کو ساقط کیا جائے تو نتیجہ حاصل ہوتا ہے

جب (بہ ۔ جہ) جب (جہ ۔ عہ) جب (عہ ۔ بہ) {جم (عہ + بہ + جہ) ۔ ۴ جم عہ جم بہ جم جہ} = ۰

(۶۶) اگر (۱ ۔ لا + لا²)⁻¹ کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ لاⁿ کا سر

جب ⅓ (ن + ۱) π \ جب ⅓ π ہے۔

(۶۷) ثابت کرو کہ Σ جم ۴ عہ جب (بہ + جہ) جب (بہ ۔ جہ)
= ۔ ۸ جب (بہ ۔ جہ) جب (جہ ۔ عہ) جب (عہ ۔ بہ) جب (بہ + جہ) جب (جہ + عہ) جب (عہ + بہ)

(۶۸) ثابت کرو کہ

Σ جم ۲ (بہ + جہ - عہ) جب (بہ - جہ). جم عہ

= ۸ جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) جم عہ. جم بہ. جم جہ

(۶۹) اگر ا جب ط + ب جم ط = ا قم ط + ب قط ط

تو ثابت کرو کہ مساوات کا ہر رکن

= (ا$^{۲/۳}$ - ب$^{۲/۳}$) (ا$^{۲/۳}$ + ب$^{۲/۳}$)$^{۱/۲}$

(۷۰) جب (بہ - جہ) + جب (جہ - عہ) + جب (عہ - بہ)

کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

(102)

(۷۱) حل کرو مساوات

جم (لا - ا). جم (لا - ب). جم (لا - ج)

= جب ا جب ب جب ج جب لا + جم ا. جم ب جم ج. جم لا

(۷۲) حل کرو مساوات

جم ۲ لا + جم ۲ (لا - ا) + جم ۲ (لا - ب) + جم ۲ (لا - ج) = ۴ جم ا جم ب. جم ج

(۷۳) حل کرو مساوات

جب^{۳} ۳ ا + جب^{۳} ۲ ا = جب^{۳} ا (جب ۳ ا + جب ۲ ا)

(۷۴) مساواتوں

ا. جم ۲ ط + ب جب ۲ ط = ج،

اَ. جم ۳ ط + بَ جب ۳ ط = ۰

سے ط ساقط کرو۔

(۷۵) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جب^{۲} $\frac{۱}{۲}$ ب جب^{۲} $\frac{۱}{۲}$ ج + جب^{۲} $\frac{۱}{۲}$ ج جب^{۲} $\frac{۱}{۲}$ ا + جب^{۲} $\frac{۱}{۲}$ ا جب^{۲} $\frac{۱}{۲}$ ب

≮ $\frac{۱}{۱۲}$ (جب^{۲} ا + جب^{۲} ب + جب^{۲} ج)

(۷۶) مساواتوں

۴ لا = ۵ اجم ط − اجم ۵ ط ،

۴ ما = ۵ اجب ط − اجب ۵ ط

سے ط ساقط کرو ۔

(۷۷) اگر جم ۲ ا جب (بہ − جہ) قط (بہ + جہ)

= جم ۲ بہ جب (جہ − عہ) قط (جہ + عہ) = جم ۲ جہ جب (عہ − بہ) قط (عہ + بہ)

تو ثابت کرو کہ

جم ۲ عہ + جم ۲ بہ + جم ۲ جہ = ۰ ،

اور جب ۲ (بہ + جہ) + جب ۲ (جہ + عہ) + جب ۲ (عہ + بہ) = ۰

(۷۸) ثابت کرو کہ

$\sum_{م=۰}^{م=ہ}$ جم (م عہ + بہ) = جم ($\frac{1}{2}$ ہ عہ + بہ) جب $\frac{1}{2}$ (ہ + ۱) عہ قم $\frac{1}{2}$ عہ

اور $\sum_{م=۰}^{م=ہ}$ $\sum_{ن=۰}^{ن=ڽ}$ $\sum_{پ=۰}^{پ=پ}$ ... جم (م عہ + ن بہ + پ جہ + ...)

= جم $\frac{1}{2}$ (ہ عہ + ڽ بہ + پ جہ + ...) جب $\frac{1}{2}$ (ہ + ۱) عہ جب $\frac{1}{2}$ (ڽ + ۱) بہ ....

× قم $\frac{1}{2}$ عہ قم $\frac{1}{2}$ بہ ....

امثلہ ۷۹ تا ۹۳ کے حسب ذیل سلسلوں کو ن رقموں تک جمع کرو :-

(۷۹) جب^{۲} عہ + جب^{۲} ۲ عہ + جب^{۲} ۳ عہ + ... + جب^{۲} ن عہ

(۸۰) جب^{۲} عہ جب ۲ عہ + جب^{۲} ۲ عہ جب ۳ عہ + ... + جب^{۲} ن عہ جب (ن + ۱) عہ

(۸۱) قم عہ قم (عہ + بہ) + قم (عہ + بہ) قم (عہ + ۲ بہ) + قم (عہ + ۲ بہ) قم (عہ + ۳ بہ)

+ .... + قم {عہ + (ن − ۱) بہ} قم (عہ + ن بہ)

(۸۲) جب لا جب ۲ لا جب ۳ لا + جب ۲ لا جب ۳ لا جب ۴ لا + ...
+ جب ن لا جب (ن + ۱) لا جب (ن + ۲) لا

(۸۳) جب^۳ عہ + ۱/۳ جب^۳ ۳ عہ + ۱/۳^۲ جب^۳ ۳^۲ عہ + . . . + ۱/۳^(ن-۱) جب^۳ ۳^(ن-۱) عہ

(۸۴) مس طہ مس ۳ طہ + مس ۲ طہ مس ۴ طہ + . . . + مس ن طہ مس (ن + ۲) طہ

(۸۵) مس طہ قط ۲ طہ + مس ۲ طہ قط ۲^۲ طہ + . . . + مس ۲^(ن-۱) طہ قط ۲^ن طہ　(103)

(۸۶) مس لا + ۱/۲ مس لا/۲ + ۱/۴ مس لا/۴ + . . . + ۱/۲^(ن-۱) مس لا/۲^(ن-۱)

(۸۷) مس لا قط^۲ لا + ۱/۸ مس لا/۲ قط^۲ لا/۲ + ۱/۸^۲ مس لا/۲^۲ قط^۲ لا/۲^۲ + ...
+ ۱/۸^(ن-۱) مس لا/۲^(ن-۱) قط^۲ لا/۲^(ن-۱)

(۸۸) ۱ + ج جم طہ جم فہ + ج^۲ جم ۲ طہ جم ۲ فہ + . . . + ج^(ن-۱) جم (ن-۱) طہ جم (ن-۱) فہ

(۸۹) جم ۲ طہ / جب^۲ ۲ طہ + ۲ جم ۴ طہ / جب^۲ ۴ طہ + ۴ جم ۸ طہ / جب^۲ ۸ طہ + . . . + ۲^(ن-۱) جم ۲^ن طہ / جب^۲ ۲^ن طہ

(۹۰) جب طہ / (جم طہ + جم ۱^۲ طہ) + جب ۲ طہ / (جم ۲ طہ + جم ۲^۲ طہ) + . . . + جب ن طہ / (جم ن طہ + جم ن^۲ طہ)

(۹۱) جم ۲ عہ / (۱ - جم^۲ ۲ عہ قط^۲ عہ) + جم ۳ عہ / (۱ - جم^۲ ۳ عہ قط^۲ عہ) + . . . + جم (ن + ۱) عہ / (۱ - جم^۲ (ن + ۱) عہ قط^۲ عہ)

(۹۲) ۱ × ۳ جب π/ن + ۳ × ۵ جب ۳π/ن + . . . + (۲ن - ۱)(۲ن + ۱) جب (۲ن - ۱)π/ن

(۹۳) ۳ × ۴ جب عہ + ۴ × ۵ جب ۲ عہ + . . . + (ن + ۲)(ن + ۳) جب ن عہ

(۹۴) اگر مساوات

جب (طہ + عہ) + جب (طہ + بہ) + جب (عہ + بہ) = ۰

کے دو حل ط۱، ط۲ ہوں جہاں ط۱، ط۲، عہ، بہ میں سے ہر ایک ۲ π سے کم ہے تو ثابت کرو کہ

جب (ط۱ + ط۲) + جب (بہ + ط۱) + جب (بہ + ط۲) = ۰

(۹۵) - ثابت کرو کہ

۱/۲ مم^(-۱) (۲ ∛۴ + ۱)/√۳ + ۱/۳ مس^(-۱) (∛۴ + ۱)/√۳ = ۱/۶ π

اور ۱/۲ مس^(-۱) (∛۲ + ۱)/√۳ - ۱/۳ مس^(-۱) (۲ ∛۲ + ۱)/√۳ = ۱/۳۶ π

(۹۶) اگر ط کی چار غیر مساوی قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ، ہر ایک ۲ π سے کم ہو اور وہ مساوات

جم۲ (لہ - ط) + جم (مہ - ط) + جم نہ = ۰

کو پورا کریں تو ثابت کرو کہ

عہ + بہ + جہ + ضہ - ۴ لہ = ۲ ن π،

اور جب ۱/۲ (بہ + جہ + ضہ - عہ - ۲ مہ) + جب ۱/۲ (جہ + ضہ + عہ - بہ - ۲ مہ)

+ جب ۱/۲ (ضہ + عہ + بہ - جہ - ۲ مہ) + جب ۱/۲ (عہ + بہ + جہ - ضہ - ۲ مہ) = ۰

ساتواں باب

ضعفی زاویوں کے تفاعلوں کو پھیلانا

جیب یا جیب التمام کی نزولی قوتوں میں سلسلہ

۸۷ — دفعہ ۱۵ کے ضابطہ (۴۰) میں اگر ہم جیب^2 ا کی بجائے اس کی قیمت (۱ ـ جم^2 ا)^ر لکھیں اور سلسلہ کو جم ا کی قوتوں میں ترتیب دیں تو جم ن ا کے لیے صرف جم ا کی قوتوں میں ایک جملہ حاصل ہوگا۔ ا کی بجائے ط رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}\,ن\,ط = \text{جم}^{ن}\,ط - \frac{ن(ن-1)}{\lfloor 2}\,\text{جم}^{ن-2}\,ط\,(1-\text{جم}^{2}\,ط) + \dots$$

$$+\,(-1)^{ر}\,\frac{ن(ن-1)\dots(ن-2ر+1)}{\lfloor 2ر}\,\text{جم}^{ن-2ر}\,ط\,(1-\text{جم}^{2}\,ط)^{ر} + \dots$$

اِس سلسلہ میں $(-1)^{ر}\,\text{جم}^{ن-2ر}\,ط$ کا سر ہے

$$\frac{ن(ن-1)\dots(ن-2ر+1)}{\lfloor 2ر} + \frac{ن(ن-1)\dots(ن-2ر-1)}{\lfloor 2ر+2}\,(ر+1)$$

$$+\,\frac{ن(ن-1)\dots(ن-2ر-3)}{\lfloor 2ر+4} \times \frac{(ر+1)(ر+2)}{\lfloor 2} + \dots$$

یہ سر $(1+لا)^{ن}$ اور $\left(1-\frac{1}{لا^{2}}\right)^{-(ر+1)}$ سے حاصل ضرب میں $لا^{2ر}$ کا جو

سر ہے اُس کے مساوی ہے جہاں لا کو ایک سے بڑا فرض کیا گیا ہے ؛
اس لیے یہ سر، اُس سر کے مساوی ہے جو $(۱+لا)^{ن-ر-۱}(۱-\frac{۱}{لا})^{-(ر+۱)}$ کے
پھیلاؤ میں $لا^{ر-۱}$ کا ہے۔ یہ آخری سر

$$= \frac{(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\lfloor ر}\Big\{ر+(ن-۲ر)(ر+۱)+\frac{(ن-۲ر)(ن-۲ر-۱)}{\lfloor ۲}(ر+۲)+\cdots\Big\}$$

(105)

اور یہ

$$= \frac{(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\lfloor ر}\Big\{ر(۱+۱)^{ن-۲ر}+(ن-۲ر)(۱+۱)^{ن-۲ر-۱}\Big\}$$

$$= \frac{ن(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\lfloor ر}\,۲^{ن-۲ر-۱}$$

$جم^{ن}ط$ کا سر $\frac{۱}{۲}\{(۱+۱)^{ن}+(۱-۱)^{ن}\}$ یعنی $۲^{ن-۱}$ حاصل ہوتا ہے؛ ۔ $جم^{ن-۲}ط$
کا سر $(۱+لا)^{ن-۲}(۱-\frac{۱}{لا})^{-۲}$ کے پھیلاؤ میں اُس رقم کے مساوی ہے جس میں
لا شامل نہیں ہوتا اور یہ رقم ہے $(۱+۱)^{ن-۲}+(ن-۲)(۱+۱)^{ن-۳}$ یا

$$ن\times۲^{ن-۳}$$

پس

$$جم\,ن\,ط=۲^{ن-۱}جم^{ن}ط-\frac{ن}{\lfloor ۱}۲^{ن-۳}جم^{ن-۲}ط+\frac{ن(ن-۳)}{\lfloor ۲}۲^{ن-۵}جم^{ن-۴}ط\ldots(۱)$$

اس کی عام رقم ہے

$$(-۱)^{ر}\frac{ن(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\lfloor ر}۲^{ن-۲ر-۱}جم^{ن-۲ر}ط$$

اسی طرح دفعہ ۱۵ کے ضابطہ (۳۹) سے ہمیں سلسلہ ملتا ہے

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = ۲^{ن-۱}\,\text{جم}^{ن-۱}\text{ط} - \frac{ن-۲}{۱}\,۲^{ن-۳}\,\text{جم}^{ن-۳}\text{ط}$$

$$+ \frac{(ن-۳)(ن-۴)}{\underline{|۲}}\,۲^{ن-۵}\,\text{جم}^{ن-۵}\text{ط} \ldots\ldots (۲)$$

اور اس کی عام رقم ہے

$$(-۱)^{ر}\,\frac{(ن-ر-۱)\ldots(ن-۲ر)}{\underline{|ر}}\,۲^{ن-۲ر-۱}\,\text{جم}^{ن-۲ر-۱}\text{ط}$$

۷۹ — اگر ضابطوں (۱) اور (۲) میں ط کو $\frac{۱}{۲}\pi$ − ط میں تبدیل کریں تو ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$(-۱)^{\frac{ن}{۲}}\,\text{جم ن ط} = ۲^{ن-۱}\,\text{جب}^{ن}\text{ط} - \frac{ن}{۱}\,۲^{ن-۳}\,\text{جب}^{ن-۲}\text{ط} + \frac{ن(ن-۳)}{\underline{|۲}}\,۲^{ن-۵}\,\text{جب}^{ن-۴}\text{ط}$$

$$- \ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$(-۱)^{\frac{ن}{۲}-۱}\,\text{جب ن ط}\,\backslash\,\text{جم ط} = ۲^{ن-۱}\,\text{جب}^{ن-۱}\text{ط} - \frac{ن-۲}{۱}\,۲^{ن-۳}\,\text{جب}^{ن-۳}\text{ط}$$

$$+ \frac{(ن-۳)(ن-۴)}{\underline{|۲}}\,۲^{ن-۵}\,\text{جب}^{ن-۵}\text{ط} - \ldots (۴)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$(-۱)^{\frac{۱}{۲}(ن-۱)}\,\text{جب ن ط} = ۲^{ن-۱}\,\text{جب}^{ن}\text{ط} - \frac{ن}{۱}\,۲^{ن-۳}\,\text{جب}^{ن-۲}\text{ط}$$

$$+ \frac{ن(ن-۳)}{\underline{|۲}}\,۲^{ن-۵}\,\text{جب}^{ن-۴}\text{ط} - \ldots (۵)$$

$$(-۱)^{\frac{۱}{۲}(ن-۱)}\,\text{جم ن ط}\,\backslash\,\text{جم ط} = ۲^{ن-۱}\,\text{جب}^{ن-۱}\text{ط} - \frac{ن-۲}{۱}\,۲^{ن-۳}\,\text{جب}^{ن-۳}\text{ط}$$

(106)

$$+ \frac{(ن-۳)(ن-۴)}{\underline{|۲}}\,۲^{ن-۵}\,\text{جب}^{ن-۵}\text{ط} \ldots (۶)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

جیب یا جیب التمام کی صعودی قوتوں میں سلسلے

۸۰ — جم ن ط، جب ن ط کے پھیلاؤ جم ط یا جب ط کی صعودی قوتوں میں معلوم کرنے کے لیے ہم اُن چھ سلسلوں کو جو اوپر حاصل کیے گئے ہیں اُلٹی ترتیب میں لکھ سکتے ہیں۔ تاہم مطلوبہ سلسلوں کو بالراست معلوم کرنا بہتر ہوگا۔

اول فرض کرو کہ ن جفت ہے تو

$$\text{جم ن ط} = (۱ - \text{جب}^{۲}\text{ط})^{\frac{ن}{۲}} - \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}(۱ - \text{جب}^{۲}\text{ط})^{\frac{۱}{۲}ن-۱}\,\text{جب}^{۲}\text{ط}$$

$$+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۴}(۱ - \text{جب}^{۲}\text{ط})^{\frac{۱}{۲}ن-۲}\,\text{جب}^{۴}\text{ط} - \dots\dots ;$$

اب مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ۱ − جب^{۲} ط کی ہر قوت کو پھیلانے سے

$$\text{جم ن ط} = ۱ - \left\{\frac{ن}{۲} + \frac{ن(ن-۱)}{۲}\right\}\text{جب}^{۲}\text{ط} + \left\{\frac{\frac{ن}{۲}\left(\frac{ن}{۲}-۱\right)}{\lfloor ۲} + \frac{ن(ن-۱)}{۲}\left(\frac{ن}{۲}-۱\right)\right.$$

$$\left. + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۴}\right\}\text{جب}^{۴}\text{ط} - \dots\dots$$

اس پھیلاؤ میں $(-۱)^{س}$ جب^{۲س} ط کا سر ہے

$$\frac{\frac{۱}{۲}ن\left(\frac{۱}{۲}ن-۱\right)\dots\left(\frac{۱}{۲}ن-س+۱\right)}{\lfloor س} + \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}\,\frac{\left(\frac{۱}{۲}ن-۱\right)\dots\left(\frac{۱}{۲}ن-س+۱\right)}{\lfloor س-۱}$$

$$+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۴}\,\frac{\left(\frac{۱}{۲}ن-۲\right)\dots\left(\frac{۱}{۲}ن-س+۱\right)}{\lfloor س-۲} + \dots\dots$$

جس کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{1}{\lfloor \text{س}} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۴)\cdots(\text{ن}-۲\text{س}+۲)}{۱\times۳\times۵\times\cdots(۲\text{س}-۱)} \Big\{ \left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}\right)\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}-۱\right)\cdots\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}-\text{س}+۱\right)$$

$$+\text{س}\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}\right)\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}-۱\right)\cdots\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}-\text{س}+۲\right)\left(\frac{\text{ن}-۱}{۲}\right)$$

$$+\frac{\text{س}(\text{س}-۱)}{\lfloor ۲}\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}\right)\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}-۱\right)\cdots\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}-\text{س}+۳\right)\left(\frac{\text{ن}-۱}{۲}\right)\left(\frac{\text{ن}-۱}{۲}-۱\right)$$

$$+\cdots\cdots$$

اب وانڈر مانڈ کا مسئلہ[1] ہے　　(107)

$$(\text{ف}+\text{ق})_{\text{س}} = \text{ف}_{\text{س}} + \text{س}\,\text{ف}_{\text{س}-۱}\,\text{ق}_۱ + \frac{\text{س}(\text{س}-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{ف}_{\text{س}-۲}\,\text{ق}_۲ + \cdots$$

جس میں $\text{ف}_{\text{س}}$ ، $\text{ف}(\text{ف}-۱)\cdots(\text{ف}-\text{س}+۱)$ کو تعبیر کرتا ہے۔ چونکہ یہ مسئلہ ف اور ق کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے، اس لیے فرض کرو کہ $\text{ف}=\frac{۲\text{س}-۱}{۲}$، $\text{ق}=\frac{\text{ن}-۱}{۲}$، تب خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلوں پر یہ مسئلہ استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $(-۱)^{\text{س}}$ جب$^{۲\text{س}}$ ط کا سر ہے

$$\frac{1}{\lfloor \text{س}}\,\frac{\text{ن}(\text{ن}-۲)\cdots(\text{ن}-۲\text{س}+۲)}{۱\times۳\times۵\times\cdots(۲\text{س}-۱)}\left(\tfrac{1}{۲}\text{ن}+\text{س}-۱\right)\left(\tfrac{1}{۲}\text{ن}+\text{س}-۲\right)\cdots\left(\tfrac{1}{۲}\text{ن}\right)$$

یا

$$\frac{\text{ن}^۲(\text{ن}^۲-۲^۲)(\text{ن}^۲-۴^۲)\cdots(\text{ن}^۲-\overline{۲\text{س}-۲}^{\,۲})}{\lfloor ۲\text{س}}$$

۱؎ دیکھو اسمتھ کا الجبرا صفحہ ۲۸۸، یا کرسٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ ۹۔

پس جب ، ن جفت ہو تو

$$\text{جم ن ط} = ۱ - \frac{\text{ن}^۲}{|\underline{۲}}\,\text{جب}^۲\text{ط} + \frac{\text{ن}^۲(\text{ن}^۲-۲^۲)}{|\underline{۴}}\,\text{جب}^۴\text{ط} \;\ldots\ldots$$

$$+(-۱)^{\text{س}}\,\frac{\text{ن}^۲(\text{ن}^۲-۲^۲)\ldots(\text{ن}^۲-\overline{۲\text{س}-۲}^{\,۲})}{|\underline{۲\text{س}}}\,\text{جب}^{۲\text{س}}\text{ط}+\ldots \quad (۷)$$

یہ سلسلہ، سلسلہ (۳) الٹی ترتیب میں لکھا ہوا ہے ۔

۸۱ — نیز

$$\text{جب ن ط} = \text{جم ط}\left\{\text{ن}(۱-\text{جب}^۲\text{ط})^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\text{جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{|\underline{۳}}(۱-\text{جب}^۲\text{ط})^{\frac{۱}{۲}\text{ن}-۲}\text{جب}^۳\text{ط}+\ldots\right\}$$

فرض کرو کہ ن جفت ہے، سلسلہ کی ہر رقم کو جب² ط کی قوتوں میں پھیلاؤ تو ہمیں

$(-۱)^{\text{س}+۱}$ جم ط جب$^{۲\text{س}-۱}$ ط کا سر ملتا ہے

$$\frac{۱}{|\underline{\text{س}-۱}}\;\frac{\text{ن}(\text{ن}-۲)\ldots(\text{ن}-۲\text{س}+۲)}{۱\times۳\times۵\ldots(۲\text{س}-۱)}\left\{\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}\right)_{\text{س}-۱}+(\text{س}-۱)\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}\right)_{\text{س}-۲}\left(\frac{\text{ن}-۱}{۲}\right)_۱\right.$$

$$\left.+\frac{(\text{س}-۱)(\text{س}-۲)}{|\underline{۲}}\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}\right)_{\text{س}-۳}\left(\frac{\text{ن}-۱}{۲}\right)_۲+\ldots\ldots\right\}$$

جو

$$=\frac{۱}{|\underline{\text{س}-۱}}\times\frac{\text{ن}(\text{ن}-۲)\ldots(\text{ن}-۲\text{س}+۲)}{۱\times۳\times۵\times\ldots(۲\text{س}-۱)}\left(\tfrac{۱}{۲}\text{ن}+\text{س}-۱\right)\ldots\left(\tfrac{۱}{۲}\text{ن}+۱\right)$$

$$=\frac{\text{ن}(\text{ن}^۲-۲^۲)(\text{ن}^۲-۴^۲)\ldots(\text{ن}^۲-\overline{۲\text{س}-۲}^{\,۲})}{|\underline{۲\text{س}-۱}}$$

پس ن جفت ہونے کی صورت میں

$$\text{جب ن ط}\,/\,\text{جم ط} = \frac{\text{ن}}{۱}\,\text{جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^۲-۲^۲)}{|\underline{۳}}\,\text{جب}^۳\text{ط} + \ldots\ldots$$

$$+(-۱)^{\text{س}-۱}\,\frac{\text{ن}(\text{ن}^۲-۲^۲)\ldots(\text{ن}^۲-\overline{۲\text{س}-۲}^{\,۲})}{|\underline{۲\text{س}-۱}}\,\text{جب}^{۲\text{س}-۱}\text{ط}+\ldots$$

۸۲ ـــــ جب، ن طاق ہو تو

$$\text{جم ن ط} = \text{جم ط}\left\{(\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\,\text{ط})^{\frac{1}{2}(\text{ن}-\text{۱})} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})}{\text{۲}!}(\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\,\text{ط})^{\frac{1}{2}(\text{ن}-\text{۳})}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{ط} + \cdots\cdots\right\}،$$

$$\text{اور}\quad \text{جب ن ط} = \text{ن}\,(\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\,\text{ط})^{\frac{1}{2}(\text{ن}-\text{۱})}\,\text{جب ط}$$

$$- \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}-\text{۲})}{\text{۳}!}(\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\,\text{ط})^{\frac{1}{2}(\text{ن}-\text{۳})}\,\text{جب}^{\text{۳}}\,\text{ط} + \cdots\cdots$$

اب پچھلی دفعہ کی طرح جب ط کی قوتوں میں سلسلوں کو پھیلانے سے اسی طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم ن ط} \backslash \text{جم ط} = \text{۱} - \frac{\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}}{\text{۲}!}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{ط} + \frac{(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})}{\text{۴}!}\,\text{جب}^{\text{۴}}\,\text{ط} - \cdots$$

$$+ (-\text{۱})^{\text{س}}\,\frac{(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})\cdots\{\text{ن}^{\text{۲}}-(\text{۲س}-\text{۱})^{\text{۲}}\}}{(\text{۲س})!}\,\text{جب}^{\text{۲س}}\,\text{ط}$$

$$+ \cdots\cdots \qquad (\text{۹})$$

$$\text{اور}\quad \text{جب ن ط} = \frac{\text{ن}}{\text{۱}}\,\text{جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱})}{\text{۳}!}\,\text{جب}^{\text{۳}}\,\text{ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})}{\text{۵}!}\,\text{جب}^{\text{۵}}\,\text{ط}$$

$$- \cdots + (-\text{۱})^{\text{س}-\text{۱}}\,\frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱})\cdots\{\text{ن}^{\text{۲}}-(\text{۲س}-\text{۳})^{\text{۲}}\}}{(\text{۲س}-\text{۱})!}\,\text{جب}^{\text{۲س}-\text{۱}}\,\text{ط}$$

$$+ \cdots \cdots\cdots (\text{۱۰})$$

۸۳ ـــ اگر ضابطوں (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰) میں ط کو $\frac{1}{2}\pi$ - ط سے بدل دیا جائے تو حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$(-\text{۱})^{\frac{1}{2}\text{ن}}\,\text{جم ن ط} = \text{۱} - \frac{\text{ن}^{\text{۲}}}{\text{۲}!}\,\text{جم}^{\text{۲}}\,\text{ط} + \frac{\text{ن}^{\text{۲}}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۲}^{\text{۲}})}{\text{۴}!}\,\text{جم}^{\text{۴}}\,\text{ط}$$

$$- \frac{\text{ن}^{\text{۲}}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۲}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۴}^{\text{۲}})}{\text{۶}!}\,\text{جم}^{\text{۶}}\,\text{ط} + \cdots\cdots \qquad (\text{۱۱})$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\text{ن}+1)}\ \text{جب ن ط} \backslash \text{جب ط} = \frac{\text{ن}}{1}\,\text{جم ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-2^2)}{\lfloor 3}\,\text{جم}^3\,\text{ط}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-2^2)(\text{ن}^2-4^2)}{\lfloor 5}\,\text{جم}^5\,\text{ط} - \ldots \quad (12)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\ \text{جب ن ط} \backslash \text{جب ط} = 1 - \frac{\text{ن}^2-1^2}{\lfloor 2}\,\text{جم}^2\,\text{ط}$$

$$+ \frac{(\text{ن}^2-1^2)(\text{ن}^2-3^2)}{\lfloor 4}\,\text{جم}^4\,\text{ط} - \ldots \quad (13)$$

اور

(109)

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\ \text{جم ن ط} = \frac{\text{ن}}{1}\,\text{جم ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1^2)}{\lfloor 3}\,\text{جم}^3\,\text{ط}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1^2)(\text{ن}^2-3^2)}{\lfloor 5}\,\text{جم}^5\,\text{ط} - \ldots \quad (14)$$

جبکہ ن طاق ہو۔ یہ سب ضابطے وہی ہیں جو دفعات ۷۸ اور ۷۹ میں حاصل کئے گئے تھے۔

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۸۴ — اگر ہم ضابطوں (۱) تا (۶) میں یا ان کی مماثل شکلوں (۷) تا (۱۴) میں ط کی بجائے $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ لکھیں تو ایسی مساواتیں ملتی ہیں جن سے جم $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ یا جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ دریافت ہو سکتا ہے جبکہ جم ط اور جب ط دیے گئے ہوں۔ ہم مختلف صورتوں پر غور کرینگے۔

(۱) فرض کرو کہ جم ط دیا گیا ہے، تب اُسی مساوات سے جو (۱) سے حاصل کی گئی ہے جم $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی ن قیمتیں ملینگی۔ پس جم ط دیا گیا ہے تو اُن تمام زاویوں کی جیوب التمام معلوم ہونے کی اُمید رکھنی چاہیے جو $\frac{2\text{ک}\pi \pm \text{ط}}{\text{ن}}$

ہیں شامل ہیں، کیونکہ ۲ک π ± ط سے وہ تمام زاویے تعبیر ہوتے ہیں
جن کی جیب التمام وہی ہے جو ط کی ہے، اس میں ک کوئی صحیح عدد ہے۔
اب ک کی خواہ کوئی قیمت ہو ہم رکھ سکتے ہیں ± ک = س + کَ ن
جس میں س کی قیمت ۰، ۱، ۲، ۳، ...، ن - ۱ میں سے ہمیشہ کوئی ایک ہے
اور کَ مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ تب

جم (۲ک π ± ط)/ن = جم ((ط + ۲س π)/ن ± ۲ π کَ) = جم (ط + ۲س π)/ن

اس طرح ہمیں حسب ذیل ن قیمتوں کے حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیے:-

جم ط/ن، جم (ط + ۲π)/ن، جم (ط + ۴π)/ن، ...، جم (ط + ۲(ن - ۱)π)/ن

اور یہ قیمتیں اُس مساوات کی اصلیں ہونگی جو (۱) سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ سب
اصلیں بالعموم مختلف ہوتی ہیں کیونکہ ان میں سے کسی دو زاویوں کا مجموعہ یا
فرق ۲ π کا ضعف نہیں ہے۔

(۲) فرض کرو، جم ط دیا گیا ہے، تب اُن مساواتوں سے جو (۳) یا (۶)
سے حاصل ہوتی ہیں جب ط/ن کی قیمتیں ملینگی۔ (۶) کو استعمال کرنے سے پیشتر
ہمیں اس کی ہر جانب کا مربع لینا چاہیے اور جم² ط/ن کی بجائے ۱ - جب² ط/ن
لکھنا چاہیے؛ اس طرح (۶) سے جب ط/ن کے لیے ۲ ن درجہ کی ایک
مساوات ملتی ہے جبکہ ن طاق ہو، اور مساوات (۳) سے ن درجہ کی ایک
مساوات ملتی ہے جبکہ ن جفت ہو۔ پس ہمیں جب (۲ک π ± ط)/ن کی تمام
قیمتیں حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیے جبکہ جم ط دیا گیا ہو۔ پچھلی صورت
کی طرح ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ یہ تمام قیمتیں جملہ جب (۲س π ± ط)/ن میں شامل
ہیں جہاں س کی قیمتیں ۰، ۱، ۲، ...، ن - ۱ ہیں۔ جب، ن طاق
ہو تو یہ سب قیمتیں مختلف ہوتی ہیں اور اس لیے ۲ ن قیمتیں حاصل
ہوتی ہیں اور یہ اُس مساوات کی ۲ ن اصلیں ہیں جو (۶) سے حاصل
ہوئی ہے۔ جب، ن جفت ہو تو جب (۲(ن - س)π - ط)/ن = جب (۲س π + ط)/ن

(110)

اس لیے اُس صورت میں صرف ن قیمتیں ہیں اور وہ (۳) سے حاصل کردہ مساوات سے ملتی ہیں۔

(۳) فرض کرو جب ط دیا گیا ہے، تب جم $\frac{ط}{ن}$ معلوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرتے ہیں جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے؛ اس مساوات سے جم $\frac{ط}{ن}$ کی ۲ن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، کیونکہ اس مساوات کو استعمال کرنے سے پیشتر ہمیں طرفین کا مربع لینا اور جب^{2} $\frac{ط}{ن}$ کی بجائے ۱-جم^{2} $\frac{ط}{ن}$ رکھنا پڑتا ہے۔ حسب سابق ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ جملہ جم $\frac{س\pi + (-1)^{س} ط}{ن}$ کی ۲ن قیمتیں ہیں؛ اس طرح ۲ن درجہ کی ایک مساوات سے جم $\frac{ط}{ن}$، جب ط کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے۔

(۴) فرض کرو کہ جب ط دیا گیا ہے، تب جب $\frac{ط}{ن}$ معلوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرتے ہیں جو (۴) یا (۵) سے حاصل ہوتی ہے بموجب اس کے کہ ن جفت یا طاق ہے۔ اگر ن جفت ہے تو (۴) سے حاصل کردہ مساوات سے جب $\frac{ط}{ن}$ کی ۲ن قیمتیں ملتی ہیں؛ یہ قیمتیں جب $\frac{س\pi + (-1)^{س} ط}{ن}$ کی ۲ن قیمتیں ہونگی۔ اگر ن طاق ہے تو (۵) سے حاصل کردہ مساوات سے جب $\frac{ط}{ن}$ کی ن قیمتیں ملینگی جو جب $\frac{س\pi + (-1)^{س} ط}{ن}$ کی ن مختلف قیمتیں ہونگی۔

مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعل

۸۵ — ضابطہ (۱) کو جم ط میں ن ویں درجہ کی ایک مساوات خیال کیا جا سکتا ہے جبکہ جم ن ط دیا گیا ہو۔ اب چونکہ ن زاویوں ط، ط + $\frac{2\pi}{ن}$، ط + $\frac{4\pi}{ن}$، ..... ط + $\frac{2(ن-1)\pi}{ن}$ میں سے ہر زاویہ ایسا ہے کہ اس کے ن گنے کی جیب التمام جم ن ط کے مساوی ہے اور چونکہ جم ط، جم$\left(ط + \frac{2\pi}{ن}\right)$، جم$\left(ط + \frac{4\pi}{ن}\right)$، ..... جم$\left\{ط + \frac{2(ن-1)\pi}{ن}\right\}$ سب کے سب مختلف ہیں، وہ جم ط کی مساوات

کی اصلیں ہیں ؛ اب ہم ن جیوب التمام جم $\left(\text{ط} + \frac{\text{۲ر}}{\text{ن}}\pi\right)$ جو ر = ۰، ۱، ۲، ... ن - ۱ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں } کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے کیلئے وہ معمولی مسئلے استعمال کرسکتے ہیں جو مساواتوں کی اصلوں کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوئے تھے۔ اگر ضابطوں (۱۱) اور (۱۴) کے استعمال کرنے میں سہولت ہو تو ہم انہیں استعمال کرسکتے ہیں کیونکہ وہ (۱) کے مماثل ہیں۔ نیز مساوات (۲)، اُن (ن - ۱) زاویوں کی جیوب التمام کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوسکتی ہے جن کے لیے جب ن ط \ جب ط کی قیمت دی ہوئی ہو۔

اسی طرح مساوات (۳)، ۲ م جیوب

$$\text{جب ط، جب}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{م}}\right)\text{، جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲}\pi}{\text{م}}\right)\text{، ...، جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲م}\pi - \pi}{\text{م}}\right)$$

کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوسکتی ہے جبکہ ن = ۲ م۔

اسی طرح مسئلہ (۵)، ۲ م + ۱ جیوب

$$\text{جب ط، جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲}\pi}{\text{۲م+۱}}\right)\text{، جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۴}\pi}{\text{۲م+۱}}\right)\text{، ... جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۴م}\pi}{\text{۲م+۱}}\right)$$

کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوسکتا ہے جبکہ ن = ۲ م + ۱۔

مساوات

$$\text{مس ن ط}\left\{\text{۱} - \frac{\text{ن(ن-۱)}}{\text{۲!}}\text{مس}^{\text{۲}}\text{ط} + \frac{\text{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}}{\text{۴!}}\text{مس}^{\text{۴}}\text{ط} \ldots\right\}$$

$$= \text{ن مس ط} - \frac{\text{ن(ن-۱)(ن-۲)}}{\text{۳!}}\text{مس}^{\text{۳}}\text{ط} + \ldots$$

کو مس ط کی مساوات سمجھا جاسکتا ہے جس کی اصلیں ہیں

$$\text{مس ط، مس}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right)\text{، مس}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right)\text{، ...، مس}\left(\text{ط} + \frac{\text{(ن-۱)}\pi}{\text{ن}}\right)$$

اور اس لیے اس کو ان جملوں کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(112)

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ زاویوں

$$\text{ط}،\ \text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}،\ \ldots،\ \text{ط} + \frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}$$

میں سے دو دو کے قاطع التماموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $-\frac{۱}{۴}\text{ن}^۲\ \text{قم}^۲\frac{۱}{۲}\text{ن ط}$ ہے جہاں ن ایک جفت عدد ہے۔

مساوات (۷) استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ اگر مندرجہ بالا زاویوں میں سے ن-۲، ن-۲ زاویوں کی جیوب کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو اِن سب زاویوں کی جیوب کے حاصل ضرب سے تقسیم کیا جائے تو حاصل قسمت مطلوبہ مجموعہ ہے؛ یہ حاصل قسمت جب² ط کے سر کے مساوی ہے اگر اس کو اُس رقم سے تقسیم کیا جائے جس میں جب ط شامل نہیں ہوتا یعنے

$$\text{مطلوبہ مجموعہ} = -\frac{\text{ن}^۲}{۲(۱-\text{جم ن ط})}$$

$$= -\frac{\text{ن}^۲}{۴}\ \text{قم}^۲\frac{۱}{۲}\text{ن ط}$$

(۲) ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^۴\frac{۱}{۹}\pi + \text{جم}^۴\frac{۲}{۹}\pi + \text{جم}^۴\frac{۳}{۹}\pi + \text{جم}^۴\frac{۴}{۹}\pi = \frac{۱۹}{۱۶}$$

اور

$$\text{قط}^۴\frac{۱}{۹}\pi + \text{قط}^۴\frac{۲}{۹}\pi + \text{قط}^۴\frac{۳}{۹}\pi + \text{قط}^۴\frac{۴}{۹}\pi = ۱۱۲۰$$

اگر جب ۹ ط \ جب ط کو جم ط کی رقوم میں بیان کیا جائے اور پھر اس کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو اِس آٹھویں درجہ کی مساوات کو حل کرنے سے جم ط کی جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ ہونگی

$$\text{جم}\frac{۱}{۹}\pi،\ \text{جم}\frac{۲}{۹}\pi،\ \ldots،\ \text{جم}\frac{۸}{۹}\pi$$

لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ

جم $\frac{۸}{۹}$ π = − جم $\frac{۱}{۹}$ π، جم $\frac{۷}{۹}$ π = − جم $\frac{۲}{۹}$ π، ......

اس لیے مساوات متذکرہ بالا کی اصلیں ہیں

± جم $\frac{۱}{۹}$ π، ± جم $\frac{۲}{۹}$ π، = جم $\frac{۳}{۹}$ π، ± جم $\frac{۴}{۹}$ π

اب ہم سلسلہ (۲) استعمال کر سکتے ہیں یا عمل کو اس طرح جاری کر سکتے ہیں :—

اگر جب ۹ ط = ۰ تو

جب ۵ ط . جم ۴ ط + جم ۵ ط جب ۴ ط = ۰

یا

(جب ۳ ط . جم ۲ ط + جم ۳ ط جب ۲ ط) (۲ جم^{۲} ۲ ط − ۱)

+ (جم ۳ ط جم ۲ ط − جب ۳ ط جب ۲ ط) ۲ جب ۲ ط جم ۲ ط = ۰

جب ۳ ط، جم ۲ ط، وغیرہ، کی بجائے ان کی قیمتیں درج کرو اور جزو ضربی جب ط کو خارج کرو اور فرض کرو کہ لا = جم^{۲} ط تو لا میں حسب ذیل چہار درجی مساوات حاصل ہوگی

{(۴ لا^{۲} − ۱) (۲ لا − ۱) + ۲ (۴ لا^{۲} − ۳ لا)} {۲ (۲ لا − ۱)^{۲} − ۱} + {۴ (۲ لا − ۱) (۴ لا^{۲} − ۳ لا)

− ۸ (۴ لا − ۱) (۱ − لا) لا} (۲ لا − ۱) = ۰

یا (۱۶ لا^{۲} − ۱۲ لا + ۱) (۸ لا^{۲} − ۸ لا + ۱) + (۴۶ لا^{۳} − ۸۰ لا^{۲} + ۲۰ لا) (۲ لا − ۱) = ۰

یا لا کی قوتوں کے بموجب ترتیب دینے سے

۲۵۶ لا^{۴} − ۴۴۸ لا^{۳} + ۲۴۰ لا^{۲} − ۴۰ لا + ۱ = ۰

اس مساوات کی اصلوں کا حاصل جمع $\frac{۴۴۸}{۲۵۶}$ ہے اور دو دو اصلوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{۲۴۰}{۲۵۶}$ ہے، اس لیے اصلوں کے مربعوں کا مجموعہ = $\frac{۴۴۸^{۲} - ۲ \times ۲۴۰ \times ۲۵۶}{(۲۵۶)^{۲}}$

= $\frac{۱۹}{۱۶}$، نیز اصلوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ = ۴۰^{۲} − ۲ × ۲۴۰ = ۱۱۲۰

(۳) ثابت کرو کہ

جب ع + جب ۲ ع + جب ۴ ع = $\frac{۱}{۲}$ $\sqrt{۷}$

(113)

جہاں عہ = $\frac{۲}{۷}$ π۔

ہم دیکھتے ہیں کہ (جب عہ + جب ۲ عہ + جب ۴ عہ)^{۲} = جب^{۲} عہ + جب^{۲} ۲ عہ + جب^{۲} ۴ عہ

اگر جب ۷ ط \ جب ط کو جب ط کی رقوم میں پھیلایا جائے اور پھر اس کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو جب ط کی مساوات کی اصلیں ہونگی

± جب عہ، ± جب ۲ عہ، ± جب ۴ عہ

رکھو لا = جب^{۲} ط تو لا میں مساوات حاصل ہوتی ہے

۶۴ لا^{۳} - ۱۱۲ لا^{۲} + ۵۶ لا - ۷ = ۰

اس لیے جب^{۲} عہ + جب^{۲} ۲ عہ + جب^{۲} ۴ عہ = $\frac{۱۱۲}{۶۴}$ = $\frac{۷}{۴}$

اس لیے جب عہ + جب ۲ عہ + جب ۴ عہ = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۷}$

(۴) جب $\frac{\pi}{۱۷}$ کی قیمت معلوم کرو۔

لکھو عہ = $\frac{۲\pi}{۱۷}$ تو اُس ضابطہ سے جو زاویوں کی جیوب التمام کے مجموعہ کے لیے ہے جبکہ زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہوں ہم معلوم کرتے ہیں۔

(جم عہ + جم ۹ عہ + جم ۱۳ عہ + جم ۱۵ عہ) + (جم ۳ عہ + جم ۵ عہ + جم ۷ عہ + جم ۱۱ عہ) = $-\frac{۱}{۲}$

نیز (جم عہ + جم ۹ عہ + جم ۱۳ عہ + جم ۱۵ عہ) اور (جم ۳ عہ + جم ۵ عہ + جم ۷ عہ + جم ۱۱ عہ) کو باہم ضرب دینے اور ہر دو جیوب التمام کے حاصل ضرب کی بجائے اِن دو جیوب التمام کے مجموعہ کا نصف رکھنے سے یہ معلوم ہوگا کہ

(جم عہ + جم ۹ عہ + جم ۱۳ عہ + جم ۱۵ عہ) (جم ۳ عہ + جم ۵ عہ + جم ۷ عہ + جم ۱۱ عہ) = -۱

پس خطوط وحدانی کے اندر کی دو مقداریں دو درجی مساوات ی^{۲} + $\frac{۱}{۲}$ی - ۱ = ۰ کی اصلیں ہیں، لیکن اس مساوات کی اصلیں $\frac{۱}{۴}$(-۱ ± $\sqrt{۱۷}$) ہیں۔ اب یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ جم عہ + جم ۹ عہ + جم ۱۳ عہ + جم ۱۵ عہ مثبت ہے اور جم ۳ عہ + جم ۵ عہ + جم ۷ عہ + جم ۱۱ عہ منفی ہے۔ اس لیے

جم عہ + جم ۹ عہ + جم ۱۳ عہ + جم ۱۵ عہ = $\frac{۱}{۴}$($\sqrt{۱۷}$ - ۱)،

جم ۳ عہ + جم ۵ عہ + جم ۷ عہ + جم ۱۱ عہ = $-\frac{۱}{۴}$($\sqrt{۱۷}$ + ۱)

اب ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ (جم عہ + جم ۱۳ عہ) (جم ۹ عہ + جم ۱۵ عہ) = $-\frac{۱}{۴}$

اس لیے جم عہ + جم ۱۳ عہ، جم ۹ عہ + جم ۱۵ عہ اِس دو درجی مساوات

لا² − ۱/۴ (√۱۷ − ۱) لا − ۱/۴ = ۰

کی اصلیں ہیں۔ پس

جم عہ + جم ۱۳ عہ = ۱/۸ (−۱ + √۱۷ + √(۳۴ − ۲√۱۷)) ؛

اسی طرح حاصل ہوگا

جم ۳ عہ + جم ۵ عہ = ۱/۸ (−۱ − √۱۷ + √(۳۴ + ۲√۱۷))

اب جم عہ جم ۱۳ عہ = ۱/۲ (جم ۱۲ عہ + جم ۱۴ عہ) = ۱/۲ (جم ۳ عہ + جم ۵ عہ) ؛ اور چونکہ ہم نے جم عہ، جم ۱۳ عہ کے مجموعہ اور حاصل ضرب کو معلوم کرلیا ہے اس لیے ہم ان میں سے ہر ایک کو معلوم کرسکتے ہیں۔ یہ دیکھتے ہوئے کہ جم عہ > جم ۱۳ عہ ہمیں حاصل ہوتا ہے

جم عہ = ۱/۱۶ {√۱۷ − ۱ + √(۳۴ − ۲√۱۷) + ۲√(۱۷ + ۳√۱۷ − √(۱۷۰ + ۳۸√۱۷))}

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

جب π/۱۷ = √(۱/۲ (۱ − جم عہ))

= ۱/۸ √(۳۴ − ۲√۱۷ − ۲√(۳۴ − ۲√۱۷) − ۴√(۱۷ + ۳√۱۷ − √(۱۷۰ + ۳۸√۱۷)))

(۵) ثابت کرو کہ[1] اگر ف (لا، ما) ایک متجانس تفاعل ہو لا، ما کا جس کے العادن −۱ ہیں تو

ف (جب لا، جم ما) / جب (لا − عہ₁) جب (لا − عہ₂) ...... جب (لا − عہ_ن)

= Σ (ر = ۱ سے ر = ن) ف (جب عہ_ر، جم عہ_ر) / جب (لا − عہ_ر) جب (عہ_ر − عہ₁) جب (عہ_ر − عہ₂) ... جب (عہ_ر − عہ_ن)

---

[1] ہرمٹ نے اس مسئلہ کو ایک مضمون "Sur l' Integration des Fonctions circnlaires" میں بیان کیا ہے جو 9. Proc. Land. math. Soc. بابتہ ۱۸۷۲ء میں شائع ہوا تھا۔

(114)

اس مساوات کی دائیں طرف کا جملہ لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{ف(م، ۱)}{(م-ل_۱)(م-ل_۲)\ldots(م-ل_ن)} \times \frac{۱}{جم\ لا\ جم\ ع_۱\ جم\ ع_۲ \ldots جم\ ع_ن}$$ ، جہاں م = مس لا اور ل_ر = مس ع_ر

اب چونکہ ف (م، ۱)، ن - ۱ درجہ کا ہے جو ن سے کم ہے اس لیے جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے معمولی طریقہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ف(م، ۱)}{(م-ل_۱)(م-ل_۲)\ldots(م-ل_ن)} = \sum_{ر=۱}^{ر=ن} \frac{ف(ل_ر، ۱)}{(م-ل_ر)(ل_ر-ل_۱)(ل_ر-ل_۲)\ldots(ل_ر-ل_ن)}$$

$$= \sum \frac{ف(جب\ ع_ر، جم\ ع_ر)\ جم\ لا\ جم\ ع_۱\ جم\ ع_۲ \ldots جم\ ع_ن}{جب(لا-ع_ر)\ جب(ع_ر-ع_۱)\ldots جب(ع_ر-ع_ن)}$$

اس طرح مطلوبہ نتیجہ اس سے حاصل ہو جاتا ہے۔

اجزائے ضربی

۸۶ —— چونکہ جم ن ط کو جم ط میں ن ویں درجہ کے ایک متعلق صحیح تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے اس لیے ہم جم ن ط کو ن اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر جو جم ط میں خطی ہوں بیان کر سکتے ہیں۔
جم ط کی وہ قیمتیں جن کے لیے جم ن ط معدوم ہوتا ہے یہ ہیں:

$$جم \frac{\pi}{۲ن}،\ جم \frac{۳\pi}{۲ن}،\ \ldots،\ جم \frac{(۲ن-۱)\pi}{۲ن}؛$$

یہ جیوب التمام سب کی سب مختلف ہیں؛ اس لیے

$$جم\ ن\ ط = ا \left(جم\ ط - جم \frac{\pi}{۲ن}\right)\left(جم\ ط - جم \frac{۳\pi}{۲ن}\right)\ldots\left(جم\ ط - جم \frac{(۲ن-۱)\pi}{۲ن}\right)$$

جس میں ا ایک عددی جزوِ ضربی ہے۔ چونکہ جم ن ط کے لیے جو جملہ جم ط میں ہے

اس میں جم ط کی اعلیٰ ترین قوت $\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}$ جم$^{\text{ن}}$ ط ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{ا} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}$ ؛
اس لیے

$$\text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{\pi}{\text{۲ن}}\right)\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}}\right)\cdots\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{(\text{۲ن}-\text{۱})\pi}{\text{۲ن}}\right)$$

اب $\text{جم}\dfrac{\text{ر}\pi}{\text{۲ن}} = -\,\text{جم}\dfrac{(\text{۲ن}-\text{ر})\pi}{\text{۲ن}}$ ، اس لیے یہ جملہ لکھا جا سکتا ہے

$$\text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{جم ط}\left(\text{جم}^{\text{۲}}\text{ط} - \text{جم}^{\text{۲}}\frac{\pi}{\text{۲ن}}\right)\left(\text{جم}^{\text{۲}}\text{ط} - \text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}}\right)\cdots\left(\text{جم}^{\text{۲}}\text{ط} - \text{جم}^{\text{۲}}\frac{(\text{ن}-\text{۲})\pi}{\text{۲ن}}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\left(\text{جم}^{\text{۲}}\text{ط} - \text{جم}^{\text{۲}}\frac{\pi}{\text{۲ن}}\right)\left(\text{جم}^{\text{۲}}\text{ط} - \text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}}\right)\cdots\left(\text{جم}^{\text{۲}}\text{ط} - \text{جم}^{\text{۲}}\frac{(\text{ن}-\text{۱})\pi}{\text{۲ن}}\right) \quad (115)$$

جبکہ ن جفت ہو۔ نیز یہ جملے لکھے جا سکتے ہیں

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\left(\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ط}\right)\left(\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ط}\right)\cdots\left(\text{جب}^{\text{۲}}\frac{(\text{ن}-\text{۲})\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ط}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\left(\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ط}\right)\left(\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ط}\right)\cdots\left(\text{جب}^{\text{۲}}\frac{(\text{ن}-\text{۱})\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ط}\right)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ان جملوں میں سے ہر ایک میں ط = ۰ رکھنے سے ہمیں حسب ذیل مسئلے حاصل ہوتے ہیں:-

$$\text{۲}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۱})}\,\text{جب}\frac{\pi}{\text{۲ن}}\,\text{جب}\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}}\cdots\text{جب}\frac{(\text{ن}-\text{۲})\pi}{\text{۲ن}} = \text{۱}،$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{۲}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۱})}\,\text{جب}\frac{\pi}{\text{۲ن}}\,\text{جب}\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}}\cdots\text{جب}\frac{(\text{ن}-\text{۱})\pi}{\text{۲ن}} = \text{۱} \quad \ldots\ldots(\text{۱۵})$$

جبکہ ن جفت ہو۔

جذر المربع نکالنے میں مثبت علامت لیگئی ہے کیونکہ زاویے سب کے سب حادہ ہیں۔
جم ن ط ÷ جم ط یا جم ن ط کے لیے جو جملے اوپر حاصل ہوئے ہیں اُن کو اگر ہم (۱۵) میں بیان کردہ حاصل ضربوں میں سے تناظر حاصل ضرب کا مربع لیکر اس سے تقسیم کریں تو ہمیں یہ جملے حاصل ہوتے ہیں:

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\text{جب}^2 \frac{\pi}{2ن}}\right)\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\text{جب}^2 \frac{3\pi}{2ن}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\text{جب}^2 \frac{(ن-2)\pi}{2ن}}\right)\cdots(16)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\text{جب}^2 \frac{\pi}{2ن}}\right)\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\text{جب}^2 \frac{3\pi}{2ن}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\text{جب}^2 \frac{(ن-1)\pi}{2ن}}\right)\cdots\cdots(17)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ہم اِن مسئلوں (۱۶) اور (۱۷) کو لکھ سکتے ہیں اس طرح :—

(116)

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \prod_{ر=1}^{ر=\frac{1}{2}(ن-1)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\text{جب}^2 \frac{(2ر-1)\pi}{2ن}}\right)\cdots\cdots(16)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \prod_{ر=1}^{ر=\frac{1}{2}ن} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\text{جب}^2 \frac{(2ر-1)\pi}{2ن}}\right)\cdots\cdots(17)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

۸۷ ——— دفعہ ماسبق کی طرح چونکہ جب ن ط \ جب ط، جم ط میں ن - ۱ درجہ کا ایک جبری تفاعل ہے اس لیے اس کے لیے ایک

تناظر جملہ اجزائے ضربی میں معلوم کیا جا سکتا ہے جو (اجزائے ضربی) جم ط میں خطی ہوں؛ اس صورت میں

$$\text{جم}\,\frac{\pi}{\text{ن}}\text{، جم}\,\frac{2\pi}{\text{ن}}\text{، }\ldots\text{، جم}\,\frac{(\text{ن}-1)\pi}{\text{ن}}$$

جم ط کی وہ قیمتیں ہیں جن کے لیے جب ن ط \ جب ط صفر کے مساوی ہے۔ یہ قیمتیں لکھی جا سکتی ہیں:

$$\pm\,\text{جم}\,\frac{\pi}{\text{ن}}\text{، }\pm\,\text{جم}\,\frac{2\pi}{\text{ن}}\text{، }\ldots$$

پس حسب سابق

$$\text{جب ن ط} \backslash \text{جب ط} = 2^{\text{ن}-1}\,\text{جم ط}\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{2\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{(\text{ن}-2)\pi}{2\,\text{ن}}\right)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{جب ن ط} \backslash \text{جب ط} = 2^{\text{ن}-1}\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{2\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\,\text{ن}}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

اِن جملوں کو ہم حسب ذیل شکلوں میں لکھ سکتے ہیں:۔

$$\text{جب ن ط} \backslash \text{جب ط} = 2^{\text{ن}-1}\,\text{جم ط}\left(\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)\left(\text{جب}^2\frac{2\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)\ldots\left(\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-2)\pi}{2\,\text{ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{جب ن ط} \backslash \text{جب ط} = 2^{\text{ن}-1}\left(\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)\left(\text{جب}^2\frac{2\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)\ldots\left(\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\,\text{ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

(117) آیندہ باب میں ہم یہ دکھائینگے کہ $\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}}$ کی انتہا ن ہے جبکہ ط لاانتہا چھوٹا ہو؛ پس

$$\text{ن} = 2^{\text{ن}-1}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{2\pi}{\text{ن}}\text{، }\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

بائیں جانب آخری جزوِ ضربی جب $\frac{(\text{ن}-2)\pi}{2\,\text{ن}}$ یا جب $\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\,\text{ن}}$ ہے بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔ پس

$$\text{جب ن ط} \backslash \text{ن جب ط} = \text{جم ط} \prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)} \left(۱ - \frac{\text{جب}^۲ \text{ط}}{\text{جب}^۲ \frac{\text{ر} \pi}{\text{ن}}}\right) \ldots\ldots (۱۹)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{جب ن ط} \backslash \text{ن جب ط} = \prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)} \left(۱ - \frac{\text{جب}^۲ \text{ط}}{\text{جب}^۲ \frac{\text{ر} \pi}{\text{ن}}}\right) \ldots\ldots (۲۰)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

۸۸ —— جملہ جم ن ط - جم ن فہ کو جم ط کا ن ویں درجہ کا ایک جبری تفاعل خیال کیا جا سکتا ہے اور اس لیے اُس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے؟ جم ط کی وہ قیمتیں جن کے لیے یہ جملہ معدوم ہوتا ہے یہ ہیں

$$\text{جم فہ}،\ \text{جم}\left(\text{فہ} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)،\ \text{جم}\left(\text{فہ} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right)، \ldots\ldots$$

اس لیے

$$\text{جم ن ط} - \text{جم ن فہ} = ۲^{\text{ن}-۱} \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱} \left\{\text{جم ط} - \text{جم}\left(\text{فہ} + \frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)\right\} \ldots\ldots (۲۱)$$

۸۹ —— [1] اب ہم جملہ $\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + ۱$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۲.\text{جم ن ط} + \text{لا}^{-\text{ن}} = \left(\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{لا}^{-\text{ن}+۱}\right)\left(\text{لا} - ۲.\text{جم ط} + \text{لا}^{-۱}\right)$$

$$+ ۲.\text{جم ط}\left(\text{لا}^{\text{ن}-۱} - ۲.\text{جم}(\text{ن}-۱)\text{ط} + \text{لا}^{-\text{ن}+۱}\right)$$

$$-\left(\text{لا}^{\text{ن}-۲} - ۲.\text{جم}(\text{ن}-۲)\text{ط} + \text{لا}^{-\text{ن}+۲}\right)$$

---

[1] فیررز (Ferrers) نے یہ طریقہ میسنجر آف میتھمیٹکس کی پانچویں جلد میں بیان کیا ہے۔

اگر ہم لاⁿ - ۲ جم ن طہ + لا⁻ⁿ کو عₙ سے تعبیر کریں تو ہم اس متماثلہ کو لکھ سکتے ہیں

$$ع_ن = (لا^{ن-۱} + لا^{-ن+۱}) ع_۱ + ۲ ع_{ن-۱} جم طہ - ع_{ن-۲}؛$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ عₙ، ع₁ سے تقسیم پذیر ہے بشرطیکہ عₙ₋₁ اور عₙ₋₂ ع₁ سے تقسیم پذیر ہوں۔

$$اب \quad ع_۲ = (لا - ۲ جم طہ + لا^{-۱})(لا + ۲ جم طہ + لا^{-۱})$$

اس لیے ع₂، ع₁ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے ع₃ بھی تقسیم پذیر ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

(118) پس عₙ، ع₁ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے لا²ⁿ - ۲ لاⁿ جم ن طہ + ۱ کا ایک جزوِ ضربی لا² - ۲ لا جم طہ + ۱ ہے؛ اب چونکہ جم ن طہ کو بدلے بغیر طہ کو $طہ + \frac{۲ ر \pi}{ن}$ میں تبدیل کیا جا سکتا ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$لا^۲ - ۲ لا جم \left(طہ + \frac{۲ ر \pi}{ن}\right) + ۱$$

دیے ہوئے جملہ کا ایک جزو ضربی ہے جبکہ ر کوئی صحیح عدد ہو۔ اگر ہم فرض کریں ر = ۰، ۱، ۲، ... ن - ۱ تو ہمیں دیے ہوئے جملہ کے ن مختلف اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں اور کل اجزائے ضربی یہی ہیں، پس

$$لا^{۲ن} - ۲ لا^ن جم ن طہ + ۱ = \prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \left\{لا^۲ - ۲ لا جم \left(طہ + \frac{۲ ر \pi}{ن}\right) + ۱\right\} \ldots (۲۲)$$

اس کو شکل ذیل میں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$لا^{۲ن} - ۲ لا^ن ا^ن جم ن طہ + ا^{۲ن} = \prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \left\{لا^۲ - ۲ لا ا جم \left(طہ + \frac{۲ ر \pi}{ن}\right) + ا^۲\right\} \ldots (۲۳)$$

۹۰ —— مساوات (۲۲) میں رکھو طہ = ۰ تو

$$(لا^ن - ۱)^۲ = \prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \left(لا^۲ - ۲ لا جم \frac{۲ ر \pi}{ن} + ۱\right)$$

اور چونکہ $\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} = \text{جم}\,\frac{۲(\text{ن}-\text{ر})\pi}{\text{ن}}$ اس لیے بائیں جانب کے اجزائے ضربی میں سے دو دو مساوی ہیں اِلّا آنکہ جب، ن جفت ہو تو ایک واحد جزوِ ضربی $\text{لا}^۲ + ۲\,\text{لا} + ۱$ ہے، اور خواہ ن جفت ہو یا طاق بہرصورت جزوِ ضربی $\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا} + ۱$ ہے؛ اس لیے

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = (\text{لا}^۲ - ۱)\prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)}\left(\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} + ۱\right) \quad \ldots\ldots (۲۴)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = (\text{لا} - ۱)\prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)}\left(\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} + ۱\right) \quad \ldots\ldots (۲۵)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

نیز ضابطہ (۲۲) میں $\text{ط} = \frac{\pi}{\text{ن}}$ رکھنے سے

$$(\text{لا}^{\text{ن}} + ۱)^۲ = \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱}\left\{\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲\text{ر}+۱)\pi}{\text{ن}} + ۱\right\} \;؛$$

لیکن $\quad \text{جم}\,\frac{(۲\text{ر}+۱)\pi}{\text{ن}} = \text{جم}\,\frac{۲(\text{ن}-\text{ر})-۱}{\text{ن}}\pi$

اس لیے دو دو اجزائے ضربی مساوی ہیں اِلّا آنکہ جب، ن طاق ہو تو واحد جزوِ ضربی $\text{لا}^۲ + ۲\,\text{لا} + ۱$ ہے؛ پس

$$\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}\text{ن}-۱}\left\{\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲\text{ر}+۱)\pi}{\text{ن}} + ۱\right\} \quad \ldots (۲۶)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = (\text{لا}+۱)\prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۳)}\left\{\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲\text{ر}+۱)\pi}{\text{ن}} + ۱\right\} \quad \ldots (۲۷) \qquad (119)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

۹۱ ـــــ مساوات (۲۲) میں رکھو لا = ۱ تو

$$ا - جم\,ن\,ط = ۲^{ن-۱} \prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \left\{ ا - جم\left(ط + \frac{۲ر\,\pi}{ن}\right) \right\}؛$$

ط کو ۲ ط میں تبدیل کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$جب^{۲}\,ن\,ط = ۲^{۲ن-۲}\,جب^{۲}\,ط\,جب^{۲}\left(ط + \frac{\pi}{ن}\right) جب^{۲}\left(ط + \frac{۲\pi}{ن}\right) \ldots جب^{۲}\left(ط + \frac{ن-۱}{ن}\pi\right)$$

یا
$$جب\,ن\,ط = \pm\,۲^{ن-۱}\,جب\,ط\,جب\left(ط + \frac{\pi}{ن}\right) جب\left(ط + \frac{۲\pi}{ن}\right) \ldots جب\left(ط + \frac{ن-۱}{ن}\pi\right)$$

جس میں مبہم علامت ابتک غیر معین ہے۔ دفعہ ۱۵ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ جب ط اور جم ط کی رقوم میں جب ن ط کے پھیلاؤ کی شکل معین ہے، اس لیے بائیں جانب کے حاصل ضرب کی علامت ہمیشہ ایک ہی ہے؛ اب رکھو ط = $\frac{\pi}{۲ن}$ تو صریحاً علامت جو لیجانی چاہیے مثبت ہے کیونکہ ہر جزوِ ضربی مثبت ہے۔
اس لیے

$$جب\,ن\,ط = ۲^{ن-۱}\,جب\,ط\,جب\left(ط + \frac{\pi}{ن}\right) جب\left(ط + \frac{۲\pi}{ن}\right) \ldots جب\left(ط + \frac{ن-۱}{ن}\pi\right) \quad \ldots\ldots (۲۸)$$

(اگر ۲۸) میں ط کو ط + $\frac{\pi}{۲ن}$ سے بدل دیا جائے تو

$$جم\,ن\,ط = ۲^{ن-۱}\,جب\left(ط + \frac{\pi}{۲ن}\right) جب\left(ط + \frac{۳\pi}{۲ن}\right) \ldots جب\left(ط + \frac{۲ن-۱}{۲ن}\pi\right) \quad \ldots\ldots (۲۹)$$

مسئلہ (۲۸) میں ط = ۰ رکھنے اور جذر المربع لینے سے مسئلہ (۱۸) حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح (۲۹) سے مسئلہ (۱۵) اخذ کیا جا سکتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ اگر ن ایک طاق صحیح عدد ہو تو جب ن ط + جم ن ط
جب ط + جم ط سے، ورنہ جب ط − جم ط سے
تقسیم پذیر ہے۔

فرض کرو $\text{ع}_{\text{ن}} = \text{جب ن ط} + \text{جم ن ط}$

تب $\text{ع}_{\text{ن}} + \text{ع}_{\text{ن}-۴} = ۲\,\text{جم}\,۲\text{ط} \times \text{ع}_{\text{ن}-۲} = ۲(\text{جم}^{۲}\text{ط} - \text{جب}^{۲}\text{ط})\,\text{ع}_{\text{ن}-۲}$

پس اگر $\text{ع}_{\text{ن}-۴}$، جم ط + جب ط سے یا جم ط − جب ط سے تقسیم پذیر ہے تو $\text{ع}_{\text{ن}}$ بھی اسی مقدار سے تقسیم پذیر ہے۔ اب $\text{ع}_{۱} = \text{جب ط} + \text{جم ط}$، اس لیے $\text{ع}_{۵}$، $\text{ع}_{۹}$، $\text{ع}_{۱۳}$، ... سب کے سب جب ط + جم ط سے تقسیم پذیر ہیں؛ نیز $\text{ع}_{-۱} = \text{جم ط} - \text{جب ط}$ اس لیے $\text{ع}_{۳}$، $\text{ع}_{۷}$، $\text{ع}_{۱۱}$، ... سب کے سب جم ط − جب ط سے تقسیم پذیر ہیں۔

(۲) مس ن ط − مس ن عہ کے اجزائے ضربی دریافت کرو۔

$$\text{مس ن ط} - \text{مس ن عہ} = \frac{\text{جب ن (ط} - \text{عہ)}}{\text{جم ن ط جم ن عہ}}$$

(120)

ضابطہ (۲۸) میں ط کی بجائے عہ − ط رکھو تو

$$\text{جب ن (ط} - \text{عہ)} = (-۱)^{\text{ن}-۱}\, ۲^{\text{ن}-۱} \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱} \text{جب}\left(\text{ط} - \text{عہ} - \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)$$

$$= (-۱)^{\text{ن}-۱}\, ۲^{\text{ن}-۱}\, \text{جم}^{\text{ن}}\text{ط} \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱} \text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)\left\{\text{مس ط} - \text{مس}\left(\text{عہ} + \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)\right\}$$

$$= (-۱)^{\text{ن}-۱}\, \text{جم}^{\text{ن}}\text{ط جب ن}\left(\text{عہ} + \frac{\pi}{۲}\right) \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱} \left\{\text{مس ط} - \text{مس}\left(\text{عہ} + \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)\right\}$$

نیز (۱۶) اور (۱۷) سے

$$\text{جم ن ط} = \text{جم ط} \prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)} \left(۱ - \frac{\text{جب}^{۲}\text{ط}}{\text{جب}^{۲}\frac{۲\text{ر}-۱}{۲\text{ن}}\pi}\right) \text{ یا } \prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}\text{ن}} \left(۱ - \frac{\text{جب}^{۲}\text{ط}}{\text{جب}^{۲}\frac{۲\text{ر}-۱}{۲\text{ن}}\pi}\right)$$

بموجب اس کے کہ ن طاق ہے یا جفت - اب $۱ - \frac{جب^۲ ط}{جب^۲ ب} = جم^۲ ط \left(۱ - \frac{مس^۲ ط}{مس^۲ ب}\right)$ اس لیے جم ن ط کا جملہ لکھا جاسکتا ہے

$$جم^ن ط \prod_{ر=۱}^{ر=\frac{۱}{۲}(ن-۱)} \left(۱ - \frac{مس^۲ ط}{مس^۲ \frac{۲ر-۱}{۲ن} \pi}\right) \text{ یا } جم^ن ط \prod_{ر=۱}^{ر=\frac{۱}{۲}ن} \left(۱ - \frac{مس^۲ ط}{مس^۲ \frac{۲ر-۱}{۲ن}\pi}\right)$$

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$مس ن ط - مس ن ع = (-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}} \frac{جب ن \left(ع + \frac{\pi}{۲}\right)}{جم ن ع} \frac{\prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱} \left\{مس ط - مس \left(ع + \frac{ر\pi}{ن}\right)\right\}}{\prod_{ر=۱} \left(۱ - \frac{مس^۲ ط}{مس^۲ \frac{۲ر-۱}{۲ن}\pi}\right)}$$

نسب نما میں حاصل ضرب ر = $\frac{۱}{۲}$ن یا ر = $\frac{۱}{۲}$ (ن - ۱) تک لینا چاہیے بموجب اس کے کہ ن جفت ہو یا طاق -

ساتویں باب پر مثالیں

۱ - ثابت کرو کہ اگر ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو اور ع = $\frac{\pi}{ن}$ تو

$$مس ن ف = (-۱)^{\frac{۱}{۲}(ن-۱)} مس ف مس (ف + ع) \ldots مس (ف + \overline{ن-۱}\, ع)$$

$$\text{اور} \quad ن مس ن ف = مس ف + مس (ف + ع) + \ldots + مس (ف + \overline{ن-۱}\, ع)$$

۲ - ثابت کرو کہ

$$\frac{جب ۵ ط - جم ۵ ط}{جب ۵ ط + جم ۵ ط} = مس \left(ط - \frac{۱}{۴}\pi\right) \frac{۱ - ۲ جب ۲ ط - ۴ جب^۲ ۲ ط}{۱ + ۲ جب ۲ ط - ۴ جب^۲ ۲ ط}$$

۳ - ثابت کرو کہ

(121)

$$\text{ن مم ن ع} = \text{مم ع} + \text{مم}\left(\text{ع} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right) + \dots + \text{مم}\left(\text{ع} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}}\pi\right)$$

جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔

۴ ۔ اگر $\text{فہ} = \frac{\pi}{۱۳}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم فہ} + \text{جم ۳ فہ} + \text{جم ۹ فہ} = \frac{۱}{۴}\left(۱ + \sqrt{۱۳}\right)،$$

اور $$\text{جم ۵ فہ} + \text{جم ۷ فہ} + \text{جم ۱۱ فہ} = \frac{۱}{۴}\left(۱ - \sqrt{۱۳}\right)$$

۵ ۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\frac{\pi}{۱۵}\,.\,\text{جم}\frac{۲\pi}{۱۵}\,.\,\text{جم}\frac{۳\pi}{۱۵}\dots\text{جم}\frac{۷\pi}{۱۵} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۷}$$

۶ ۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\frac{۲\pi}{۷} + \text{جم}\frac{۴\pi}{۷} + \text{جم}\frac{۶\pi}{۷} = -\frac{۱}{۲}$$

وہ کعبی مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$\text{جم}\frac{۲\pi}{۷}،\ \text{جم}\frac{۴\pi}{۷}،\ \text{جم}\frac{۸\pi}{۷}$$

۷ ۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{۳} - ۳\sqrt{۳}\,\text{لا}^{۲} - ۳\,\text{لا} + \sqrt{۳} = ۰$$

کی اصلیں مس ۲۰°، مس ۸۰°، مس ۱۴۰° ہیں۔

۸ ۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب}^{۴}\text{ع} + \text{جب}^{۴}\text{۳ع} + \text{جب}^{۴}\text{۷ع} + \text{جب}^{۴}\text{۹ع} + \text{جب}^{۴}\text{۱۱ع} + \text{جب}^{۴}\text{۱۳ع} + \text{جب}^{۴}\text{۱۷ع} + \text{جب}^{۴}\text{۱۹ع} = \frac{۱۲}{۴}$$

جہاں $\text{ع} = \frac{\pi}{۲۰}$

۹ ۔ ثابت کرو کہ

$$۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب فہ}\,\text{جب}\left(\text{فہ} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\text{جب}\left(\text{فہ} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right)\dots\text{جب}\left(\text{فہ} + \frac{۲\text{ن}-۱}{\text{ن}}\pi\right)$$

$$= \text{جم}\frac{\text{ن}\pi}{۲} - \text{جم ن}\left(\text{فہ} + \frac{\pi}{۲}\right)$$

۱۰۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس عہ} + \text{مس}\left(\frac{\pi}{۲\text{ن}} - \text{عہ}\right) + \text{مس}\left(\frac{۲\pi}{۲\text{ن}} + \text{عہ}\right) + \text{مس}\left(\frac{۳\pi}{۲\text{ن}} - \text{عہ}\right) \dots$$

$$\text{۲ن ارقام تک} = \text{۲ن قم ۲ن عہ}$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب}\frac{۲\pi}{۲\text{ن}}\ \text{جب}\frac{۴\pi}{۲\text{ن}} \dots \text{جب}\frac{\text{ن}-۴}{۲\text{ن}}\pi\ \text{جب}\frac{\text{ن}-۲}{۲\text{ن}}\pi\ \text{جب}\frac{\text{ن}\pi}{۲\text{ن}} = \sqrt{\frac{\text{ن}}{۲^{\text{ن}-۱}}}$$

جہاں ن ایک جفت مثبت صحیح عدد ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ن}}{۲\text{ن}-۱} = \frac{\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲\text{ن}-۱}} \times \frac{\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{۲\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{۲\text{ن}-۱}} \times \dots \times \frac{\text{جب}^۲\left(\frac{\text{ن}-۱}{۲\text{ن}}\pi\right)}{\text{جب}^۲\frac{\text{ن}-۱}{۲\text{ن}-۱}\pi}$$

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ن فہ جب ن ط}}{\text{جب فہ جب ط}} = ۲^{\text{ن}-۱}\left\{\text{جم}(\text{فہ}-\text{ط}) - \text{جم}\left(\text{فہ}+\text{ط}+\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\right\}\left\{\text{جم}(\text{فہ}-\text{ط}) - \text{جم}\left(\text{فہ}+\text{ط}+\frac{۴\pi}{\text{ن}}\right)\right\} \dots\dots$$

بائیں جانب اجزائے ضربی کی تعداد ن − ۱ ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ م جب ن ط − ن جب م ط، جب^۳ ط سے تقسیم پذیر ہے اگر م اور ن طاق صحیح عدد ہوں۔ (122)

۱۵۔ ثابت کرو کہ اگر م ایک مثبت صحیح عدد ہو تو قط^{۲م} ا + قم^{۲م} ا، قم^۲ ا کی قوتوں کے ایک سلسلہ سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ن} = \frac{\text{جب ۲عہ جب ۴عہ} \dots \text{جب}(۲\text{ن}-۲)\text{عہ}}{\text{جب عہ جب ۳عہ} \dots \text{جب}(۲\text{ن}-۱)\text{عہ}}$$

جہاں $\text{عہ} = \frac{\pi}{۲\text{ن}}$

۱۷ ۔ ثابت کرو کہ

(۱) $\dfrac{\text{جب}^2 \text{لا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\text{جب}(\text{لا}-\text{ب})\text{جب}(\text{لا}-\text{ج})} = \sum \dfrac{\text{جب}^2 \text{ا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})\text{جب}(\text{ا}-\text{ج})}$

(۲) $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\text{جب}(\text{لا}-\text{ب})\text{جب}(\text{لا}-\text{ج})} = \sum \dfrac{\text{جم}(\text{لا}-\text{ا})\text{جب ا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})\text{جب}(\text{ا}-\text{ج})}$

۱۸ ۔ ثابت کرو کہ

$\{1+\text{جم عہ}\}\{1+\text{جم}(\text{عہ}+\frac{2\pi}{\text{ن}})\}\ldots\{1+\text{جم}(\text{عہ}+\frac{2(\text{ن}-1)\pi}{\text{ن}})\}$

کا حاصل ضرب ہے

$2^{2-\text{ن}}\left\{(-1)^{\frac{1}{2}\text{ن}} - \text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ن عہ}\right\}^2$ یا $2^{1-\text{ن}}(1+\text{جم ن عہ})$

بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق ۔

۱۹ ۔ ثابت کرو کہ

$\text{ن}^2 = (\text{سہہ}\,\frac{\pi}{2\text{ن}})^{-1} + (\text{سہہ}\,\frac{3\pi}{2\text{ن}})^{-1} + (\text{سہہ}\,\frac{5\pi}{2\text{ن}})^{-1} + \ldots$

بائیں جانب ن رقمیں لیگئی ہیں ۔

۲۰ ۔ ثابت کرو کہ

$(\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,7^\circ + \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,37^\circ + \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,67^\circ)(\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,22^\circ + \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,52^\circ + \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,82^\circ) = 17 + 8\sqrt{3}$

۲۱ ۔ اگر م طاق ہو تو ثابت کرو کہ

$\text{مس م فہ} = \text{مس فہ مم}(\text{فہ}+\frac{\pi}{2\text{م}})\,\text{مس}(\text{فہ}+\frac{2\pi}{2\text{م}})\ldots\text{مم}(\text{فہ}+\frac{\text{م}-2}{2\text{م}}\pi)\,\text{مس}(\text{فہ}+\frac{\text{م}-1}{2\text{م}}\pi)$

۲۲ ۔ اگر ۲۸ عہ = ۳π تو ثابت کرو کہ

$\sqrt{۱۴}$ = $۲^{۱۳}$ جب عہ جب ۲عہ × ... × جب ۱۳عہ،

اور جم ۲عہ + جم ۶عہ + جم ۸عہ = $\frac{۱}{۲}\sqrt{۷}$

۲۳ - ثابت کرو کہ مس $\frac{\pi}{۲ن}$ مس $\frac{۲\pi}{۲ن}$ × ... × مس $\frac{ن-۱}{۲ن}\pi$ = ۱

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے -

۲۴ - ثابت کرو کہ

قم لا + قم (لا + $\frac{\pi}{ن}$) + ... + قم (لا + $\frac{(ن-۱)\pi}{ن}$)

= ن {قم ن لا + قم (ن لا + π) + ... + قم (ن لا + $\overline{ن-۱}$ π)}

(123)

۲۵ - ثابت کرو کہ

۲ (۱ + جم ن ط) یا $\frac{(۱ + جم ن ط)}{۱ + جم ط}$

۲ جم ط کے ایک منطق صحیح تفاعل کا مربع ہے بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔ دکھاؤ کہ

۱ + جم ۹ط = (۱ + جم ط) (۱۶ $جم^۴$ ط - ۸ $جم^۳$ ط - ۱۲ $جم^۲$ ط + ۴ جم ط + ۱$)^۲$

۲۶ - ثابت کرو کہ $۲^{ن-۱}$ $جم^ن$ ط - جم ن ط، ۱ + ۲ جم ۲ط سے تقسیم پذیر ہے اگر ن کی شکل ۶م - ۱ ہو اور (۱ + ۲ جم ۲ط$)^۲$ سے تقسیم پذیر ہے اگر ن کی شکل ۶م + ۱ ہو جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے -

ثابت کرو کہ

$۲^{۱۰}$ $جم^{۱۱}$ ط - جم ۱۱ط = ۱۱ جم ط (۱ + ۲ جم ۲ط) {(۱ + ۲ جم ۲ط$)^۳$ + (۱ + ۲ جم ۲ط) + ۱}

۲۷ - اگر ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو اور

مس ($\frac{۱}{۴}$ π + $\frac{۱}{۲}$ فہ) = $مس^ن$ ($\frac{۱}{۴}$ π + $\frac{۱}{۲}$ ط)

تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب فہ} = \text{ن جب ط} \prod_{ر=1}^{\frac{1}{2}(ن-1)} \left\{ \frac{1 + \text{جب}^2 \text{ط مم}^2 \frac{ر\pi}{ن}}{1 + \text{جب}^2 \text{ط مس}^2 \frac{ر\pi}{ن}} \right\}$$

۲۸ - ثابت کرو کہ شکل ف (جب ط، جم ط) / فہ (جب ط، جم ط) کا کوئی تفاعل جہاں ف اور فہ سے ن درجے کے منطق صحیح تفاعل تعبیر ہوتے ہیں اور جن میں $\text{جم}^{ن}$ ط شامل ہے شکل $\frac{ا \prod \text{جب} \frac{1}{2}(ط - عہ)}{\prod \text{جب} \frac{1}{2}(ط - عَہ)}$ میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں ا اور مقداریں عہ، عَہ منحصر نہیں ہیں ط پر اور شمار کنندہ میں ۲ ن اجزائے ضربی ہیں اور نسب نما میں ۲ ن اجزائے ضربی -

اگر تفاعل $\frac{\text{ا جم ۲ ط} + \text{ب جم ط} + \text{ج جب ط} + د}{\text{اَ جم ۲ ط} + \text{بَ جم ط} + \text{جَ جب ط} + دَ}$ کو اس شکل میں بیان کیا جائے تو

ثابت کرو کہ $\sum$ عہ اور $\sum$ عَہ، π کے جفت ضعف ہیں -

۲۹ - ثابت کرو کہ $\text{مس} \frac{3\pi}{11} + 4 \text{جب} \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$

۳۰ - ثابت کرو کہ

$$\frac{2^6 \text{جب}^6 \text{ط} + \text{جب ۷ ط}}{2^6 \text{جم}^6 \text{ط} - \text{جم ۷ ط}} = \text{مس ط مس}^2 \left(ط + \frac{\pi}{4}\right) \text{مس}^2 \left(ط - \frac{\pi}{4}\right)$$

(124)

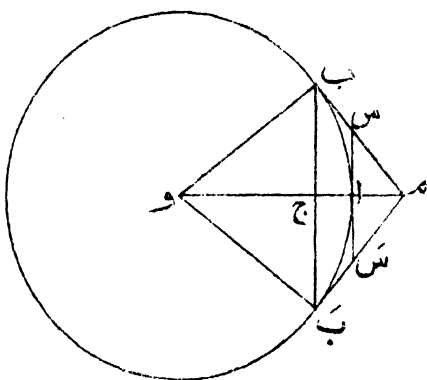
آٹھواں باب

ایک زاویے کے دائری تفاعل اور دائری ناپ کے درمیان رشتے

۹۲ ـــــ اب ہم اُن مسئلوں کی تحقیق کرینگے جن سے ایسی حدود کا تعین ہوتا ہے جن کے درمیان ایک زاویہ کی جیب، جیب التمام، اور مماس واقع ہونے چاہئیں جبکہ اس زاویہ کا دائری ناپ ط، $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہو۔

پہلا مسئلہ جس کو ہم ثابت کرینگے یہ ہے کہ اگر ایک زاویہ کا دائری ناپ ط ہو جو $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہے تو

جب ط < ط < مس ط

اِلّا آنکہ ط = ۰ ۔

فرض کرو او ب = ا و بَ = ط؛ اور فرض کرو کہ م ب اور م بَ، ب اور بَ پر مماس ہیں، اور فرض کرو کہ ا پر کا مماس س ا سَ ہے۔
دفعہ ۱۱ میں یہ دکھایا جاچکا ہے کہ قوس اب کا طول، اس + س ب سے متجاوز نہیں ہوتا؛ اور اس طرح قوس ب ا بَ، ب س + بَ سَ + س سَ سے تجاوز نہیں کرتی اور اس لیے قوس ب ا بَ > ب م + م بَ، یا قوس ب ا > ب م۔
نیز

قوس ب ا < ب ا < ب ج

اس لیے $\frac{\text{ب م}}{\text{و ب}} > \frac{\text{قوس ب ا}}{\text{و ب}} > \frac{\text{ب ج}}{\text{و ب}}$

اب $\text{ط} = \frac{\text{قوس ب ا}}{\text{و ب}}$، $\text{جب ط} = \frac{\text{ب ج}}{\text{و ب}}$ اور $\text{مس ط} = \frac{\text{ب م}}{\text{و ب}}$

(125) اس لیے جب ط < ط < مس ط۔ اگر ط، $\frac{1}{2}\pi$ سے بڑا ہوتا تو م، و کی دوسری جانب واقع ہوتا اور وہ نامساواتیں جن کو ہم نے استعمال کیا ہے ممکن ہے درست نہ رہتیں۔
چونکہ جب ط < ط < مس ط، اس لیے $1 < \frac{\text{ط}}{\text{جب ط}} <$ قط ط؛
اب فرض کرو کہ ط کو لا انتہا گھٹا دیا گیا ہے، تب قط ط کی انتہا جبکہ ط = ۰، ایک ہے؛ اس لیے نیز $\frac{\text{ط}}{\text{جب ط}}$ کی انتہا بھی جبکہ ط کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے ایک ہے۔ نیز چونکہ

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = (\text{ط قم ط})^{-1} \text{ اور } \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} = \text{قط ط} \times (\text{ط قم ط})^{-1}$$

اس لیے ہمیں یہ مسئلے ملتے ہیں کہ $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ اور $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$ کی انتہا جبکہ ط

کو لا انتہا گھٹا دیا جائے ہر ایک ایک ہے۔
اس مسئلہ کو یوں بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:۔ مثلث و ا ب، قاطع و ا ب، اور مثلث و ب م مقدار کی صعودی ترتیب میں ہیں؛ اور مثلث
و ا ب = ½ و ا × ب ج = ½ و ا² جب ط، نیز قاطع و ا ب = ½ و ا² × ط، اور

$\triangle$ و ب م = ½ و ب × ب م = ½ و ب² × مس ط

اس لیے جب ط < ط < مس ط

۹۳ ـــــ دفعہ ۵ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ نظری مقاصد کے لیے زاویہ کا دائری ناپ دوسرے ناپوں کے مقابلہ میں زیادہ سہولت بخش ہے، اس کا سبب یہ ہے کہ اس ناپ میں زاویہ کی جیب اور مماس دونوں انتہا میں خود زاویہ کے مساوی ہوتے ہیں جبکہ زاویہ کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے؛ لیکن اگر ہم کوئی اور ناپ استعمال کریں، مثلاً ثانئے، تو یہ صورت نہیں ہوتی۔ چنانچہ ثانیوں کی صورت میں

$$\frac{\text{جب } ن''}{ن''} = \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \times \frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$$

$$\frac{\text{مس } ن''}{ن''} = \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} \times \frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$$

جہاں ن ثانیوں کا دائری ناپ ط ہے؛ اس لیے $\frac{\text{جب } ن''}{ن''}$، $\frac{\text{مس } ن''}{ن''}$ کی انتہاؤں میں سے ہر ایک جبکہ ن کو لا انتہا گھٹا دیا جائے $\frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$ کے مساوی ہے۔ پس اگر ہم دائری ناپ کی بجائے ثانیے استعمال کریں تو ضابطوں کی اُس بڑی جماعت میں جس میں ط = ۰ کے لیے $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ اور $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$ کی انتہائیں شریک ہوتی ہیں ایک کی بجائے ہمیشہ عدد $\frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$

واقع ہوتا رہیگا۔

(126) م جب $\frac{ع}{م}$ ، م مس $\frac{ع}{م}$ میں سے ہر ایک کی اِنتہا جبکہ م لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے ع ہے، کیونکہ م جب $\frac{ع}{م}$ = ع $\left(\frac{جب\ ط}{ط}\right)$ ، م مس $\frac{ع}{م}$ = ع $\left(\frac{مس\ ط}{ط}\right)$ جہاں ط = $\frac{ع}{م}$ ، اور جب م کو لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے تو ط لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے۔

$\frac{جب\ ف\ ط}{جب\ ق\ ط}$ اور $\frac{مس\ ف\ ط}{مس\ ق\ ط}$ میں سے ہر ایک کی انتہا جبکہ ط لا انتہا گھٹا دیا جائے $\frac{ف}{ق}$ کے مساوی ہے۔

۹۴ — اگر ط < $\frac{۱}{۲}\pi$ تو مس $\frac{۱}{۲}$ ط > $\frac{۱}{۲}$ ط اور جب $\frac{۱}{۲}$ ط > $\frac{۱}{۲}$ ط جم $\frac{۱}{۲}$ ط ، اس لیے

$$۲\ جب\ \tfrac{۱}{۲}ط\ .جم\ \tfrac{۱}{۲}ط > ط\ جم^۲\ \tfrac{۱}{۲}ط$$

یا $$جب\ ط > ط\ (۱ - جب^۲\ \tfrac{۱}{۲}ط)$$

اب $$جب^۲\ \tfrac{۱}{۲}ط < (\tfrac{۱}{۲}ط)^۲$$

اس لیے $$جب\ ط > ط\ (۱ - \tfrac{۱}{۴}ط^۲)،\ یا\ جب\ ط > ط - \tfrac{۱}{۴}ط^۳$$

نیز $جم\ ط = ۱ - ۲\ جب^۲\ \tfrac{۱}{۲}ط$ اور یہ بڑا ہے $۱ - ۲(\tfrac{۱}{۲}ط)^۲$ سے یا

$$جم\ ط > ۱ - \tfrac{۱}{۲}ط^۲$$

نیز چونکہ $جب\ \tfrac{۱}{۲}ط > \tfrac{۱}{۲}ط - \tfrac{۱}{۴}(\tfrac{۱}{۲}ط)^۳$ اس لیے

$$جم\ ط < ۱ - ۲(\tfrac{۱}{۲}ط - \tfrac{۱}{۳۲}ط^۳)^۲ < ۱ - \tfrac{۱}{۲}ط^۲ + \tfrac{۱}{۱۶}ط^۴ - \tfrac{ط^۶}{۵۱۲}$$

بس $جم\ ط < ۱ - \tfrac{۱}{۲}ط^۲ + \tfrac{۱}{۱۶}ط^۴$ ۔ محصلہ نتائج کو بیان کیا جا سکتا ہے اس طرح:

اگر ایک زاویہ کا دائری ناپ ط، ہو جو $\frac{۱}{۲}\pi$ سے کم ہے

تو جب ط، ط اور $ط - \frac{۱}{۴} ط^{۳}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور

جم ط

$۱ - \frac{۱}{۲} ط^{۲}$ اور $۱ - \frac{۱}{۲} ط^{۲} + \frac{۱}{۱۶} ط^{۴}$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۹۵ — اب ہم یہ دکھائینگے کہ اگر $ط < \frac{۱}{۲} \pi$ تو

$جب\ ط > ط - \frac{۱}{۶} ط^{۳}$ اور $جم\ ط < ۱ - \frac{۱}{۲} ط^{۲} + \frac{۱}{۲۴} ط^{۴}$

اس سے جب ط اور جم ط کی حدود دفعہ سابق میں حاصل کردہ حدود سے زیادہ تنگ ہو جاتی ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$۳\ جب\ \frac{۱}{۳} ط - جب\ ط = ۴\ جب^{۳} \frac{۱}{۳} ط،$$

$$۳\ جب\ \frac{ط}{۳^{۲}} - جب\ \frac{ط}{۳} = ۴\ جب^{۳} \frac{ط}{۳^{۲}}،$$

- - - - - - - - - - - -

$$۳\ جب\ \frac{ط}{۳^{ن}} - جب\ \frac{ط}{۳^{ن-۱}} = ۴\ جب^{۳} \frac{ط}{۳^{ن}}$$

اِن مساواتوں کو علی الترتیب ۱، ۳، $۳^{۲}$، ...، $۳^{ن-۱}$ سے ضرب دو اور پھر جمع کرو تو

$$۳^{ن}\ جب\ \frac{ط}{۳^{ن}} - جب\ ط = ۴\left(جب^{۳} \frac{ط}{۳} + ۳\ جب^{۳} \frac{ط}{۳^{۲}} + \cdots + ۳^{ن-۱} جب^{۳} \frac{ط}{۳^{ن}}\right)$$

(127)

اس لیے

$$ط \times \frac{جب\ \frac{ط}{۳^{ن}}}{\frac{ط}{۳^{ن}}} - جب\ ط < ۴\left(\frac{ط^{۳}}{۳^{۳}} + \frac{ط^{۳}}{۳^{۵}} + \cdots + \frac{ط^{۳}}{۳^{۲ن+۲}}\right)$$

اب ن کو لا انتہا بڑا کرو تو $\frac{جب\ \frac{ط}{۳^{ن}}}{\frac{ط}{۳^{ن}}}$ کی انتہا ایک ملتی ہے اور سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۳^{۲}} + \frac{۱}{۳^{۴}} + \cdots$$

کی انتہا $= \dfrac{1}{1-\frac{1}{3^2}} = \dfrac{9}{8}$ ؛

اس لیے $\text{ط} - \text{جب}\,\text{ط} < \frac{1}{6}\text{ط}^3$ ، یا $\text{جب}\,\text{ط} > \text{ط} - \frac{1}{6}\text{ط}^3$

نیز $\text{جم}\,\text{ط} = 1 - 2\,\text{جب}^2 \frac{1}{2}\text{ط}$

اس لیے $\text{جم}\,\text{ط} < 1 - 2\left(\frac{1}{2}\text{ط} - \frac{1}{48}\text{ط}^3\right)^2 < 1 - \frac{1}{2}\text{ط}^2 + \frac{1}{24}\text{ط}^4$

پس جب ط، ط اور $\text{ط} - \frac{1}{6}\text{ط}^3$ کے درمیان واقع ہوتا ہے؛ اور جم ط، $1 - \frac{1}{2}\text{ط}^2$ اور $1 - \frac{1}{2}\text{ط}^2 + \frac{1}{24}\text{ط}^4$ کے درمیان واقع ہوتا ہے جبکہ ط، $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہو۔

نیز چونکہ $\text{مس}\,\text{ط} = \text{جب}\,\text{ط} \backslash \text{جم}\,\text{ط}$ اس لیے

$$\text{مس}\,\text{ط} > \left(\text{ط} - \frac{1}{6}\text{ط}^3\right)\left(1 - \frac{1}{2}\text{ط}^2\right)^{-1} > \left(\text{ط} - \frac{1}{6}\text{ط}^3\right)\left(1 + \frac{1}{2}\text{ط}^2 + \frac{1}{4}\text{ط}^4\right)$$

یا $\text{مس}\,\text{ط} > \text{ط} + \frac{1}{3}\text{ط}^3 + \frac{1}{2}\text{ط}^5 - \frac{1}{24}\text{ط}^7$ ، اس لیے $\text{مس}\,\text{ط} > \text{ط} + \frac{1}{3}\text{ط}^3$

یولر کا حاصل ضرب

۹۶ — چونکہ $\text{جب}\,\text{ط} = 2\,\text{جب}\,\frac{1}{2}\text{ط}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}\text{ط}$ ،

$$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2} = 2\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2^2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{2^2} ،$$

$$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2^2} = 2\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2^3}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{2^3}$$

. . . .

$$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2^{n-1}} = 2\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2^n}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{2^n}$$

اس لیے عمل ضرب سے

$$\text{جب } ط = ۲^ن \text{ جم } \frac{ط}{۲} \text{ جم } \frac{ط}{۲^۲} \text{ جم } \frac{ط}{۲^۳} \ldots \text{ جم } \frac{ط}{۲^ن} \text{ جب } \frac{ط}{۲^ن}$$

(128) اب جبکہ ن کو لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے تو $۲^ن$ جب $\frac{ط}{۲^ن}$ کی انتہا ط ہے۔ پس حاصل ضرب

$$\text{جم } \frac{ط}{۲} \text{ جم } \frac{ط}{۲^۲} \text{ جم } \frac{ط}{۲^۳} \ldots \text{ جم } \frac{ط}{۲^ن}\text{ -}$$

کی انتہا جبکہ ن کو لا انتہا بڑا کیا جائے $\frac{\text{جب } ط}{ط}$ ہے۔

اس حاصل ضرب میں رکھو $ط = \frac{۱}{۲} \pi$ تو ہمیں π کے لیے ویٹا کا یہ جملہ

$$\frac{۲}{\pi} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}}{۲} \times \ldots$$

حاصل ہوتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ جیسے ط، صفر سے $\frac{۱}{۲} \pi$ تک بڑھتا ہے $\frac{\text{جب } ط}{ط}$ مسلسل گھٹتا ہے اور $\frac{\text{مس } ط}{ط}$ مسلسل بڑھتا ہے۔

ہم دکھائینگے کہ $\frac{\text{جب } ط}{ط} > \frac{\text{جب } (ط + ھ)}{ط + ھ}$، یعنی

$$(ط + ھ) \text{ جب } ط > ط \text{ (جم ھ جب ط + جم ط جب ھ)} \text{ یا}$$

$$\frac{\text{مس } ط}{ط} > \frac{\text{جب ھ}}{ھ + (۱ - \text{جم ھ}) ط}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{\text{مس } ط}{ط} > ۱ > \frac{\text{جب ھ}}{ھ}$ اور $\frac{\text{جب ھ}}{ھ} > \frac{\text{جب ھ}}{ھ + (۱ - \text{جم ھ}) ط}$

کیونکہ ۱ - جم ھ مثبت ہے، اور اس لیے نامساوات بالا ثابت ہو چکی، اس طرح $\frac{\text{جب } ط}{ط}$

ایک سے $\frac{2}{\pi}$ تک گھٹتا ہے جیسے ط صفر سے $\frac{1}{2}\pi$ تک بڑھتا ہے ۔
پھر ہم یہ دکھائینگے کہ

$$\frac{\text{مس}(ط+ھ)}{ط+ھ} > \frac{\text{مس}\ ط}{ط}$$ ، یا

$$ط\ \text{جب}(ط+ھ)\ \text{جم}\ ط > (ط+ھ)\ \text{جب}\ ط\ \text{جم}(ط+ھ)$$

یعنی $$ط\ \text{جب}\ ھ > ھ\ \text{جب}\ ط\ \text{جم}(ط+ھ)$$

یا $$\frac{\text{جب}\ ھ}{ھ} > \frac{\text{جب}\ ط}{ط}\ \text{جم}(ط+ھ)$$ ؛

اب ہم فرض کر سکتے ہیں ھ < ط ، پس پہلے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{جب}\ ھ}{ھ} > \frac{\text{جب}\ ط}{ط}$$ ، اور اس لیے $$\frac{\text{جب}\ ط}{ط} > \frac{\text{جب}\ ط}{ط}\ \text{جم}(ط+ھ)$$

اس طرح $\frac{\text{مس}\ ط}{ط}$ ایک سے ∞ تک بڑھتا ہے جیسے ط صفر سے $\frac{1}{2}\pi$ تک بڑھتا ہے۔

دفعہ ۳۲ میں دی ہوئی جم ط اور جب ط کی ترسیموں سے یہ نظر آئیگا کہ مسائل بالا درست ہیں؛ چنانچہ پہلی صورت میں وہ نسبت جو معین کو فصلہ کے ساتھ ہے گھٹتی ہے اور دوسری صورت میں بڑھتی ہے جیسے ط صفر سے $\frac{1}{2}\pi$ تک بڑھتا ہے ۔

(۲) ثابت کرو کہ مساوات مس لا = لہ لا کی حقیقی اصلوں کی تعداد لا انتہا ہے، نیز بڑی اصلوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

دفعہ ۳۲ میں تفاعل مس لا کی ترسیم کھینچی گئی ہے ؛ اُسی شکل میں تفاعل لہ لا کی ترسیم کھینچو، یہ ایک خطِ مستقیم ہے جو مبدا میں سے گزرتا ہے - یہ خطِ مستقیم صریحاً مس لا کی ترسیم کی ہر شاخ کو قطع کریگا ، اور لا کی وہ قیمتیں جو نقاطِ تقاطع کے متناظر ہیں دی ہوئی مساوات کے حل ہیں ۔ اس لیے مساوات کی ایک اصل

$$لا = (۲ک - ۱)\frac{\pi}{2}\ \text{اور}\ (۲ک + ۱)\frac{\pi}{2}$$

(129)

کے درمیان ہے جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے ۔ اگر ک لہ بڑا ہو تو $(\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\pi}{\text{۲}}$ صریحاً ایک تقریبی حل ہے؛ اس سے زیادہ نزدیک کا تقرب معلوم کرنا ہو تو فرض کرو $\text{لا} = (\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\pi}{\text{۲}} + \text{ما}$ جہاں ما چھوٹا ہے، تب ۔تم $\text{ا} = \text{لہ ما} + (\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\frac{\pi}{\text{۲}}$ ؛ اب جم $\text{ا} = \text{۱}$، جب $\text{ما} = \text{ما}$ رکھنے سے اور $\text{ما}^{\text{۲}}$ کو نظر انداز کرنے سے

$$\text{-۱} = (\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\frac{\pi}{\text{۲}}\,\text{ما}\text{، یا }\text{ما} = -\frac{\text{۲}}{(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\,\pi}\text{، اس لیے }\text{لا} = (\text{۲ک}+\text{۱})\frac{\pi}{\text{۲}} - \frac{\text{۲}}{(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\,\pi}$$

تقریبی حل ہے ۔ اس سے بھی زیادہ تقریبی حل معلوم کرنے کے لیے $\text{ما}^{\text{۳}}$ نظر انداز کرو تو اُن رقموں میں جن میں $\text{ما}^{\text{۲}}$ شامل ہے $\text{ما} = -\frac{\text{۲}}{(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\,\pi}$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ا}^{\text{۲}}\text{-۱} = \left\{\text{لہ ما} + (\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\frac{\pi}{\text{۲}}\right\}\text{ا} = \text{لہ ما}^{\text{۲}} + \text{ا}(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\frac{\pi}{\text{۲}}\text{،}$$

اس لیے

$$\frac{\text{۴}}{(\text{۲ک}+\text{۱})^{\text{۲}}\,\text{لہ}^{\text{۲}}\,\pi^{\text{۲}}}\left(\text{لہ} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \text{لہ}\right) + \text{۱-} = \text{لہ}\frac{\pi}{\text{۲}}(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{ا}$$

یا

$$\frac{\text{۸}}{(\text{۲ک}+\text{۱})^{\text{۳}}\,\text{لہ}^{\text{۳}}\,\pi^{\text{۳}}}\left(\text{لہ} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \text{لہ}\right) + \frac{\text{۲}}{(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\,\pi} - = \text{ما}$$

اس لیے لا کی تقریبی قیمت ہے

$$\frac{\text{۸}}{(\text{۲ک}+\text{۱})^{\text{۳}}\,\text{لہ}^{\text{۳}}\,\pi^{\text{۳}}}\left(\text{لہ} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \text{لہ}\right) + \frac{\text{۲}}{(\text{۲ک}+\text{۱})\,\text{لہ}\,\pi} - \frac{\pi}{\text{۲}}(\text{۲ک}+\text{۱}) = \text{لا}$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{۱}}{\text{ط}} = \text{مم ط} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{مس}\frac{\text{ط}}{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{مس}\frac{\text{ط}}{\text{۴}} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}}\text{مس}\frac{\text{ط}}{\text{۸}} + \cdots \text{تک}$$

یہ آسانی کے ساتھ دکھایا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{مم}\frac{\text{ط}}{\text{۲}} - \text{مم ط} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{مس}\frac{\text{ط}}{\text{۲}}\text{،}$$

اس لیے نیز $\frac{1}{4}$ مم $\frac{ط}{4}$ − $\frac{1}{2}$ مم $\frac{ط}{2}$ = $\frac{1}{4}$ مس $\frac{ط}{4}$،

. . . .

$\frac{1}{2^{ن}}$ مم $\frac{ط}{2^{ن}}$ − $\frac{1}{2^{ن-1}}$ مم $\frac{ط}{2^{ن-1}}$ = $\frac{1}{2^{ن}}$ مس $\frac{ط}{2^{ن}}$

اس لیے عمل جمع سے

$\frac{1}{2}$ مس $\frac{ط}{2}$ + $\frac{1}{2^2}$ مس $\frac{ط}{2^2}$ + ... + $\frac{1}{2^{ن}}$ مس $\frac{ط}{2^{ن}}$ = $\frac{1}{2^{ن}}$ مم $\frac{ط}{2^{ن}}$ − مم ط

اب اگر ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے تو $\frac{1}{2^{ن}}$ مم $\frac{ط}{2^{ن}}$ کی انتہائی قیمت $\frac{1}{ط}$ ہے، اس لیے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ $\frac{1}{ط}$ − مم ط ہے۔

اگر ہم رکھیں ط = $\frac{1}{2}\pi$ تو حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{1}{\pi}$ = $\frac{1}{4}$ مس $\frac{\pi}{4}$ + $\frac{1}{8}$ مس $\frac{\pi}{8}$ + $\frac{1}{16}$ مس $\frac{\pi}{16}$ + ...

(130)

بعض جملوں کی انتہائیں

۹۷ — اگر ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے تو جم $\frac{ط}{ن}$، $\frac{\text{جب}\,\frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}$ میں سے ہر ایک کی انتہا ایک ہے؛ اس لیے $\left(\text{جم}\,\frac{ط}{ن}\right)^{ر}$، $\left(\frac{\text{جب}\,\frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}\right)^{ر}$ میں سے ہر ایک کی انتہا بھی ایک ہے بشرطیکہ ر کوئی عدد ہو جو ن کے تابع نہیں ہے؛ لیکن اگر ر، ن کا تفاعل ف (ن) ہو جو ن کے لاتناہی ہونے پر لاتناہی ہو جاتا ہے تو جملے $\left(\text{جم}\,\frac{ط}{ن}\right)^{ف(ن)}$، $\left(\frac{\text{جب}\,\frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}\right)^{ف(ن)}$ جماعت 1^{∞} سے متعلق غیر معین شکلیں ہیں اور ان کی

انتہاؤں کی قیمتیں ف (ن) کی شکل پر منحصر ہیں۔
(جم ط/ن)^ف(ن) کی انتہائی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے اس جملہ کو ء سے تعبیر کرو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

لوک_و ء = ۱/۲ ف (ن) لوک_و (۱ - جب^۲ ط/ن)

اب ہم اس مسئلہ کو معلوم مسئلہ کے طور پر مان لینگے کہ اگر لا کو لا انتہا گھٹا دیا جائے تو

نہا (لوک_و (۱ - لا))/لا = - ۱

تب چونکہ

لوک_و ء = ۱/۲ ف (ن) جب^۲ ط/ن (لوک_و (۱ - جب^۲ ط/ن))/(جب^۲ ط/ن)

اس لیے لوک_و ء کی انتہا ۱/۲ ف (ن) جب^۲ ط/ن کی انتہا کے مساوی ہے مگر مختلف علامت کے ساتھ بشرطیکہ یہ موخر الذکر انتہا موجود ہو۔ ہم حسب ذیل صورتوں میں لوک_و ء کی انتہا اور اس لیے ء کی انتہا معلوم کر سکتے ہیں :-

(۱) اگر ف (ن) = ن تو اس صورت میں ف (ن) جب^۲ ط/ن = ن جب ط/ن جب ط/ن اور ن جب ط/ن کی انتہا ط ہے اور جب ط/ن کی صفر ہے ؛ اس لیے لوک_و ء کی انتہا صفر ہے اور اس لیے ء کی انتہا ایک ہے۔

(181)

(۲) اگر ف (ن) = ن^۲ تو اس صورت میں ف (ن) جب^۲ ط/ن = (ن جب ط/ن)^۲ جس کی انتہا ط^۲ ہے۔ اس لیے لوک_و ء کی انتہا - ۱/۲ ط^۲ ہے اور ء کی و^(- ۱/۲ ط^۲)۔

(۳) اگر ف (ن) = $ن^{ف}$ جہاں ف > ۲ تو اس صورت میں

ف(ن) جب۲ $\frac{ط}{ن}$ = $ن^{ف-۲}$ $(ن\ جب\ \frac{ط}{ن})^۲$ اور یہ لا انتہا بڑھتا ہے جبکہ ن لا انتہا بڑھتا ہے۔ اس لیے لوک ء کی انتہا۔ ∞ ہے اور اس لیے ء کی انتہا صفر ہے۔

۹۸ — $\left(\frac{جب\ \frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}\right)^{ن}$ کی انتہائی قیمت معلوم کرنے کے لیے

چونکہ $\frac{جب\ \frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}$ ایک سے کم ہے اور $\frac{جب\ \frac{ط}{ن}}{مس\ \frac{ط}{ن}}$ (یا جم ط) سے بڑا ہے

اس لیے $\left(\frac{جب\ \frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}\right)^{ن}$ کی انتہا، ^{ن}ایا اور $\left(جم\ \frac{ط}{ن}\right)^{ن}$ کے درمیان واقع ہے؛ اس طرح دفعہ ماسبق کی صورت (۱) سے $\left(\frac{جب\ \frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}\right)^{ن}$ کی انتہا ایک ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ $\left(\frac{جب\ \frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}\right)^{ن^۲}$ اور $\left(\frac{جب\ \frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}\right)^{ن^ف}$

(ف > ۲) کی انتہائی قیمتیں علی الترتیب ۱ اور $قو^{\frac{ط^۲}{۶}}$ کے درمیان، اور ایک اور صفر کے درمیان واقع ہیں۔

زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے سلسلے اس کے دائری ناپ کی قوتوں میں

۹۹ — چوتھے باب کے ضابطوں (۳۹)، (۴۰) میں ا کی بجائے ط لکھو

اور فرض کرو لا = ن طہ تو

$$\text{جب لا} = \text{ن جم}^{\text{ن}-۱}\text{ط جب ط} - \frac{\text{ن(ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{|\underline{۳}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۳}\text{ط جب}^{۳}\text{ط} + \ldots$$

$$(-۱)^{\text{ر}}\,\frac{\text{ن(ن}-۱)\ldots(\text{ن}-۲\text{ر})}{|\underline{۲\text{ر}+۱}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲\text{ر}-۱}\text{ط جب}^{۲\text{ر}+۱}\text{ط} + \ldots$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{ط} - \frac{\text{ن(ن}-۱)}{|\underline{۲}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲}\text{ط جب}^{۲}\text{ط} + \ldots$$

$$+(-۱)^{\text{س}}\,\frac{\text{ن(ن}-۱)\ldots(\text{ن}-۲\text{س}+۱)}{|\underline{۲\text{س}}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲\text{س}}\text{ط جب}^{۲\text{س}}\text{ط} + \ldots$$

ان سلسلوں کو حسب ذیل شکلوں میں لکھا جا سکتا ہے :- (132)

$$\text{جب لا} = \text{لا جم}^{\text{ن}-۱}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right) - \frac{\text{لا(لا}-\text{ط)(لا}-۲\text{ط)}}{|\underline{۳}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۳}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۳} + \ldots$$

$$+(-۱)^{\text{ر}}\,\frac{\text{لا(لا}-\text{ط)}\ldots(\text{لا}-۲\text{ر ط})}{|\underline{۲\text{ر}+۱}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲\text{ر}-۱}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۲\text{ر}+۱} + \ldots$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{ط} - \frac{\text{لا(لا}-\text{ط)}}{|\underline{۲}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۲} + \ldots$$

$$+(-۱)^{\text{س}}\,\frac{\text{لا(لا}-\text{ط)}\ldots(\text{لا}-\overline{۲\text{س}-۱}\,\text{ط})}{|\underline{۲\text{س}}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲\text{س}}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۲\text{س}} + \ldots$$

ان میں سے ہر سلسلہ میں رقموں کی تعداد ن پر منحصر ہوتی ہے اور جیسے ن لا انتہا بڑھتا ہے رقموں کی تعداد لا انتہا بڑھتی ہے ۔ پس اس غرض کے لیے کہ جملوں کی انتہایں حاصل ہوں جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے یہ ضروری ہے کہ ان میں سے ہر سلسلہ کی بجائے ایک ایسا

سلسلہ رکھا جائے جس میں رقموں کی تعداد مستقل ہو اور ن کے ساتھ لا انتہا نہ بڑھے ۔

جب لا کے لیے جو سلسلہ ہے اُس کی (ر + ۲) ویں رقم کو (ر + ۱) ویں رقم کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ہے

$$-\frac{(\text{لا}-\overline{2\text{ر}+1}\,\text{ط})(\text{لا}-\overline{2\text{ر}+2}\,\text{ط})}{(2\text{ر}+2)(2\text{ر}+3)}\times\left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^2 ;$$

یہ عدد منفی ہے اور

$$\left[\frac{\text{لا}^2}{(2\text{ر}+2)(2\text{ر}+3)}+\left\{\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^2+\frac{\text{لا}^2}{\text{ن}}\times\frac{1}{\text{ر}+1}\right\}\right]\left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^2$$

سے عدداً کم ہے ۔

اگر لا کی کوئی مستقل قیمت ہو تو $\left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^2$ گھٹتا ہے جیسے ن بڑھتا ہے؛ ن اور ر کی قیمتیں ن_1، ر_1 منتخب کی جا سکتی ہیں ایسی کہ جملہ بالا کی قیمتیں $\text{ن} \geqslant \text{ن}_1$ اور $\text{ر} \geqslant \text{ر}_1$ کے لیے ایک سے چھوٹی حاصل ہوں۔ پس لا کی اس مستقل قیمت کے لیے اور ن کی اُن تمام قیمتوں کے لیے جو ن_1 سے بڑی یا اس کے مساوی ہیں جب لا کا سلسلہ ایسا ہے کہ ایک ثابت رقم (جس کا محل ن پر منحصر نہیں ہے) سے اور اس کے بعد ہر رقم اپنی ماقبل رقم سے عدداً چھوٹی ہے۔ اب چونکہ ایک ایسے سلسلہ کا مجموعہ جس کی ارقام تبادلاً نسبت منفی ہوں اور ہر رقم اپنی ماقبل رقم سے عدداً چھوٹی ہو پہلی رقم سے چھوٹا ہوتا ہے اس لیے

$$\text{جب لا} = \text{لا}\,\text{جم}^{\text{ن}-1}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)-\frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})\cdots(\text{لا}-2\text{ط})}{\lfloor 3}\,\text{جم}^{\text{ن}-3}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^3$$

$$+\cdots+(-1)^{\text{ر}}\,\text{صہ}\,\frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})\cdots(\text{لا}-2\text{ر}\text{ط})}{\lfloor 2\text{ر}+1}\,\text{جم}^{\text{ن}-2\text{ر}-1}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{2\text{ر}+1}$$

جہاں $\text{ط} = \frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ بشرطیکہ $\text{ن} \geqslant \text{ن}_1$، ر، ن پر منحصر نہیں ہے اور صہ

(183) صفر اور ا کے درمیان ایک عدد ہے۔ صحیح عدد ر کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے جو ر سے کم نہ ہو۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{ط} - \frac{\text{لا(لا}-\text{ط)}}{\underline{\lfloor ۲}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۲}$$

$$+ \frac{\text{لا(لا}-\text{ط)(لا}-۲\text{ط)(لا}-۳\text{ط)}}{\underline{\lfloor ۴}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۴}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۴} - \cdots\cdots$$

$$+ (-۱)^{\text{س}}\,\text{صہ}\,\frac{\text{لا(لا}-\text{ط)}\ldots\text{(لا}-\overline{۲\text{س}-۱}\,\text{ط)}}{\underline{\lfloor ۲\text{س}}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲\text{س}}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۲\text{س}}$$

بشرطیکہ ن $\geq$ نَ ؛ س، ن پر منحصر نہیں ہے اور صہ، صفر اور ایک کے درمیان ایک عدد ہے۔

اب فرض کرو کہ ن لا انتہا بڑھا دیا گیا ہے تو جب لا اور جم لا کے لیے جو جملے ہیں ان کی انتہائیں ان تفاعلوں کو تعبیر کرنی چاہیں۔ اب چونکہ ہر سلسلہ میں رقموں کی تعداد مستقل ہے اور ن کے تابع نہیں اس لیے ہمیں صرف مختلف رقموں کی انتہاؤں کو جمع کرنا ہوگا تاکہ مجموعہ کی انتہا معلوم ہو سکے۔ $\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{ک}}$ کی انتہا جبکہ ک ن پر منحصر نہیں ہے ایک ہے۔ نیز $\text{جم}^{\text{ن}-\text{ک}}\,\text{ط}$ کی انتہا $= \dfrac{\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{ط کی انتہا}}{\text{جم}^{\text{ک}}\,\text{ط کی انتہا}}$

اور دفعہ ۹۷ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ لوک $\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{ط} = ۱$، اور چونکہ لوک جم ط = ۱ اس لیے لوک $\text{جم}^{\text{ک}}\,\text{ط} = ۱$ حاصل ہوتا ہے؛ اس لیے لوک $\text{جم}^{\text{ن}-\text{ک}}\,\text{ط} = ۱$؛ اعداد صہ اور صہَ، ن پر منحصر ہیں لیکن ن کی ہر قیمت کے لیے وہ صفر اور ایک کے درمیان ہیں اور اس لیے ان کی انتہائیں صہ اور صہَ ایک سے تجاوز نہیں کر سکتیں۔ پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{3}}{|\underline{3}} + \frac{\text{لا}^{5}}{|\underline{5}} - \cdots + (-1)^{\text{ر}}\,\text{صہ}\,\frac{\text{لا}^{2\text{ر}+1}}{|\underline{2\text{ر}+1}} ،$$

$$\text{جم لا} = 1 - \frac{\text{لا}^{2}}{|\underline{2}} + \frac{\text{لا}^{4}}{|\underline{4}} - \cdots + (-1)^{\text{س}}\,\text{صہ}'\,\frac{\text{لا}^{2\text{س}}}{|\underline{2\text{س}}}$$

جہاں صہ اور صہ' ثبت عدد ہیں جو ایک سے تجاوز نہیں کرسکتے ۔

یہ نتیجے درست رہتے ہیں لا کی ہر قیمت کے لیے اور ر اور س کی تمام قیمتوں کے لیے جو ثابت صحیح اعداد م اور س سے بڑے یا ان کے مساوی ہوں ۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ لا کی ہر قیمت کے لیے جب لا حسب ذیل مستدق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$\text{لا} - \frac{\text{لا}^{3}}{|\underline{3}} + \frac{\text{لا}^{5}}{|\underline{5}} - \cdots + (-1)^{\text{م}}\frac{\text{لا}^{2\text{م}+1}}{|\underline{2\text{م}+1}} + \cdots$$

اور جم لا حسب ذیل مستدق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$1 - \frac{\text{لا}^{2}}{|\underline{2}} + \frac{\text{لا}^{4}}{|\underline{4}} - \cdots + (-1)^{\text{م}}\frac{\text{لا}^{2\text{م}}}{|\underline{2\text{م}}} + \cdots$$

کیونکہ پہلے سلسلہ کی رقموں کی ایک مقررہ تعداد کا مجموعہ، جب لا سے بقدر $\frac{\text{لا}^{2\text{ر}+1}}{|\underline{2\text{ر}+1}}$ سے زیادہ فرق نہیں رکھتا جو لا کی ہر قیمت کے لیے (184) اتنا چھوٹا ہوسکتا ہے جتنا ہم چاہیں اگر ر کو کافی بڑا لیا جائے ۔

یہ واقعہ اس امر کے مشاہدہ کرنے سے واضح ہے کہ نسبت $\frac{\text{لا}^{2}}{2\text{ر}(2\text{ر}+1)}$

× $\frac{\text{لا}^{2\text{ر}+1}}{|\underline{2\text{ر}+1}} : \frac{\text{لا}^{2\text{ر}-1}}{|\underline{2\text{ر}-1}}$ ، لا کی کسی مقررہ قیمت کے لیے ر کو کافی بڑا لینے سے اِتنی چھوٹی بنائی جاسکتی ہے جتنی ہم چاہیں ۔

اسی طرح کا استدلال جم لا کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

(۱) $\text{جم}^{3}\,\text{لا}$ کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

$\text{جم}^{3}\,\text{لا} = \frac{1}{4}(\text{جم}\,3\,\text{لا} + 3\,\text{جم}\,\text{لا})$؛ اس لیے جم ۳ لا، جم لا کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے ہمیں $\text{جم}^{3}\,\text{لا}$ کے پھیلاؤ میں عام رقم حاصل ہوتی ہے

$$(-1)^{\text{ن}} \frac{3^{2\text{ن}} + 3}{4\,\underline{|2\text{ن}}}\,\text{لا}^{2\text{ن}}$$

یہ معلوم ہوگا کہ جم لا یا جب لا کی کسی صحیح عددی قوت کو یا ایسی قوتوں کے حاصل ضرب کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جا سکتا ہے اگر ہم اس جملہ کو لا کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں بیان کریں۔

(۲) مس لا کو لا کی قوتوں میں اُس رقم تک پھیلاؤ جس میں لا^{7} شامل ہے۔

$$\text{مس لا} = \text{جب لا} \,/\, \text{جم لا}$$

$$= \left\{\text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{6} + \frac{\text{لا}^5}{120} - \frac{\text{لا}^7}{5040}\right\}\left\{1 - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^4}{24} - \frac{\text{لا}^6}{720}\right\}^{-1}$$

لا^{7} سے اعلیٰ رتبہ کی رقموں کو خارج کر دینے سے۔ دوسرے جزو ضربی کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس لا} = \left\{\text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{6} + \frac{\text{لا}^5}{120} - \frac{\text{لا}^7}{5040}\right\}\left\{1 + \left(\frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^4}{24} + \frac{\text{لا}^6}{720}\right) + \left(\frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^4}{24}\right)^2 + \left(\frac{\text{لا}^2}{2}\right)^3\right\}$$

ضرب دینے اور لا^{7} تک کی رقموں کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\text{مس لا} = \text{لا} + \frac{1}{3}\text{لا}^3 + \frac{2}{15}\text{لا}^5 + \frac{17}{315}\text{لا}^7$$

(۳) $\dfrac{\text{جب}\,(\text{مس لا}) - \text{مس}\,(\text{جب لا})}{\text{لا}^{7}}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ لا = ۰

اس جملہ کا شمار کنندہ جبکہ مثال ماسبق کا پھیلاؤ استعمال کیا جائے

$$= \text{مس لا} - \frac{1}{6}\,\text{مس}^{3}\,\text{لا} + \frac{1}{120}\,\text{مس}^{5}\,\text{لا} - \frac{1}{5040}\,\text{مس}^{7}\,\text{لا} - \text{جب لا} - \frac{1}{3}\,\text{جب}^{3}\,\text{لا}$$
$$- \frac{2}{15}\,\text{جب}^{5}\,\text{لا} - \frac{17}{315}\,\text{جب}^{7}\,\text{لا}$$

اور یہ، لا^{7} سے اعلیٰ رتبہ کی رقموں کو خارج کر دینے سے،

$$= \left(\text{لا} + \frac{1}{3}\text{لا}^{3} + \frac{2}{15}\text{لا}^{5} + \frac{17}{315}\text{لا}^{7}\right) - \frac{1}{6}\text{لا}^{3}\left(1 + \text{لا}^{2} + \frac{11}{15}\text{لا}^{4}\right) + \frac{\text{لا}^{5}}{120}\left(1 + \frac{5}{3}\text{لا}^{2}\right)$$
$$- \frac{\text{لا}^{7}}{5040} - \left(\text{لا} - \frac{1}{6}\text{لا}^{3} + \frac{\text{لا}^{5}}{120} - \frac{\text{لا}^{7}}{5040}\right) - \frac{\text{لا}^{3}}{3}\left(1 - \frac{\text{لا}^{2}}{2} + \frac{\text{لا}^{4}}{40} + \frac{\text{لا}^{4}}{12}\right)$$
$$- \frac{2}{15}\left(1 - \frac{5}{6}\text{لا}^{2}\right) - \frac{17}{315}\text{لا}^{7}$$

یہ جملہ $-\frac{1}{30}\,\text{لا}^{7}$ میں تحویل ہو جاتا ہے۔ اس لیے دیے ہوئے جملہ کی انتہا $-\frac{1}{30}$ ہے۔

(135) مثلثی اور جبری متماثلات کے درمیان ایک رشتہ

۱۰۰ ـــــــ کسی مثلثی متماثلہ سے جس میں زاویے حرفوں کے متجانس تفاعل ہوں جبری متماثلات کا ایک سلسلہ اخذ کیا جا سکتا ہے اس طور پر کہ دائری تفاعلوں کو زاویوں کے دائری ناپ کی قوتوں میں پھیلایا جائے اور ایک ہی رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھا جائے۔ مثلاً ضابطہ $\text{جب ا جب ب} = \frac{1}{2}\left\{\text{جم}\,(\text{ا} - \text{ب}) - \text{جم}\,(\text{ا} + \text{ب})\right\}$ میں جیوب اور جیوب التمام میں سے ہر ایک کو پھیلاؤ اور دوسرے رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھو تو

$$\text{ا ب} = \frac{1}{4}\left\{(\text{ا} + \text{ب})^{2} - (\text{ا} - \text{ب})^{2}\right\}$$

چوتھے باب کے دفعات ۴۴ اور ۴۷ میں ہم نے متعدد مثالیں متماثل مثلثی اور جبری متماثلات کی دی ہیں، ہر صورت میں مثلثی متماثلہ سے جبری متماثلہ حاصل ہوتی ہے اگر متذکرہ بالا طریقہ کو کام میں لایا جائے۔ مثلاً دفعہ ۴۷ کی مثال (۱۱) پر غور کرو، اس کو لکھا جا سکتا ہے

$\sum$ جب^2 ا جب (ب + ج - ا) - ۲ جب ا جب ب جب ج

= جب (ب + ج - ا) جب (ج + ا - ب) جب (ا + ب - ج)

اگر ہم جیوب کو پھیلانے کے بعد تیسرے رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھیں تو ہمیں حسب ذیل متماثل جبری متماثلہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$\sum$ ا^2 (ب + ج - ا) - ۲ ا ب ج = (ب + ج - ا) (ج + ا - ب) (ا + ب - ج)

آٹھویں باب پر مثالیں

۱۔ ہندسی طور پر ثابت کرو کہ

مس ط $\geq$ ۲ مس $\frac{1}{2}$ ط، جہاں ط $<$ $\frac{1}{2}\pi$

۲۔ مس ۳ ط حم^3 ط کی قیمت میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں جبکہ ط صفر سے $\frac{1}{2}\pi$ تک بڑھتا ہے ان کو مرتسم کرو۔

ثابت کرو کہ اس جملہ کی اقل قیمت ۱۷ - ۱۲ $\sqrt{2}$ ہے اور اعظم قیمت ۱۷ + ۱۲ $\sqrt{2}$ ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ مس ۳ ط مم ط، ۳ اور $\frac{1}{3}$ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتا۔

۴۔ ثابت کرو کہ ط $>$ $\frac{\text{۳ جب ط}}{\text{۲ + جم ط}}$، جہاں ط $<$ $\frac{1}{2}\pi$

۵۔ ثابت کرو کہ ۳ مس ۵ ط $>$ ۵ مس ۳ ط، اگر ط، صفر اور $\frac{\pi}{10}$ کے درمیان واقع ہو۔

۶۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{جب}^2\text{ ط}}$ - $\frac{1}{\text{ط}^2}$ کی انتہائی قیمت (جبکہ ط = ۰) $\frac{1}{3}$ ہے۔

(136) ۷ - ثابت کرو کہ جب (جم ط) < جم (جب ط)، ط کی تمام قیمتوں کے لیے -

۸ - ثابت کرو کہ لا متناہی حاصل ضرب

$$\left(\text{۱} - \text{مس}^{\text{۲}} \frac{\text{ط}}{\text{۲}}\right)\left(\text{۱} - \text{مس}^{\text{۲}} \frac{\text{ط}}{\text{۲}^{\text{۲}}}\right)\left(\text{۱} - \text{مس}^{\text{۲}} \frac{\text{ط}}{\text{۲}^{\text{۳}}}\right) \cdots\cdots$$

کی انتہائی قیمت $\frac{\text{ط}}{\text{مس ط}}$ ہے -

۹ - اگر $\frac{\text{جب (ط - فہ)}}{\text{جب فہ}} = \text{۱} + \text{ن}$ اور ن بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب فہ} = \left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{ن}\right) \text{جب} \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{ط}$$ تقریباً

۱۰ - $\frac{\text{جب (ط جم ط)}}{\text{جم (ط جب ط)}}$ کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ ط = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi$

۱۱ - $\frac{\text{مس ۲ ط} - \text{۲ مس ط}}{\text{ط}^{\text{۳}}}$ کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ ط = ۰

۱۲ - ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{مم ط}}{\sqrt{\text{۲} - \text{۲ جب ط}}}\right)^{\text{مس}^{\text{۲}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\pi + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ط}\right)}$$

کی انتہائی قیمت $\text{و}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}$ ہے جبکہ ط = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi$

۱۳ - ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\right)^{\text{۲}} = \text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۲}} - \text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۴}} - \text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۲}}\,\text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۴}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۸}} - \cdots$$

۱۴ - اگر مساوات $\text{مس ط} = \frac{\text{۱}}{\text{مم عہ}_{\text{۱}} + \text{مم عہ}_{\text{۲}}} + \frac{\text{۱}}{\text{مم عہ}_{\text{۳}} + \text{مم عہ}_{\text{۴}}}$

میں $\text{عہ}_{\text{۱}}$، $\text{عہ}_{\text{۲}}$، $\text{عہ}_{\text{۳}}$، $\text{عہ}_{\text{۴}}$ سب زاویے تقریباً مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ط

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\left(\text{عہ}_{\text{۱}} + \text{عہ}_{\text{۲}} + \text{عہ}_{\text{۳}} + \text{عہ}_{\text{۴}}\right)$$

کے تقریباً مساوی ہے ۔

۱۵ ۔ سلسلہ ذیل جمع کرو ۔

$$\text{جم}\,\frac{ط}{۲} + ۲\,\text{جم}\,\frac{ط}{۲}\,\text{جم}\,\frac{ط}{۲^{۲}} + ۲^{۲}\,\text{جم}\,\frac{ط}{۲}\,\text{جم}\,\frac{ط}{۲^{۲}}\,\text{جم}\,\frac{ط}{۲^{۳}} + \cdots \text{ن رقموں تک}$$

۱۶ ۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\text{مس}\,\frac{لا}{۲}\,\text{قط}\,لا + \text{مس}\,\frac{لا}{۲^{۲}}\,\text{قط}\,\frac{لا}{۲} + \text{مس}\,\frac{لا}{۲^{۳}}\,\text{قط}\,\frac{لا}{۲^{۲}} + \cdots \infty\ \text{تک}$$

کا حاصل جمع مس لا ہے ۔

۱۷ ۔ ثابت کرو کہ

$$ط - \text{جب}\,ط\,\text{جم}\,ط = ۲\,\text{جب}\,ط\,\text{جب}^{۲}\,\frac{ط}{۲} + ۲^{۲}\,\text{جب}\,\frac{ط}{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\frac{ط}{۲^{۲}}$$
$$+ ۲^{۳}\,\text{جب}\,\frac{ط}{۲^{۲}}\,\text{جب}\,\frac{ط}{۲^{۳}} + \cdots \infty\ \text{تک}$$

۱۸ ۔ ثابت کرو کہ
$$\text{مس}\,ط = \cfrac{۲}{\text{مم}\,\frac{ط}{۲} - \cfrac{۲}{\text{مم}\,\frac{ط}{۴} - \cfrac{۲}{\text{مم}\,\frac{ط}{۸} - \cdots}}}$$

۱۹ ۔ اگر $ط < \pi$ تو ثابت کرو کہ

$$۲\left[\text{جب}\,\frac{ط}{۲} + \text{جب}\,\frac{ط}{۲^{۲}} + \cdots + \text{جب}\,\frac{ط}{۲^{ن}}\right]\left[\text{جم}\,\frac{ط}{۲} + \text{جم}\,\frac{ط}{۲^{۲}} + \cdots + \text{جم}\,\frac{ط}{۲^{ن}}\right]$$
$$\not> \left[\text{جب}\,ط \times \text{جب}\,\frac{ط}{۲} \cdots \times \text{جب}\,\frac{ط}{۲^{ن-۱}}\right]^{\frac{۱}{ن}}$$

(137) ۲۰ ۔ اگر ا اور ب مثبت مقداریں ہوں اور اگر $ا_{۱} = \frac{۱}{۲}(ا + ب)$، $ب_{۱} = (ا_{۱} ب)^{\frac{۱}{۲}}$
$ا_{۲} = \frac{۱}{۲}(ا_{۱} + ب_{۱})$، $ب_{۲} = (ا_{۲} ب_{۱})^{\frac{۱}{۲}}$ اور علیٰ ہذا تو ثابت کرو کہ

$$ا_{\infty} = ب_{\infty} = \frac{(ب^{۲} - ا^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}{\text{جم}^{-۱}\,\frac{ا}{ب}}$$

بتاؤ کہ کس طرح π کی قیمت اس ضابطہ کے ذریعہ محسوب کی جا سکتی ہے ۔

۲۱ ۔ لامتناہی حاصل ضرب

$$\left(\text{جب } ط \text{ جم } \tfrac{1}{2} ط\right)^{\frac{1}{2}} \left(\text{جب } \tfrac{1}{2} ط \text{ جم } \tfrac{1}{4} ط\right)^{\frac{1}{4}} \left(\text{جب } \tfrac{1}{4} ط \text{ جم } \tfrac{1}{8} ط\right)^{\frac{1}{8}} \cdots$$

کی انتہائی قیمت معلوم کرو ۔

۲۲ ۔ اگر مس ط = ۴ ط تو ط کی قیمت صفر اور $\frac{1}{2}\pi$ کے درمیان یہ ہو گی

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{11}{24\pi^3} + \frac{403}{480\pi^5} + \cdots\right)$$

۲۳ ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب } ط}{1 + 2\,\text{جم } ط} = \sum^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^n} \times \frac{\text{جب } \frac{ط}{2^n}}{2\,\text{جم } \frac{ط}{2^n} - 1} \right\}$$

۲۴ ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{2\,\text{جم } 2^n ط + 1}{2\,\text{جم } ط + 1} = (2\,\text{جم } ط - 1)(2\,\text{جم } 2ط - 1)\cdots(2\,\text{جم } 2^{n-1} ط - 1)$$

۲۵ ۔ ن رقموں تک جمع کرو سلسلہ

$$\frac{1}{2}\,\text{لوک مس } 2ط + \frac{1}{2^2}\,\text{لوک مس } 2^2 ط + \frac{1}{2^3}\,\text{لوک مس } 2^3 ط + \cdots$$

۲۶ ۔ اگر یہ دیا جائے کہ $\frac{ط^n\,\text{جب}^n\, ط}{ط^n - \text{جب}^n\, ط}$ کی انتہائی قیمت جبکہ ط = ۰، نہ صفر ہے نہ لامتناہی تو ن معلوم کرو ۔

۲۷ ۔ $$\frac{1 - \text{جم } 2لا + \text{جم } 4لا - \text{جم } 6لا + \text{جم } 8لا - \text{جم } 10لا - \text{جم } 14لا + \text{جم } 16لا}{3 - 4\,\text{جم } 2لا + \text{جم } 4لا}$$

کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ لا = ۰ ۔

۲۸ ۔ ثابت کرو کہ اُس لاتناہی سلسلہ کا مجموعہ جس کی رویں رقم

$$(-1)^{\text{ر}-1} \times \frac{\text{ر}}{۲\text{ر}-۱} \times \frac{۱}{\underline{|۲\text{ر}-۲}}$$

ہے $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ جب $(\frac{۱}{۴}\pi + ۱)$ ہے ۔

۲۹ ۔ اگر صہ بہت چھوٹا ہو اور فہ = طہ ۔ ۲ صہ جب طہ + $\frac{۳}{۴}$ صہ^{۲} جب ۲ طہ تو ثابت کرو کہ

طہ = فہ + ۲ صہ جب فہ + $\frac{۵}{۴}$ صہ^{۲} جب ۲ فہ ، تقریباً

۳۰ ۔ اگر ما = ی + ک جب (ی + ک ما) تو ی کو چھوٹی مقدار ک کی قوتوں میں اُس رقم تک پھیلاؤ جس میں ک^{۳} شامل ہے ۔

۳۱ ۔ مثلثی متماثلہ

جب (د ۔ ب) جب (ا ۔ ج) + جب (ب ۔ ج) جب (ا ۔ د) + جب (ج ۔ د) جب (ا ۔ ب) = ۰

سے جبری متماثلہ

(د ۔ ب) (ا ۔ ج) {(د ۔ ب)^{۲} + (ا ۔ ج)^{۲}} + (ب ۔ ج) (ا ۔ د) {(ب ۔ ج)^{۲} + (ا ۔ د)^{۲}}

+ (ج ۔ د) (ا ۔ ب) {(ج ۔ د)^{۲} + (ا ۔ ب)^{۲}} = ۰

اخذ کرو ۔

(138) ۳۲ ۔ ثابت کرو کہ فہ ، $\frac{۳ \text{ جب } ۲ \text{ فہ}}{۲(۲ + \text{جم } ۲ \text{ فہ})}$ سے تقریباً $\frac{۴}{۴۵}$ فہ^{۵} کا فرق رکھتا ہے جہاں فہ ایک چھوٹا زاویہ ہے ۔

۳۳ ۔ اُس چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کا دائری ناپ اعشاریہ کے ۵ مقامات تک معلوم کرو جو مساوات

جب (لا + $\frac{۱}{۶}\pi$) = ۱۰ جب لا

کو پورا کرتا ہے ۔

۳۴ ۔ مساوات (جب طہ)$^{\text{ل جم طہ}}$ = ب کو تقریبی طور پر حل کرو جہاں ل مثبت ہے

اور بڑا نہیں ہے اور یہ معلوم ہے کہ ط، عہ کے تقریباً مساوی ہے اور عہ خود بہت چھوٹا نہیں ہے ۔

۳۵ ۔ ثابت کرو کہ ط کی صرف ایک مثبت قیمت ہے ایسی کہ ط = ۲ جب ط، اس کی قیمت اعشاریہ کے دو مقامات تک لوکارثمی جدول کے ذریعہ معلوم کرو ۔

۳۶ ۔ رشتہ ا جب^{۱} لا = ب جب^{۱} ما میں جہاں ا اور ب، ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد، صحیح عدد ہیں ثابت کرو کہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی ۲ ب قیمتیں ہیں سوائے اُس صورت کے جبکہ ا اور ب دونوں طاق ہوں اور اس صورت میں ما کی ب قیمتیں ہیں ۔

۳۷ ۔ یہ مانکر کہ اگر عہ وہ حادہ زاویہ ہو جس کی جیب $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ہے جب ۲عہ کو $\frac{\sqrt{۳}}{۲۵۶}$ ہونا چاہیئے ثابت کرو کہ جم عہ ۔ جم $\frac{۲۲}{۷}$ کا اضافہ $\frac{۳}{۱۰ ۲ × ۷}$ پر ۰۰۰۰۰۵ سے کم ہے ۔

نواں باب

مثلثی جدولیں

(139)

۱۰۱ ـــــــــ علم مثلث کے ضابطوں کو مثلثوں کے حل میں اور عددی اعمال میں عملاً مفید ہونے کیلیے یہ ضروری ہے کہ ہمارے پاس عددی جدولیں موجود ہوں جن میں زاویوں کے دائری تفاعل درج ہوں، چنانچہ ان جدولوں سے ہم ایک دیے ہوئے زاویے کے متناظر دائری تفاعلوں کی قیمتیں کافی صحت کے ساتھ معلوم کرسکیں اور (بالعکس) وہ زاویہ معلوم کرسکیں جو تفاعل کی ایک دی ہوئی قیمت کے متناظر ہو۔ ایسی جدولیں دو قسم کی ہوتی ہیں، (۱) طبعی جیوب، جیوب التمام، ماسوں، وغیرہ کی جدولیں جن میں زاویوں کی جیوب، جیوب التمام، ماسوں وغیرہ کی عددی قیمتیں اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتی ہیں، اور (۲) لوکارثمی جیوب، جیوب التمام، ماسوں وغیرہ کی جدولیں جن میں اساس ۱۰ پر ان تفاعلوں کے لوکارثم اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتے ہیں۔

ـــــــــ

سلہ۔ لوکارثموں کو پہلے "مصنوعی اعداد" کہا جاتا تھا اور اس لیے معمولی اعداد طبعی اعداد کہلاتے تھے۔

موخرالذکر جدولیں اکثر علمی مقاصد کے لیے استعمال ہوتی ہیں، اس قسم کی تقریباً تمام جدولوں میں تمام لوکارتموں کو بقدر ۱۰ کے بڑھا دیا جاتا ہے اور اس طرح منفی لوکارتموں کے استعمال سے اجتناب کیا جاتا ہے۔ اس طریقہ پر اضافہ شدہ لوکارتموں کو جدولی لوکارتم کہتے ہیں اور ان کو لکھا جاتا ہے یوں ل جب ۳۰°، اس لیے

ل جب ۳۰° = ۱۰ + لوک جب ۳۰°

طبعی دائری تفاعلوں کی جدولیں محسوب کرنا

۱۰۲ — ہم اول یہ بتائینگے کہ طبعی دائری تفاعلوں کی جدولیں کس طرح محسوب کی جاتی ہیں جن سے ان تفاعلوں کی قیمتیں، صفر سے ۹۰° تک ۱' یا ۱۰' کے وقفوں سے تمام زاویوں کے لیے، اعشاریہ کے چند خاص مقررہ مقامات تک صحیح طور پر معلوم ہونگی۔ ہم پہلے ۱' اور ۱۰' کی جیب اور جیب التمام محسوب کریں گے۔

(140)

(۱) جب ۱'، جم ۱' معلوم کرنا۔

فرض کرو $ط = \frac{\pi}{۶۰ \times ۱۸۰}$، ۱' کے دائری ناپ کو تعبیر کرتا ہے، تب

$$ط = \frac{۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳}{۱۰۸۰۰} = ۰٫۰۰۰۲۹۰۸۸۸۲۰۸۶۶۵$$

اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک، اس لیے

$$\frac{۱}{۶} ط^۳ = \frac{۱}{۶}(۰٫۰۰۰۳)^۳ = ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴$$

اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک۔

اب دفعہ ۹۵ کے مسئلہ کی رُو سے جب ۱' ط اور ط − $\frac{۱}{۶}$ ط^۳ کے

درمیان واقع ہوتا ہے اور یہ دو عدد صرف اعشاریہ کے بارہویں مقام میں ایک دوسرے سے فرق رکھتے ہیں، اس لیے اعشاریہ کے ۱۱ مقامات تک جب اَ کی صحیح قیمت ہے

۰ء۰۰۰۲۹۰۸۸۸۲۰

نیز ہمیں حاصل ہوتا ہے ۱-$\frac{۱}{۲}$ طہ^۲ = ۰٫۹۹۹۹۹۹۹۵۷۶۹۲۰۲۵۰۲۹ اعشاریہ کے ۱۸ مقامات تک۔ اور

$\frac{۱}{۲۴}$ طہ^۴ = $\frac{۱}{۲۴}$ (۰ء۰۰۰۲۹)^۴ = ۰ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۹ اعشاریہ کے ۱۷ مقامات تک۔

اب جم اَ، ۱-$\frac{۱}{۲}$ طہ^۲ اور ۱-$\frac{۱}{۲}$ طہ^۲ + $\frac{۱}{۲۴}$ طہ^۴ کے درمیان واقع ہے، اور چونکہ یہ دو عدد صرف اعشاریہ کے ۱۶ ویں مقام میں ایک دوسرے سے فرق رکھتے ہیں اس لیے اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک

جم اَ = ۰ء۹۹۹۹۹۹۹۵۷۶۹۲۰۲۵

(۲) جب ۱۰″، جم ۱۰″ معلوم کرنا۔

اگر طہ = $\frac{\pi}{۶۴۸۰۰۰}$، جو ۱۰″ کا دائری ناپ ہے

تو　طہ = ۰ء۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸۱۱۰، اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک

$\frac{۱}{۶}$ طہ^۳ = ۰ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲، اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک

اس لیے طہ اور طہ - $\frac{۱}{۶}$ طہ^۳ یہ دو عدد ۱۲ ویں مقام تک ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔

اس لیے جب ۱۰″ = ۰ء۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸، اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک

نیز $\frac{۱}{۲۴}$ طہ^۴ اعشاریہ کے ۱۷ مقامات تک صفر ہے، اس لیے جم ۱۰″ = ۱-$\frac{۱}{۲}$ طہ^۲ یا

جم ۱۰″ = ۰ء۹۹۹۹۹۹۹۹۸۸۲۴۸، اعشاریہ کے ۱۳ مقامات تک

۱۰۳۔ ـــــ ضابطوں

جب ن ا = ۲ جم ا جب (ن-۱) ا - جب (ن-۲) ا،

جم ن ا = ۲ جم ا جم (ن-۱) ا - جم (ن-۲) ا

کی مدد سے ہم اَ یا ۰ اَ کے ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام محسوب کرسکتے ہیں۔ فرض کرو ا = ۰اَ ۲ جم ۰اَ = ۲ ۔ ک جہاں ک = ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۵۰۴ء
تو یہ ضابطے لکھے جا سکتے ہیں۔

جب ن ا ۔ جب (ن۔۱) ا = {جب (ن۔۱) ا ۔ جب (ن۔۲) ا } ۔ ک جب (ن۔۱) ا

جم ن ا ۔ جم (ن۔۱) ا = {جم (ن۔۱) ا ۔ جم (ن۔۲) ا } ۔ ک جم (ن۔۱) ا ؛

(141) اگر ان ضابطوں میں ہم رکھیں ن = ۲ تو ہم جب ۰ ۲َ اور جم ۰ ۲َ محسوب کرسکتے ہیں۔ اب ن = ۳، ۴، ۵، ۔۔۔ فرض کرنے سے فرقوں جب ن ا ۔ جب (ن۔۱) ا، جم ن ا ۔ جم (ن۔۱) ا کو محسوب کیا جاسکتا ہے اگر ان سے پہلے کے فروق جم (ن۔۱) ا ۔ جم (ن۔۲) ا، جب (ن۔۱) ا ۔ جب (ن۔۲) ا اور نیز جب (ن۔۱) ا اور جم (ن۔۱) ا معلوم کرلیے گئے ہوں؛ پس یہ فرق ضابطوں کے مسلسل استعمال سے معلوم کیے جاسکتے ہیں؛ پھر ہم جب ن ا، جم ن ا معلوم کرسکتے ہیں اور اس طرح ۰ ۱َ کے وقفوں سے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی ایک جدول بنا سکتے ہیں۔ چونکہ ک = ۰۰۰۰۰۰۰۲۳۵۴ء
اس لیے ک جب (ن۔۱) ا، ک جم (ن۔۱) ا کو محسوب کرنے میں ہمیں جب (ن۔۱) ا، جم (ن۔۱) ا کی قیمت کے صرف پہلے چند ہندسوں کو استعمال کرنے کی ضرورت ہے۔

۱۰۴ —— جب ضابطوں کے متواتر استعمال سے جب ن ا، جم ن ا حسب قاعدہ بالا محسوب کرلیے جاتے ہیں تو جب ا، جم ا کی تقریبی قیمتوں کے استعمال سے جو خطائیں پیدا ہوتی ہیں وہ اس عمل میں اکٹھی ہوجائینگی؛ اس لیے یہ غور کرنا ضروری ہے کہ اس عمل میں اعشاریہ کے کتنے مقامات استعمال کیے جائیں کہ جب ا، جم ا کی اختیار کردہ قیمتوں سے (جو اعشاریہ کے چند مقامات تک صحیح ہیں) ہمیں جب ن ا، جم ن ا کی قیمتیں اعشاریہ کے مقامات کی ایک مقررہ تعداد تک صحیح معلوم ہوسکیں۔

فرض کرو کہ جب ا، جم ا اعشاریہ کے م مقامات تک محسوب کیے گئے ہیں

اور فرض کرو کہ ا کے متواتر ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام کے محسوب کرنے میں اعشاریہ کے مقامات کی تعداد ر رکھی گئی ہے؛ فرض کرو کہ جیب ن ا یا جم ن ا کی قیمت جو اس عمل سے حاصل ہوتی ہے $ع_ن$ ہے، اور اس کے جواب میں صحیح قیمت $ع_ن + لا_ن$ ہے، تب

تب $ع_ن + لا_ن = (۲ - ک)(ع_{ن-۱} + لا_{ن-۱}) - (ع_{ن-۲} + لا_{ن-۲})$

نیز $ع_ن = (۲ - کَ)\, ع_{ن-۱} - ع_{ن-۲}$،

جہاں کَ، اعشاریہ کے ر مقامات تک ک کی تقریبی قیمت ہے۔ فرض کرو $(ک - کَ)\, ع_{ن-۱} = م_ن$ تو

$$ع_ن = (۲ - ک)\, ع_{ن-۱} - ع_{ن-۲} + م_ن$$

اِس لیے $لا_ن = (۲ - ک)\, لا_{ن-۱} - لا_{ن-۲} - م_ن$

یا $لا_ن = ۲\, لا_{ن-۱} - لا_{ن-۲} - ی_ن$، جہاں $ی_ن = م_ن + ک\, لا_{ن-۱}$

اس کو لکھا جا سکتا ہے $(لا_ن - لا_{ن-۱}) = (لا_{ن-۱} - لا_{ن-۲}) - ی_ن$

پس اسی طرح $(لا_{ن-۱} - لا_{ن-۲}) = (لا_{ن-۲} - لا_{ن-۳}) - ی_{ن-۱}$

. . . .

$$لا_۲ - لا_۱ = لا_۱ - ی_۲$$

اس لیے $لا_ن - لا_{ن-۱} = لا_۱ - (ی_۲ + ی_۳ + \ldots + ی_ن)$؛

عدد $ک\, لا_{ن-۱}$، بمقابلہ $۲\, لا_{ن-۱}$ کے بہت چھوٹا ہے؛ اس لیے $م_ن + ک\, لا_{ن-۱}$، $م_ن$ سے ناقابلِ قدر فرق رکھتا ہے؛ پس عددوں $ی_۲$، $ی_۳$، ...، $ی_ن$ میں سے ہر ایک، $\frac{۱}{۲ \cdot ۱۰^ر}$ سے کم ہے اور اس لیے اِن کا حسابی اوسط $ط_ن$، $\frac{۱}{۲ \cdot ۱۰^ر}$ سے کم ہے، اس لیے

$$\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ل}_{\text{ن-۱}} = \text{لا} - (\text{ن}-۱)\,\text{ط}_{\text{ن}} \text{ ،}$$

$$\text{ل}_{\text{ن-۱}} - \text{ل}_{\text{ن-۲}} = \text{لا} - (\text{ن}-۲)\,\text{ط}_{\text{ن-۱}} \text{ ،}$$

. . . .

$$\text{ل}_{۲} - \text{لا} = \text{لا} - \text{ط}_{۲}$$

یا
$$\text{ل}_{\text{ن}} = \text{ن لا} - (\text{ط}_{۲} + ۲\,\text{ط}_{۳} + \cdots + \overline{\text{ن}-۱}\,\text{ط}_{\text{ن}}) \text{ ؛}$$

(142) اب چونکہ $\text{ط}_{۲}$، $\text{ط}_{۳}$، ...، $\text{ط}_{\text{ن}}$ میں سے ہر ایک $\frac{۱}{۱۰^{\text{ر}}}$ سے کم ہے اس لیے

$$-(\text{ط}_{۲} + ۲\,\text{ط}_{۳} + \cdots) < \frac{\frac{۱}{۲}\,\text{ن}\,(\text{ن}-۱)}{۱۰^{\text{ر}}}$$

یعنے
$$\text{ل}_{\text{ن}} < \frac{\text{ن}}{۱۰^{\text{م}}} + \frac{\text{ن}\,(\text{ن}-۱)}{۲ \times ۱۰^{\text{ر}}}$$

پس بداہتہ
$$\text{ل}_{\text{ن}} < \frac{\text{ن}}{۱۰^{\text{م}}} + \frac{\text{ن}^{۲}}{۲ \times ۱۰^{\text{ر}}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\text{ے})$$

اگر اس ضابطہ میں رکھیں م = ۱۲، ن = ۱۰۸۰۰ تو

$$\text{ل}_{\text{ن}} < \frac{۱۰۸}{۱۰^{۱۰}} + \frac{۵۸۳۲}{۱۰^{\text{ر}-۴}}$$

< ۰۰۰۰۰۰۰۱۰۸، + ۵۸۳۲ .... ۰۰،

جہاں آخری عدد اعشاریہ میں (ر − ۴) صفر ہیں؛ اس لیے اگر ر = ۱۵ تو $\text{ل}_{\text{ن}}$ > ......۰۰۰ یعنے $\text{ل}_{\text{ن}}$ اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح ہے۔ اب ۱۰۸۰۰ × ۱۰ = ۳۰°، اس لیے ۳۰° کی جیب یا جیب التمام اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح معلوم ہوگی۔ اگر ہم ۱۰ کے ضعفوں کے ذریعے ۳۰° تک کی جیوب یا جیوب التمام کے محسوب کرنے میں شروع سے آخر تک اعشاریہ کے ۱۵ مقامات لکھیں۔ ضابطہ (ے) ایسی سب صورتوں میں عدد ر کو متعین کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے تاکہ $\text{ل}_{\text{ن}}$ اعشاریہ کے مقامات کی ایک خاص تعداد تک صفر ہو سکے[1]

---

[1] اس دفعہ کا مکمل مواد سیرے (Serret) کی ٹرگنومیٹری سے لیا گیا ہے۔

مثال

ثابت کرو کہ ۰ا کے ضعفوں کے ذریعے ۴۵ تک کی جیوب اور جیوب التمام کو اعشاریہ کے ۵ صحیح مقامات تک محسوب کرنے کے لیے جب کہ جم ۰ا، جب ۰ا کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک معلوم ہیں یہ ضروری ہے کہ شروع سے آخر تک عمل حساب میں اعشاریہ کے ۷ مقامات رکھے جائیں۔

۱۰۵ ـــــ جب ان زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی جدول درکار ہو جو ۰ا کے یا ا کے وقفوں پر ہیں تو صرف ۳۰ تک کے زاویوں کے لیے قیمتیں محسوب کرنا ضروری ہوتا ہے کیونکہ ہم پھر ۳۰ سے ۶۰ تک کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی قیمتیں ضابطوں

جب (۳۰ + ا) + جب (۳۰ - ا) = جم ا،

جم (۳۰ - ا) - جم (۳۰ + ا) = جب ا،

کے ذریعے ا کو ۳۰ تک تمام قیمتیں دینے سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر ۴۵ تک کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام حاصل ہو جائیں تو پھر ۴۵ اور ۹۰ کے درمیان کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام ضابطہ

جب ا = جم (۹۰ - ا)

کے ذریعے حاصل ہو سکتی ہیں؛ پس ۴۵ سے آگے کے زاویوں کے لیے عمل حساب کو جاری رکھنا غیر ضروری ہے۔

دائری تفاعلوں کی جدولوں کو محسوب کرنے کا جو طریقہ ہم نے اوپر بیان کیا ہے وہ دراصل ریٹی کس (Rheticus; 1514 - 1576) کا ہے؛ اس نے جیوب، ماسوں، اور قاطعوں کی جدولیں تیار کی تھیں جو ۱۵۹۶ء میں اس کے انتقال کے بعد شایع ہوئیں۔ قدیم ترین جدول ٹولمی[1] کی (Almagest) میں وتروں کی جدول ہے جو نصف درجہ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے ہے۔ جدولوں کے مضمون پر تاریخی معلومات ہٹن (Hutton) کی ہسٹری آف میتھامیٹیکل ٹیبلس (143)

[1] Ptolemy

(History of Mathematical Tables) سے حاصل ہونگی نیز دیکھو انگلش انسائیکلو پیڈیا میں ڈی مارگن[1] کا مضمون جدولوں پر۔

عددی جدولوں کی تصدیق

۱۰۶ — پچھلے طریقہ سے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی محسوب کردہ قیمتوں کی صحت کی تصدیق کرنے کے لیے طریقوں کا معلوم کرنا ضروری ہے، یہ تصدیق حسب ذیل ذرایع سے بہ عمل لائی جاسکتی ہے۔

(۱) دفعہ ۶۶ میں ہم نے زاویوں °۳، °۶، °۹ .... کی جیوب اور جیوب التمام کی اصم قیمتوں کی ایک جدول بنائی تھی؛ اس لیے ہم ان زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کو اعشاریہ کے مقامات کی کسی مطلوبہ تعداد تک محسوب کر سکتے ہیں، پھر مصرحۂ بالا طریقہ سے زاویوں کے تفاعلوں کی جو قیمتیں حاصل ہوئی ہیں اُن کا مقابلہ اس طرح حاصل شدہ قیمتوں کے ساتھ کیا جا سکتا ہے۔ اگر ضرورت ہو تو اُن زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی قیمتیں جو °۳۰ کے وقفوں پر ہیں نصف زاویوں کے ضابطوں کے ذریعہ حاصل کی جا سکتی ہیں اور اس طرح ہمیں اعمالِ حساب پر اور زیادہ قریبی جانچ کا طریقہ حاصل ہوتا ہے۔

(۲) بعض مشہور ضابطے جن کو تصدیق کے ضابطے کہا جاتا ہے، یہ ہیں

جم (°۳۶ + ا) + جم (°۳۶ − ا) = جم ا + جب (°۱۸ + ا) + جب (°۱۸ − ا)،

جب ا = جب (°۳۶ + ا) − جب (°۳۶ − ا) + جب (°۷۲ − ا) − جب (°۷۲ + ا)

(یہ دو ضابطے یولر کے ہیں)

[1] De Morgan

جم ا = جب (۴۵° + ا) + جب (۴۵° - ا) - جب (۱۸° + ا) - جب (۱۸° - ا)
(یہ لیجنڈر کا ضابطہ ہے)

تصدیق کے لئے صرف یہ کرنا ہوتا ہے کہ ان متماثلات میں تفاعلوں کی حاصل کردہ قیمتیں درج کیجائیں۔

مماسوں اور قاطعوں کی جدولیں

۱۰۷۔۔۔۔ مماسوں کی جدول بنانا ہو تو ۴۵° تک کے زاویوں کے مماس، ضابطہ مس ا = $\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}}$ کے ذریعے جیوب اور جیوب التمام کی جدولوں سے معلوم کرو؛ پھر ۴۵° سے ۹۰° تک کے زاویوں کے مماس کا گنوی لی کے ضابطے

مس (۴۵° + ا) = ۲ مس ۲ ا + مس (۴۵° - ا)

کے ذریعے حاصل ہو سکتے ہیں۔

قاطع التماموں کی جدول ضابطہ قم ا = مس $\frac{1}{2}$ ا + مم ا کے ذریعے اور قاطعوں کی جدول ضابطہ قط ا = مس ا + مس (۴۵° - $\frac{1}{2}$ ا) کے ذریعے بنائی جاسکتی ہیں۔

سلسلوں کے ذریعہ قیمتیں محسوب کرنا

(144)

۱۰۸۔۔۔۔ زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کو محسوب کرنے کا ایک جدید تر طریقہ دفعہ ۹۹ کے سلسلے استعمال کرنے کا ہے؛
اگر ہم رکھیں لا = $\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\pi}{2}$ تو

جب $(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times 90^\circ) = (\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{\lfloor 3}(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\pi}{2})^3 + \frac{1}{\lfloor 5}(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\pi}{2})^5 - \ldots$

ا؎ Cagnoli

$$\text{جم}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\times 90^{\circ}\right)=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\times\frac{\pi}{2}\right)^{2}+\frac{1}{4!}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\times\frac{\pi}{2}\right)^{4}-\cdots\cdots$$

اس طرح ہمیں حاصل ہوتے ہیں ضابطے

$\text{جب}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\times 90^{\circ}\right)=$

علامت	عدد	حد
=	۱٫۵۷۰۷۹ ۶۳۲۶۷ ۹۴۸۹۶ ۶۱۹۲۳ ۱۳	$\frac{\text{م}}{\text{ن}}$
−	۰٫۶۴۵۹۶ ۴۰۹۷۵ ۰۶۲۴۶ ۲۵۳۶۵ ۵۸	$\frac{\text{م}^{3}}{\text{ن}^{3}}$
+	۰٫۰۷۹۶۹ ۲۶۲۶۲ ۴۶۱۷۶ ۰۳۵۱۲ ۰۵	$\frac{\text{م}^{5}}{\text{ن}^{5}}$
−	۰٫۰۰۴۶۸ ۱۷۵۴۱ ۳۵۳۱۸ ۶۸۸۱۰ ۰۷	$\frac{\text{م}^{7}}{\text{ن}^{7}}$
+	۰٫۰۰۰۱۶ ۰۴۴۱۱ ۸۴۷۸۷ ۳۵۹۸۲ ۱۹	$\frac{\text{م}^{9}}{\text{ن}^{9}}$
−	۰٫۰۰۰۰۰ ۳۵۹۸۸ ۴۳۲۳۵ ۲۱۲۰۸ ۵۳	$\frac{\text{م}^{11}}{\text{ن}^{11}}$
+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۵۶۹ ۲۱۷۲۹ ۲۱۹۶۷ ۹۳	$\frac{\text{م}^{13}}{\text{ن}^{13}}$
−	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۶ ۶۸۸۰۳ ۵۱۰۹۸ ۱۱	$\frac{\text{م}^{15}}{\text{ن}^{15}}$
+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۶۰۶۶ ۹۳۵۷۳ ۱۱	$\frac{\text{م}^{17}}{\text{ن}^{17}}$
−	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۴۳ ۷۷۰۶۵ ۴۷	$\frac{\text{م}^{19}}{\text{ن}^{19}}$
+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۲۵۷۱۴ ۲۳	$\frac{\text{م}^{21}}{\text{ن}^{21}}$
−	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۱۲۵ ۳۹	$\frac{\text{م}^{23}}{\text{ن}^{23}}$
+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۵۲	$\frac{\text{م}^{25}}{\text{ن}^{25}}$

جم$\left(\frac{م}{ن}\times ۹۰^\circ\right)$ =		۱٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰
−	۱٫۲۳۳۷۰ ۰۵۵۰۱ ۳۶۱۶۹ ۸۲۷۳۵ ۴۳	$\frac{م^{۲}}{ن^{۲}}$
+	۰٫۲۵۳۶۶ ۹۵۰۷۹ ۰۱۰۴۸ ۰۱۳۶۳ ۶۶	$\frac{م^{۴}}{ن^{۴}}$
−	۰٫۰۲۰۸۶ ۳۴۸۰۷ ۶۳۳۵۲ ۹۶۰۸۷ ۳۱	$\frac{م^{۶}}{ن^{۶}}$
+	۰٫۰۰۰۹۱ ۹۲۶۰۲ ۷۴۸۳۹ ۴۲۶۵۸ ۰۲	$\frac{م^{۸}}{ن^{۸}}$
−	۰٫۰۰۰۰۲ ۵۲۰۲۰ ۴۲۳۷۳ ۰۶۰۶۰ ۵۵	$\frac{م^{۱۰}}{ن^{۱۰}}$
+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۴۷۱۰ ۸۷۴۷۷ ۸۸۱۸۱ ۷۲	$\frac{م^{۱۲}}{ن^{۱۲}}$
−	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۶۳ ۸۶۶۰۳ ۰۸۳۷۹ ۱۹	$\frac{م^{۱۴}}{ن^{۱۴}}$
+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۶۵۶۵۹ ۶۳۱۱۴ ۹۸	$\frac{م^{۱۶}}{ن^{۱۶}}$
−	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۵۲۹ ۴۴۰۰۲ ۰۱	$\frac{م^{۱۸}}{ن^{۱۸}}$
+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۳ ۴۳۷۷۳ ۹۲	$\frac{م^{۲۰}}{ن^{۲۰}}$
−	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۱۸۳۵ ۹۹	$\frac{م^{۲۲}}{ن^{۲۲}}$
+	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۸ ۲۱	$\frac{م^{۲۴}}{ن^{۲۴}}$
−	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۳	$\frac{م^{۲۶}}{ن^{۲۶}}$

(145) چونکہ صرف ۴۵° تک کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کا محسوب کرنا ضروری ہے اس لیے کہ کسر $\frac{م}{ن}$ ہمیشہ $\frac{۱}{۲}$ سے کم لی جاتی ہے، اس لیے سلسلوں کی بہت تھوڑی رقمیں اعشاریہ کے چند مقامات تک قیمتیں دریافت کرنے کے لیے کافی ہیں۔ یہ سلسلے یولر کی Analysis of the Infinite سے لیے گئے ہیں جہاں انہیں اعشاریہ کے مزید چھ مقامات تک دیا گیا ہے۔

لوکارتمی جدولیں

۱۰۹ — جب طبعی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں تیار ہوجائیں تو لوکارتمی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں معمولی لوکارتم کی جدولوں کے ذریعے بنائی جاسکتی ہیں کیونکہ ان جدولوں سے کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی محسوب کردہ عددی قیمت کا لوکارتم ملیگا؛ اس طور پر حاصل شدہ لوکارتم میں ۱۰ جمع کرو تو متناظر جدولی لوکارتم ل جاتا ہے۔ لوکارتمی مماس رشتہ

ل مس ا = ۱۰ + ل جب ا - ل جم ا

کے ذریعہ معلوم کیے جاسکتے ہیں اور اس طرح لوکارتمی مماسوں کی ایک جدول تیار ہوسکتی ہے۔ ہم کسی آئندہ باب میں ایک راست طریقہ بتائینگے جس سے لوکارتمی جیوب، جیوب التمام اور مماس کی جدولیں بنائی جاسکتی ہیں۔

مثلثی جدولوں کا بیان اور ان کا استعمال

۱۱۰ — مثلثی جدولیں، طبعی یا لوکارتمی، بموجب ذیل بنائی جاتی ہیں:-

(۱) ان سے بالراست صرف صفر اور ۹۰° کے درمیانی زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں؛ ان حدود سے متجاوز مقداروں کے زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں فوراً اخذ کی جاسکتی ہیں۔

(۲) ان جدولوں سے صفر سے ۴۵° تک اور ۴۵° سے ۹۰° تک کے زاویوں کے تفاعلوں کی قیمتیں ایک ہی ہندسوں کی دو مرتبہ قراءت کے ذریعے ملتی ہیں؛ تفاعلوں کے نام 'جیب'، 'جیب التمام'، 'مماس' اور نیز درجے (< ۴۵°) صفحہ کی پیشانی پر لکھے ہوتے ہیں، اور متناظر دقیقے اور ثانئے دائیں طرف کے ستون میں لکھے ہوتے ہیں؛ زاویے بڑھتے جاتے ہیں جیسے جیسے ہم ستون میں نیچے اترتے ہیں۔ نیز 'جیب التمام'، 'جیب'، 'مماس التمام' اور درجے (> ۴۵°) صفحہ کے پائین پر ان ستونوں میں بالترتیب لکھے جاتے ہیں۔[1]

[1] اس عبارت کا سلسلہ صفحہ ۲۴۰ پر دیکھو۔

(146)

ـ	ـــ	جیب	فرق	جیب التمام	فرق	ظل	فرق	ظل التمام	ـــ	ـ
۵۰	۰	۹۶۴۸۶۰۷۴۹	۶۵۵	۹۶۹۷۸۶۱۴۸	۶۸	۹۶۵۰۷۴۶۰۲	۷۲۲	۰۶۴۹۲۵۳۹۸	۰	۱۰
	۱۰	۹۶۴۸۶۱۴۰۴	۶۵۴	۹۶۹۷۸۶۰۸۰	۶۸	۹۶۵۰۷۵۳۲۴	۷۲۲	۰۶۴۹۲۴۶۷۶	۵۰	
	۲۰	۹۶۴۸۶۲۰۵۸	۶۵۴	۹۶۹۷۸۶۰۱۲	۶۸	۹۶۵۰۷۶۰۴۶	۷۲۲	۰۶۴۹۲۳۹۵۴	۴۰	
	۳۰	۹۶۴۸۶۲۷۱۲	۶۵۴	۹۶۹۷۸۵۹۴۴	۶۷	۹۶۵۰۷۶۷۶۸	۷۲۲	۰۶۴۹۲۳۳۳۲	۳۰	
	۴۰	۹۶۴۸۶۳۳۶۶	۶۵۴	۹۶۹۷۸۵۸۷۷	۶۸	۹۶۵۰۷۷۴۹۰	۷۲۲	۰۶۴۹۲۲۵۱۰	۲۰	
	۵۰	۹۶۴۸۶۴۰۲۰	۶۵۴	۹۶۹۷۸۵۸۰۹	۶۸	۹۶۵۰۷۸۲۱۲	۷۲۱	۰۶۴۹۲۱۷۸۸	۱۰	
۵۱	۰	۹۶۴۸۶۴۶۷۴	۶۵۴	۹۶۹۷۸۵۷۴۱	۶۸	۹۶۵۰۷۸۹۳۳	۷۲۲	۰۶۴۹۲۱۰۶۷	۰	۹

د	ق	مماس	فرق	مماس التمام	فرق	جیب	فرق	جیب التمام	ق	
	۱۰	۹٫۴۸۶۵۳۲۸		۹٫۹۷۸۵۶۷۳		۹٫۵۰۷۹۶۵۵		۰٫۴۹۲۰۳۴۵	۵۰	
			۶۵۴		۶۸		۷۲۱			
	۲۰	۹٫۴۸۶۵۹۸۲		۹٫۹۷۸۵۶۰۵		۹٫۵۰۸۰۳۷۶		۰٫۴۹۱۹۶۲۴	۴۰	
			۶۵۳		۶۷		۷۲۲			
	۳۰	۹٫۴۸۶۶۶۳۵		۹٫۹۷۸۵۵۳۸		۹٫۵۰۸۱۰۹۸		۰٫۴۹۱۸۹۰۲	۳۰	
			۶۵۴		۶۸		۷۲۱			
	۴۰	۹٫۴۸۶۷۲۸۹		۹٫۹۷۸۵۴۷۰		۹٫۵۰۸۱۸۱۹		۰٫۴۹۱۸۱۸۱	۲۰	
			۶۵۳		۶۸		۷۲۱			
	۵۰	۹٫۴۸۶۷۹۴۲		۹٫۹۷۸۵۴۰۲		۹٫۵۰۸۲۵۴۰		۰٫۴۹۱۷۴۶۰	۱۰	
			۶۵۳		۶۸		۷۲۱			
۵۲	۰	۹٫۴۸۶۸۵۹۵		۹٫۹۷۸۵۳۳۴		۹٫۵۰۸۳۲۶۱		۰٫۴۹۱۶۷۳۹	۰	

۳۷ درجہ

جن میں صفحہ کی پیشانی پر جیب، جیب التمام، مماس لکھے ہوئے ہیں؛ بائیں طرف کے ستون میں ان زاویوں کے دقیقے اور ثانیے لکھے ہوتے ہیں جو قبل الذکر زاویوں کے تکملے ہیں، ظاہر ہے کہ یہ موخرالذکر زاویے بڑھتے ہیں جیسے جیسے ہم ستون میں اوپر چڑھتے ہیں۔ ہم نے نمونہ کے طور پر اوپر کیلٹ (Callet) کے سات ہندسی لوکارتمی جدولوں سے ایک صفحہ کا حصہ دیا ہے، یہ جدولیں ۱۰ً کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے تیار کی گئی ہیں۔

مثالاً جس ستون کے سرے پر جیب التمام لکھا ہے اس کی تیسری سطر سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ ۹.۹۸۷۶۰۱۲، زاویہ ۱۷° ۵۰ََ ۴۰ً کی جدولی لوکارتمی جیب التمام ہے، اور بائیں طرف کے ستون میں دقیقوں اور ثانیوں کو پڑھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہی عدد، متکمل زاویے ۷۲° ۹ََ ۲۰ً کی لوکارتمی جیب ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ لوکارتمی جیوب اور مماس زاویہ کے ساتھ بڑھتے ہیں لیکن لوکارتمی جیوب التمام اور مماس التمام زاویہ کے بڑھنے سے گھٹتے ہیں۔

۱۱۱ــــ اب اگر کوئی زاویہ ایسا ہو جس کی مقدار دو زاویوں کے درمیان جن کے تفاعل جدول میں درج ہیں واقع ہے تو اس زاویہ کے تفاعلوں کو معلوم کرنے کے لئے ہم ایک اصول استعمال کرینگے جس کی تحقیق ابھی کی جائیگی؛ وہ اصول یہ ہے کہ سوائے ان زاویوں کے جو یا تو بہت چھوٹے ہیں یا زاویہ قائمہ کے بہت قریب ہیں کسی زاویہ کے طبعی تفاعل یا لوکارتمی تفاعل میں چھوٹی تبدیلیاں خود زاویے میں جو تبدیلی ہوئی ہے اس کے تناسب ہوتی ہیں۔

مثالاً اگر دو متصلہ جدولی قیمتوں کے درمیان فرق ع ہے جب کہ جدولی زاویے میں ۱۰ً کا فرق ہے تو چھوٹے جدولی زاویہ کے تفاعل کی

قیمت اور اس سے بقدر ۱ً بڑے ایک زاویہ کے تفاعل کی قیمت کے درمیان فرق ۱/۱۰ عہ ہوگا؛ زاویہ میں ۱۰ً اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ عہ ہے اور اس لیے زاویہ میں ماً (<۱۰ً) کے اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ عہ کی وہ کسر ہے جو ما کو ۱۰ کے ساتھ ہے۔ یعنی ما/۱۰ عہ۔ کیلٹ کی جدولوں میں (جس کا نمونہ اوپر دیا گیا ہے) متصلہ لوکارثموں کے درمیان کے فرق بغیر علامت اعشاریہ کے اُس ستون میں دیے گئے ہیں جس کے سرے پر "فرق" لکھا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہمیں ل جب ۷° ۱۵َ ۱۳ً کی قیمت معلوم کرنی ہے، جدول سے ہم حاصل کرتے ہیں

ل جب ۷° ۱۵َ ۱۰ً = ۹٫۴۸۶۵۳۲۸

ل جب ۷° ۱۵َ ۲۰ً = ۹٫۴۸۶۵۹۸۲

فرق = ۶۵۴

تب ۳/۱۰ × ۶۵۴ = ۱۹۶٫۲، اس لیے پہلے لوکارثم میں ہمیں ٫۰۰۰۰۱۹۶ جمع کرنا چاہیے، اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

ل جب ۷° ۱۵َ ۱۳ً = ۹٫۴۸۶۵۵۲۲

نیز فرض کرو کہ ہمیں وہ زاویہ مطلوب ہے جس کا جدولی لوکارثمی مماس ۹٫۵۰۸۲۰۳۲ ہے۔ جدول میں ہم دیکھتے ہیں کہ دیا ہوا لوکارثم ذیل کے دو لوکارثموں کے درمیان واقع ہے۔

ل مس ۷° ۱۵َ ۴۰ً = ۹٫۵۰۸۱۸۱۹

ل مس ۷° ۱۵َ ۵۰ً = ۹٫۵۰۸۲۵۴۰

فرق = ۷۲۱

دیے ہوئے لوکارثمی مماس اور جدول سے حاصل شدہ پہلے لوکارثمی مماس کے درمیان فرق ۲۱۳ ہے، اس لیے وہ زاویہ جس کو ۷° ۱۵َ ۴۰ً میں جمع کرنا ہوگا ۲۱۳/۷۲۱ × ۱۰ً = ۲٫۹ً (تقریباً) ہے۔ پس مطلوبہ زاویہ ہے ۷° ۱۵َ ۴۳ً تقریباً۔

تناسب اجزاء کا اصول

۱۱۲ ـــــ اب ہم اس امر کی تحقیق کرینگے کہ تناسب اضافہ کا اصول، جو ہم نے دفعہ سابق میں اختیار کیا ہے کہاں تک صحیح ہے اور کن مستثنیات کے ساتھ؟

فرض کرو کہ لا سے کوئی زاویہ تعبیر ہوتا ہے اور ف (لا) سے لا کا کوئی طبعی یا لوکارتمی تفاعل تعبیر ہوتا ہے تو ہم مختلف صورتوں میں یہ بتائینگے کہ اگر ھ کوئی چھوٹا زاویہ ہو جس کو دائری ناپ میں ناپا گیا ہے اور اگر اس کو لا میں جمع کیا جائے تو

ف (لا + ھ) - ف (لا) = ھ فَ (لا) + ھ² ر،

جہاں فَ (لا)، لا کا کوئی دوسرا تفاعل ہے اور ر وہ تفاعل ہے جو محدود رہتا ہے جبکہ ھ = ۰.

اس ربط سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ھ کافی چھوٹا ہو تو لا کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے ف (لا + ھ) - ف (لا)، ھ کے تناسب ہے اور یہ معلوم ہوگا کہ بالعموم ھ² ر اس قدر چھوٹا ہوگا کہ وہ، تفاعلوں کی قیمتوں پر اعشاریہ کے مقامات کی اس تعداد تک، جو جدول میں درج ہے اثرانداز نہ ہوگا؛ (148)
پس لا کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے

(ف (لا + ھ) - ف (لا)) / ھ

اعشاریہ کے مقامات کی جدولی تعداد تک مستقل ہے۔ تاہم دو مستثنیٰ صورتیں پیدا ہونگی۔

(۱) اگر لا ایسا ہو کہ فَ (لا) بہت چھوٹا ہے تو فرق ف (لا + ھ) - ف (لا) معدوم ہو سکتا ہے بلحاظ اس رتبہ کے جو جدولوں میں درج ہے؛ تب فرق ف (لا + ھ) - ف (لا) کو ناقابل قدر (Insensible) کہتے ہیں اور

اس صورت میں ف (لا) کی دو یا زیادہ متصلہ جدولی قیمتیں ایک ہی ہو سکتی ہیں۔

(۲) اگر لا ایسا ہو کہ بمقابلہ فَ (لا) کے مر بڑا ہے تو ممکن ہے کہ رقم ھ² مر بمقابلہ ھ فَ (لا) کے چھوٹی نہ ہو؛ اِس صورت میں فرق ف (لا + ھ) - ف (لا)، ھ کے تناسب نہیں ہے اور اس کو ہم بے قاعدہ کہینگے۔

اِن دونوں صورتوں (۱) اور (۲) میں تناسبوں کا طریقہ ناکام رہتا ہے لیکن ہم یہ بتائینگے کہ کس طرح خاص ترکیبوں سے یہ مشکلات رفع ہوتی ہیں۔

ٹیلر کے مسئلہ سے جس سے طالب علم واقف ہے یہ معلوم ہوگا کہ مندرجۂ بالا ضابطہ ٹیلر کے مسئلہ

ف (لا + ھ) = ف (لا) + ھ فَ (لا) + ½ ھ² فً (لا + طھ)

کی خاص صورت ہے جس میں طہ، صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے، پس مر = ½ فً (لا + طھ) اور ف (لا + ھ) - ف (لا) = ھ فَ (لا) مان لینے سے جو خطا ہوتی ہے وہ ½ ھ² فً (ی) کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتوں کے درمیان واقع ہے جو وہ حدود ی = لا اور ی = لا + ھ کے درمیان اختیار کرتا ہے۔

۲۱۱ — اول فرض کرو کہ ف (لا) = جب لا

تو جب (لا + ھ) = جب لا جم ھ + جم لا جب ھ

یا جب (لا + ھ) - جب لا = جم لا (ھ - 1/۶ ھ³ + ...) - جب لا (½ ھ² - 1/۲۴ ھ⁴ + ...)

= ھ جم لا - ½ ھ² جب لا + ھ کی اعلیٰ قوتیں

اس صورت میں فَ (لا) = جم لا، اور مر کی تقریبی قیمت = - ½ جب لا

پس جب (لا + ھ) - جب لا = ھ جم لا - ½ ھ² جب لا ...... (۱)

فرق کی تقریبی مساوات ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ تقریبی طور پر

جم (لا + ھ) - جم لا = - ھ جب لا - ½ ھ² جم لا ...... (۲)

نیز مس (لا + ھ) ـ مس لا = $\frac{\text{جب ھ}}{\text{جم لا جم (لا + ھ)}}$ ......

= $\frac{\text{ھ}}{\text{جم}^2 \text{ لا ـ ھ جب لا جم لا}}$

یا تقریبی طور پر
مس (لا + ھ) ـ مس لا = ھ قط^2 لا + ھ^2 قط^2 مس لا....... (۳)

(149) نیز ل جب (لا + ھ) ـ ل جب لا = لوک $\frac{\text{جب (لا + ھ)}}{\text{جب لا}}$

= لوک (۱ ـ $\frac{1}{2}$ ھ^2 + ھ مم لا)

یا ل جب (لا + ھ) ـ ل جب لا = ھ مم لا ـ $\frac{1}{2}$ ھ^2 قم^2 لا........ (۴)

اسی طرح ل جم (لا + ھ) ـ ل جم لا = ـ ھ مس لا ـ $\frac{1}{2}$ ھ^2 قط^2 لا..... (۵)

ل مس (لا + ھ) ـ ل مس لا = $\frac{\text{ھ}}{\text{جب لا جم لا}}$ ـ ۲ ھ^2 $\frac{\text{جم ۲ لا}}{\text{جب}^2 \text{ ۲ لا}}$ ..... (۶)

ہر صورت میں ہم نے ر کی صرف تقریبی قیمت معلوم کی ہے۔ یعنی ہم نے وہ رقمیں چھوڑ دی ہیں جن میں ھ کی تیسری اور اعلیٰ قوتیں شامل ہوتی ہیں۔ ان چھ مساواتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ھ کافی چھوٹا ہے تو فرق، لا کی ایسی قیمتوں کے لیے جو نہ چھوٹی ہیں اور نہ زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی، ھ کے متناسب ہیں۔ حسب ذیل مستثنیٰ صورتیں پیدا ہوتی ہیں:۔

(۱) فرق، جب (لا + ھ) ـ جب (لا) ناقابل قدر ہے جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں ھ جم لا بہت چھوٹا ہے؛ نیز یہ فرق بے قاعدہ بھی ہے کیونکہ $\frac{1}{2}$ ھ^2 جب لا، ھ جم لا کے ساتھ مقابلہ پذیر ہو سکتا ہے۔

(۲) فرق، جم (لا + ھ) ـ جم لا، ناقابل قدر ہے جب کہ لا چھوٹا ہو،

نیز یہ اس صورت میں بے قاعدہ بھی ہے۔

(۳) فرق، مس (لا + ھ)۔مس لا، بے قاعدہ ہے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں ھ^{۲} قط^{۲} لا مس لا، ھ قط^{۲} لا کے ساتھ مقابلہ پذیر ہو سکتا ہے۔

(۴) فرق، ل جب (لا + ھ)۔ل جب لا، بے قاعدہ ہے جب کہ لا چھوٹا ہو اور نا قابل قدر اور بے قاعدہ دونوں جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔

(۵) فرق، ل جم (لا + ھ)۔ل جم لا، نا قابل قدر اور بے قاعدہ ہے جب کہ لا چھوٹا ہو، اور بے قاعدہ ہے جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔

(۶) فرق، ل مس (لا + ھ)۔ ل مس لا، بے قاعدہ ہے جب کہ لا خواہ چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ۔

یہ توجہ طلب ہے کہ جو فرق نا قابل قدر ہے وہ بے قاعدہ بھی ہے لیکن اس کا عکس درست نہیں ہے۔

تقرب کا وہ درجہ معلوم کرنے کے لیے جس تک تناسب اجزا کا اصول کسی صورت میں درست رہتا ہے سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ ر کی اصلی قیمت پر غور کیا جائے؛ جب (لا + ھ)۔جب لا کی صورت میں دوسری رقم کی اصلی قیمت ہے۔ $\frac{۱}{۲}$ ھ^{۲} جب (لا + طہ ھ) جہاں طہ صفر اور ایک کے درمیان ہے؛ اگر جدول ۱۰″ کے وقفوں پر بنائی گئی ہے تو $\frac{۱}{۲}$ ھ^{۲} کی بڑی سے بڑی قیمت ہے

$\frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi\,۱۰}{۱۸۰\times۶۰\times۶۰}\right)^{۲}$ یا $\frac{۱}{۲}$ (۰٫۰۰۰۵)^{۲} ؛ اس سے اعشاریہ کے پہلے آٹھ مقامات تک کوئی خطا واقع نہیں ہوتی؛ مس (لا + ھ)۔مس لا کی صورت میں خطا ہے

$$\text{(۰٫۰۰۰۵)}^{۲}\ \text{قط}^{۲}\ \text{(لا + طہ ھ) مس (لا + طہ ھ)}$$

پس اگر مس لا + مس^{۳} لا = ۴۰ تو خطا، اعشاریہ کے ساتویں مقام سے ظاہر ہونا شروع

(150)

کر لیگی۔ ل جب لا کی صورت میں اعشاریہ کے ساتویں مقام تک کوئی خطا نہ ہوگی اگر لا > ۵۔

۱۱۴۔ — جب ایک تفاعل کے فرق اعشاریہ کے اتنے مقامات تک جتنے جدولوں میں درج ہوتے ہیں، ناقابل قدر ہوں تو جدولوں سے یہ تفاعل معلوم ہوگا جب کہ زاویہ معلوم ہو، لیکن اس کے برعکس ہم اس تفاعل کے ذریعہ کسی درمیانی زاویہ کو معلوم کرنے کے لیے جدولیں استعمال نہیں کر سکتے؛ مثلاً چھوٹے زاویوں کے لیے ہم ل جم لا کی قیمت سے لا متعین نہیں کر سکتے، یا ایک زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی زاویوں کے لیے ل جب لا کی قیمت سے لا متعین نہیں کر سکتے۔ جب ایک تفاعل کے فرق بے قاعدہ ہوں اور ناقابل قدر نہ ہوں تو تناسب اجزا کا مذکورہ بالا تقریبی طریقہ تفاعل کے ذریعہ زاویہ کی تعیین کے لیے کافی نہیں ہے اور نہ زاویہ کے ذریعہ تفاعل کی تعیین کے لیے کافی ہے؛ مثلاً تقریب ناقابل قبول ہے

ل جب لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو،

ل جم لا کے لیے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو،

اور　ل مس لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ کے مساوی۔

ان صورتوں میں جن میں فرق بے قاعدہ ہیں اور ناقابل قدر نہیں ہیں حسب ذیل ذرائع استعمال کیے جا سکتے ہیں تاکہ تفاعل کی ایک دی ہوئی قیمت کے جواب میں زاویہ معلوم ہو سکے یا ایک دیے ہوئے زاویہ کے جواب میں تفاعل کی قیمت معلوم ہو سکے۔

(۱) ہم ل جب لا، ل مس لا کی وہ جدولیں جو ایک ثانیہ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے پہلے چند درجوں تک محسوب کی گئی ہوتی ہیں اور ل جم لا، ل مس لا کی وہ جدولیں جو ۹۰° کے قریب کے چند زاویوں کے لیے ایک ثانیہ کے وقفوں پر تیار کی گئی ہوتی ہیں استعمال کر سکتے ہیں۔ کیلٹ اپنے مثلثی جدولوں میں ایسی ایک جدول دیتا ہے۔

پھر ہم اُن تمام زاویوں کے لیے جو صفر کے یا زاویہ قائمہ کے بالکل قریب نہ ہوں متناسب اجزا کا اصول استعمال کر سکتے ہیں۔

(۲) ڈلمبر[1] کا طریقہ

اس طریقہ میں ل جب لا یا ل مس لا کو ایسی دو رقموں کے مجموعہ میں توڑ دیا جاتا ہے کہ ان میں سے ایک کے لئے فرق ناقابل قدر ہوتے ہیں لا کی اُن قیمتوں کے نزدیک جہاں بے قاعدگی واقع ہوتی ہے، اور دوسری رقم کے لیے فرق باقاعدہ ہوتے ہیں۔ اِن رقموں میں سے پہلی کے لیے فرق بے قاعدہ ہے لیکن اس کی چنداں اہمیت نہیں ہے کیونکہ یہ فرق ناقابلِ قدر بھی ہے۔ پس اگر ایک چھوٹے زاویہ نً کا دائری ناپ لا ہو تو

$$\text{ل جب نً} = \left(\text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} + \text{ل عہ}\right) + \text{لوک ن}،$$

$$\text{ل مس نً} = \left(\text{لوک}\,\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}} + \text{ل عہ}\right) + \text{لوک ن}، \qquad (151)$$

جہاں عہ، اً کا دائری ناپ ہے۔

اب $\text{لوک}\,(\text{ن}+\text{ھ}) - \text{لوک ن} = \text{لوک}\left(1+\frac{\text{ھ}}{\text{ن}}\right)$

$$= \frac{\text{ھ}}{\text{ن}} - \frac{\text{ھ}^2}{2\,\text{ن}^2} + \ldots\ldots،$$

اس لیے لوک ن کے لیے فرق باقاعدہ ہیں اگر ھ بمقابلہ ن کے چھوٹا ہو۔ نیز $\text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$، $\text{لوک}\,\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ کے لیے فرق ناقابل قدر ہیں کیونکہ

$$\text{لوک}\,\frac{\text{جب}\,(\text{لا}+\text{ھ})}{\text{لا}+\text{ھ}} - \text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \text{لوک}\,\frac{\text{جب}\,(\text{لا}+\text{ھ})}{\text{جب لا}} - \text{لوک}\,\frac{\text{لا}+\text{ھ}}{\text{لا}}$$

$$= \text{ھ مم لا} - \frac{\text{ھ}^2}{2}\,\text{قم}^2\,\text{لا} - \frac{\text{ھ}}{\text{لا}} + \frac{\text{ھ}^2}{2\,\text{لا}^2}$$

$$= \text{ھ}\left(\text{مم لا} - \frac{1}{\text{لا}}\right) + \frac{\text{ھ}^2}{2}\left(\frac{1}{\text{لا}^2} - \text{قم}^2\,\text{لا}\right)،$$

[1] Delambre

اور $\dfrac{\text{لوک مس}\,(\text{لا}+\text{ھ})}{\text{لا}+\text{ھ}} - \text{لوک}\,\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$

$= \text{ھ}\left(\dfrac{1}{\text{جب لا جم لا}} - \dfrac{1}{\text{لا}}\right) + \dfrac{\text{ھ}^2}{2}\left(-\dfrac{4\,\text{جم}\,2\,\text{لا}}{\text{جب}^2\,2\,\text{لا}} + \dfrac{1}{\text{لا}^2}\right)$

اِن میں سے ہر فرق ناقابل قدر ہے کیونکہ ھ کا سر چھوٹا ہے جبکہ لا چھوٹا ہو۔

اگر لوک $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ + ل عہ، لوک $\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ + ل عہ کی قیمتوں کی جدولیں ربع کے پہلے چند درجوں تک تیار کی جائیں تو ہم ان جدولوں کو عددوں کے طبعی لوکارتموں کی جدولوں کے ساتھ ن کو ٹھیک طور پر معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں جبکہ ل جب ن یا ل مس ن دیا گیا ہو، یا بالعکس۔

اگر ل جب ن یا ل مس ن دیا گیا ہے تو ن کی تقریبی قیمت معلوم کرو؛ پھر جدول سے لوک $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ + ل عہ یا لوک $\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ + ل عہ کی قیمت حاصل کرو جن میں سے ہر ایک بہت سست بدلتا ہے۔ تب لوک ن اس قیمت

ل جب ن ـ (لوک $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ + ل عہ)

یا ل مس ن ـ (لوک $\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ + ل عہ)

(152) سے حاصل ہوتا ہے اور ہم طبعی لوکارتموں کی جدول سے ن کو ٹھیک ٹھیک معلوم کر لیتے ہیں۔ اگر ن دیا گیا ہے تو جدول سے لوک $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ + ل عہ کی قیمت ملتی ہے اور پھر جب ن کو ضابطہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

(۳) میاسکلین (Maskelyne) کا طریقہ۔

اس طریقہ کا اصول وہی ہے جو ڈلمبر کے طریقہ کا ہے۔ اگر

لا ایک چھوٹا زاویہ ہو تو

$$\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{6} = \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \text{جم}^{\frac{1}{3}} \text{ لا، تقریباً}$$

اس لیے لوک جب لا = لوک لا + $\frac{1}{3}$ لوک جم لا

اب چونکہ لا ایک چھوٹا زاویہ ہے، لوک جم لا کے فرق ناقابل قدر ہیں؛ اس لیے جم لا کی تقریبی قیمت کا استعمال کرنا کافی ہے۔ اگر لوک جب لا دیا گیا ہے تو ہم لا کی تقریبی قیمت معلوم کرتے ہیں اور اس کو لوک جم لا کی قیمت معلوم کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں؛ پھر مساوات بالا سے لا حاصل ہو جاتا ہے۔ اگر لا دیا گیا ہے تو ہم طبعی لوکارتموں کی جدول سے لوک لا ٹھیک ٹھیک معلوم کر سکتے ہیں اور نیز لوک جم لا کی تقریبی قیمت؛ تب اوپر کے ضابطہ سے لوک جب لا مل جاتا ہے۔ اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ لوک مس لا، ضابطہ لوک مس لا = لوک لا - $\frac{2}{3}$ لوک جم لا سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال

ثابت کرو کہ ضابطہ ذیل میا سکلین کے ضابطہ سے زیادہ قریبی طور پر صحیح ہے۔

لوک جب ط = لوک ط - $\frac{1}{45}$ لوک جم ط + $\frac{64}{45}$ لوک جم $\frac{ط}{2}$

لوکارتمی اعمال حساب کے لیے ضابطوں کو موزوں بنانا

۱۱۵ — کسی جملہ کو ایسی شکل میں تحویل کرنے کے لیے کہ لوکارتموں کی جدولوں کی مدد سے عددی قیمتیں محسوب کی جا سکیں ایسے ابدالات

عمل میں لانے چاہئیں جو دیے ہوئے جملوں کو سادہ جملوں کے حاصل ضرب میں تحویل کردیں؛ یہ عمل ایک یا زیادہ معاون زاویوں کے ذریعہ اکثر ہوسکیگا مثلاً دیکھو امثلہ ذیل:-

(۱) $\sqrt[3]{ا^{6}+ب^{6}}$ = $ا^{2}$ قط$^{\frac{2}{3}}$ فہ، جہاں مس فہ = $\frac{ب^{3}}{ا^{3}}$

پس لوک $\sqrt[3]{ا^{6}+ب^{6}}$ = ۲ لوک ا + $\frac{2}{3}$ (ل قط فہ - ۱۰)

جہاں ل مس فہ = ۱۰ + ۳ (لوک ب - لوک ا)

اس طرح $\sqrt[3]{ا^{6}+ب^{6}}$ لوکارثمی جدولوں کے ذریعہ محسوب کیا جاسکتا ہے اگر فہ پہلے اِن جدولوں سے معلوم کرلیا گیا ہو۔

(158) (۲) ا جم عہ + ب جب عہ = ا جم (عہ - فہ) قط فہ، جہاں مس فہ = $\frac{ب}{ا}$

پس لوک (ا جم عہ + ب جب عہ) = لوک ا + ل جم (عہ - فہ) - ل جم فہ

جہاں ل مس فہ = ۱۰ + لوک ب - لوک ا

سے فہ معلوم ہوتا ہے۔

۱۱۶ — دودرجی مساوات کی اصلیں عدداً محسوب کرنا جبکہ اصلیں حقیقی ہوں۔

فرض کرو کہ مساوات ا $لا^{2}$ + ب لا + ج = ۰ ہے اور اول فرض کرو کہ ا اور ج دونوں مثبت ہیں۔ اب مساوات مس^{2} طہ - ۲ قم ۲ طہ مس طہ + ۱ = ۰ پر غور کرو اور فرض کرو لا = ما $\sqrt{\frac{ج}{ا}}$ تو لا کی مساوات بالا ہوجاتی ہے

$$ما^{2} + ب\, ما \Big/ \sqrt{ا ج} + ۱ = ۰$$

پس اگر جب ۲ طہ = ۲ $\sqrt{ا ج}$ / ب تو ما کی دودرجی مساوات وہی ہوگی جو مس طہ کی ہے جس کی اصلیں مس طہ، مم طہ ہیں۔ پس دیے ہوئے دودرجی کی اصلیں ہیں

$$-\sqrt{\frac{ج}{ا}}\ \text{مس طہ} ،\ -\sqrt{\frac{ج}{ا}}\ \text{ام طہ}$$

جہاں جب ۲ طہ = $\frac{۲\sqrt{اج}}{ب}$ ، اور اس لیے اصلیں لوکارتمی جدولوں کے ذریعہ محسوب کی جا سکتی ہیں۔

اگر ا اور ج مختلف العلامت ہوں تو ہم دو درجی کو ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰ لے سکتے ہیں؛ اس صورت میں رکھو لا = $\sqrt{\frac{ج}{ا}}$ ی تو دو درجی

$$ی^۲ + \frac{ب}{\sqrt{اج}}\, ی - ۱ = ۰$$

میں تحویل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا مقابلہ مساوات

$$\text{مس}^۲\ \text{طہ} + ۲\ \text{ہم}\ ۲\ \text{طہ مس طہ} - ۱ = ۰$$

کے ساتھ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مس ۲ طہ = $\frac{۲\sqrt{اج}}{ب}$ تو لا میں دو درجی مساوات کی اصلیں ہیں $\sqrt{\frac{ج}{ا}}$ مس طہ اور $-\sqrt{\frac{ج}{ا}}$ ام طہ۔

۱۱۷ — کعبی لا^۳ + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں محسوب کرنا جبکہ اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں۔

مساوات　جب^۳ طہ − $\frac{۳}{۴}$ جب طہ + $\frac{۱}{۴}$ جب ۳ طہ = ۰

پر غور کرو۔ فرض کرو لا = ا $\sqrt{-\frac{۴}{۳}ق}$ تو لا میں جو کعبی مساوات ہے وہ ہو جاتی ہے

$$ا^۳ - \frac{۳}{۴}\, ا + ر\left(-\frac{۴}{۳}ق\right)^{-\frac{۳}{۲}} = ۰$$

یہ مساوات وہی ہوگی جو جب طہ کی مندرجہ بالا مساوات ہے اگر

$$\text{جب}\ ۳\ \text{طہ} = ۴ ر\left(-\frac{۴}{۳}ق\right)^{-\frac{۳}{۲}} = \left(-\frac{۲۷ ر^۲}{۴ ق^۳}\right)^{\frac{۱}{۲}} ،$$

اس لیے لا کی قیمتیں ہیں:

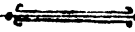
$$\sqrt{-\frac{۴}{۳}ق}\ \text{جب طہ} ،\ \sqrt{-\frac{۴}{۳}ق}\ \text{جب}\left(\text{طہ} + \frac{۲}{۳}\pi\right) ،\ \sqrt{-\frac{۴}{۳}ق}\ \text{جب}\left(\text{طہ} + \frac{۴}{۳}\pi\right) ،$$

وہ شرط کہ کعبی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یہ ہے کہ جب ۳ ط ≯ ۱

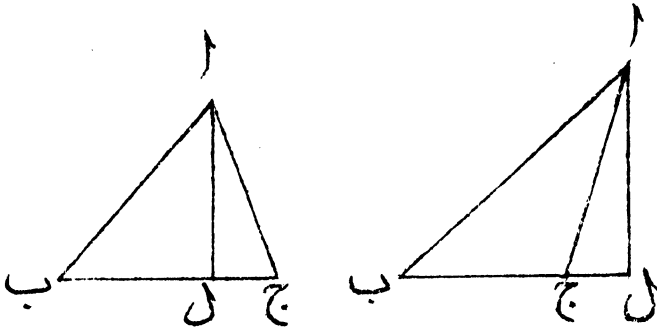
(154) ہم کسی آئندہ باب میں دو خیالی اصلوں والی کعبی مساوات کی اصلیں دریافت کرنے کا طریقہ بیان کرینگے۔

وہ اعمال جن کے ذریعہ ہم نے دو درجی اور کعبی مساواتوں کو حل کیا ہے یہ بتاتے ہیں کہ یہ دو جبری مسئلے فی الواقعی اُن ہندسی مسئلوں کے مماثل ہیں جو ایک زاویہ کی علی الترتیب تنصیف و تثلیث سے متعلق ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک دو درجی مساوات صرف پٹری اور پرکار کی مدد سے ترسیمی طور پر حل کی جاسکتی ہے لیکن کعبی مساوات ان کی مدد سے ترسیمی طور پر بالعموم حل نہیں ہوسکتی کیونکہ یہ آلے ایک زاویہ کی تثلیث کے ہندسی مسئلہ کو عام طور پر حل کرنے کے لیے ناکافی ہیں۔

(155)

دسواں باب

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان رشتے

۱۱۸ـــــ اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ہم زاویوں ب ا ج، ا ب ج، ا ج ب کی مقداروں کو علی الترتیب بڑے حروف ا، ب، ج سے تعبیر کرینگے اور ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کے طولوں کو علی الترتیب چھوٹے حروف ل، ب، ج سے۔ ہم اس باب میں مختلف اہم مسئلوں کی تحقیق کرینگے جو مثلث کے ضلعوں ل، ب، ج کو زاویوں کے دائری تفاعلوں کے ساتھ مربوط کرتے ہیں۔ اِن ضابطوں سے اُن طریقوں کی بنیاد ملیگی جن کے ذریعہ مثلث کو اُن مختلف صورتوں میں حل کیا جاتا ہے جن میں مثلث کے تین اجزا دیے جاتے ہیں۔

۱۱۹ـــــ ظلّوں کے بنیادی مسئلے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ب ج پر ب ا، ا ج کے ظلّوں کا مجموعہ ب ج کے مساوی ہے اور ب ج پر کے ایک عمود پر ان کے ظلّوں کا مجموعہ صفر ہے۔ ان واقعات کو بیان کرنے کے بعد چونکہ ا ج کی مثبت سمت، ب ج کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ ـ ج بناتی ہے اِس لیے

ب ا جم ب + ا ج جم ج = ا ،

یا ج جم ب + ب جم ج = ا ،

اور ب ا جب ب - ا ج جب ج = ۰ ،

یا ج جب ب - ب جب ج = ۰ ،

(158) جس کو لکھا جاسکتا ہے (ب / جب ب) = (ج / جب ج) ؛

اسی طرح دیگر دو ضلعوں اور ان پر کے عمودوں میں سے ہر ایک پر باری باری سے ظل لینے سے جو رشتے حاصل ہوتے ہیں اُن کو اور محصلہ بالا رشتوں کو حسب ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

ا = ب جم ج + ج جم ب ،
ب = ج جم ا + ا جم ج ، .... (۱)
ج = ا جم ب + ب جم ا ،

(ا / جب ا) = (ب / جب ب) = (ج / جب ج) .... (۲)

مساواتوں (۲) سے اِس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ کسی مثلث کے اضلاع، متقابلہ زاویوں کی جیبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

۱۲۰ ـــــ رشتوں (۲) کو اس طرح بھی ثابت کیا جاسکتا ہے:۔
مثلث ا ب ج کا حائط دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ اس کا نصف قطر ر ہے، تب ضلع ب ج = ۲ × دائرہ کا نصف قطر × اس زاویہ کے نصف کی جیب جو ب ج کے محاذی مرکز پر بنتا ہے

یعنے ب ج = ۲ ر جب ا یا ۲ ر جب (۱۸۰ - ا)

پس ا = ۲ ر جب ا

اسی طرح ب = ۲ ر جب ب

اور ج = ۲ ر جب ج

اس لیے $\frac{ا}{\text{جب ا}} = \frac{ب}{\text{جب ب}} = \frac{ج}{\text{جب ج}} = ۲ ر$

رشتہ (۲) کو (۱) سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے، چنانچہ پہلی دو مساواتوں کو شکل

ا - ب جم ج - ج جم ب = ۰،

- ا جم ج + ب - ج جم ا = ۰،

میں رکھنے سے ہم ا، ب، ج کی نسبتیں دریافت کرسکتے ہیں اور اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$\frac{ا}{\text{جم ج جم ا + جم ب}} = \frac{ب}{\text{جم ب جم ج + جم ا}} = \frac{ج}{\text{۱ - جم}^2 \text{ ج}}$؛

اِس لئے $\frac{ا}{\text{جب ا جب ج}} = \frac{ب}{\text{جب ب جب ج}} = \frac{ج}{\text{جب}^2 \text{ ج}}$

یعنے $\frac{ا}{\text{جب ا}} = \frac{ب}{\text{جب ب}} = \frac{ج}{\text{جب ج}}$

(۲) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

$ا = \frac{ا}{\text{جب ا}} \text{ جب } (ب + ج) = \frac{ا}{\text{جب ا}} (\text{جب ب جم ج + جم ب جب ج})$،

اس لیے ا = $\frac{ب}{جب ب}$ جب ب جم ج + $\frac{ج}{جب ج}$ جم ب جب ج = ب جم ج + ج جم ب

جو رشتوں (۱) میں سے پہلا رشتہ ہے۔ بالکل اسی طرح دیگر دو رشتے اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

اگر ہم (۱) کی تین مساواتوں سے ا، ب، ج کو ساقط کریں تو ہمیں رشتہ حاصل ہوتا ہے

جم^{۲} ا + جم^{۲} ب + جم^{۲} ج + ۲ جم ا جم ب جم ج = ۱

جو مثلث کے زاویوں کی جیب التماموں کے درمیان درست رہتا ہے۔

۱۲۱ ـــــ اگر ہم مساواتوں (۱) کو علی الترتیب۔ ا، ب، ج سے ضرب دیں اور پھر انہیں جمع کریں (157)

تو ب^{۲} + ج^{۲} - ا^{۲} = ۲ ب ج جم ا

جس سے ایک زاویے کی جیب التمام کے لیے ضلعوں کی رقوم میں ایک جملہ حاصل ہوتا ہے؛ اس ربط کو مع اُن دو ربطوں کے جو جم ب اور جم ج کے لیے ہیں اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\left.\begin{array}{l} ا^{۲} = ب^{۲} + ج^{۲} - ۲\ ب\ ج\ جم\ ا \\ ب^{۲} = ج^{۲} + ا^{۲} - ۲\ ج\ ا\ جم\ ب \\ ج^{۲} = ا^{۲} + ب^{۲} - ۲\ ا\ ب\ جم\ ج \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (۳)$$

۱۲۲ ـــــ ہم ان رشتوں (۳) کو اقلیدس جلد دوم مسائل ۱۲ اور ۱۳ کی مدد سے بالراست اخذ کر سکتے ہیں۔

اگر ا ل، ب ج پر عمود ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

ا ب^{۲} = ا ج^{۲} + ب ج^{۲} - ۲ ب ج × ج ل

جبکہ زاویہ ج حادہ ہو، اور

ا ب^{۲} = ا ج^{۲} + ب ج^{۲} + ۲ ب ج × ج ل

جبکہ زاویہ ج منفرجہ ہو۔ پہلی صورت میں

ج ل = ا ج جم ج

اور دوسری صورت میں

ج ل = ا ج جم (۱۸۰° - ج) = - ا ج جم ج

اس لیے ہر دو صورتوں میں

ج² = ا² + ب² - ۲ ا ب جم ج

رشتوں (۳) سے (۲) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

جم ا = (ب² + ج² - ا²) / ۲ ب ج

اس لیے جب² ا = (۴ ب² ج² - (ب² + ج² - ا²)²) / ۴ ب² ج² = (۲ ب ج + ب² + ج² - ا²)(۲ ب ج + ا² - ب² - ج²) / ۴ ب² ج²

یا جب² ا = (ا + ب + ج)(ب + ج - ا)(ج + ا - ب)(ا + ب - ج) / ۴ ب² ج²

پس ا² سے تقسیم کرنے سے جب² ا / ا² حسب ذیل متشاکل جملے کے مساوی ہے

(ا + ب + ج)(ب + ج - ا)(ج + ا - ب)(ا + ب - ج) / ۴ ا² ب² ج²

اس لیے جب² ا / ا² = جب² ب / ب² = جب² ج / ج²

جس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

(۳) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے (۳) کی پہلی دو مساواتوں کو ج سے تقسیم کرو اور پھر انہیں جمع کرو تو حاصل ہوتا ہے

(ا² + ب²) / ج = ۲ ج + (ا² + ب²) / ج - ۲ (ب جم ا + ا جم ب)

یا ج = ب جم ا + ا جم ب

(158)

۱۲۳ — ہم جانتے ہیں کہ

جب² ½ ا = ½ (۱ - جم ا)، جم² ½ ا = ½ (۱ + جم ا)

اس لیے

$$\text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{ا} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{2\,\text{ب}\,\text{ج}}\right)،$$

$$\text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ا} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{2\,\text{ب}\,\text{ج}}\right)،$$

یا

$$\text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{ا} = \frac{(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})(\text{ا} - \text{ب} + \text{ج})}{4\,\text{ب}\,\text{ج}}$$

$$\text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ا} = \frac{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})}{4\,\text{ب}\,\text{ج}}$$

اب فرض کرو $2\,\text{س} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$ تو $2(\text{س} - \text{ا}) = \text{ب} + \text{ج} - \text{ا}$،
اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{ا} = \frac{(\text{س} - \text{ب})(\text{س} - \text{ج})}{\text{ب}\,\text{ج}}، \quad \text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ا} = \frac{\text{س}(\text{س} - \text{ا})}{\text{ب}\,\text{ج}}؛$$

$$\text{اس لیے}\quad \text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{ا} = \left\{\frac{(\text{س} - \text{ب})(\text{س} - \text{ج})}{\text{ب}\,\text{ج}}\right\}^{\frac{1}{2}}، \quad \text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ا} = \left\{\frac{\text{س}(\text{س} - \text{ا})}{\text{ب}\,\text{ج}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ا} = \left\{\frac{(\text{س} - \text{ب})(\text{س} - \text{ج})}{\text{س}(\text{س} - \text{ا})}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ان ضابطوں کے ذریعے زاویوں کے تفاعل معلوم کرنے میں جبکہ ضلع دیے گئے ہوں زیادہ سہولت ہے بہ نسبت ضابطوں (۳) کے کیونکہ ان کو زیادہ آسانی کے ساتھ لوکارثمی اعمال حساب کے لیے موزوں بنایا جاسکتا ہے۔

۱۲۴ — چونکہ $\dfrac{\text{جب ب}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{جب ج}}{\text{ج}}$ اس لیے

$$\frac{\text{جب ب} \pm \text{جب ج}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ب} \pm \text{ج}}{\text{ا}}، \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ب} \pm \text{ج}}{\text{ا}} = \frac{2\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب} \pm \text{ج})\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب} \mp \text{ج})}{2\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ج})\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ج})}$$

اس لیے $\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{ا}} = \frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج})}$، اور

$$\frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج})}{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج})}،$$

یا $\text{ا} = \frac{(\text{ب}+\text{ج})\,\text{جب}\,\frac{1}{2}\text{ا}}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج})}$، $\text{ا} = \frac{(\text{ب}-\text{ج})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}\text{ا}}{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج})}$ ......(۵)

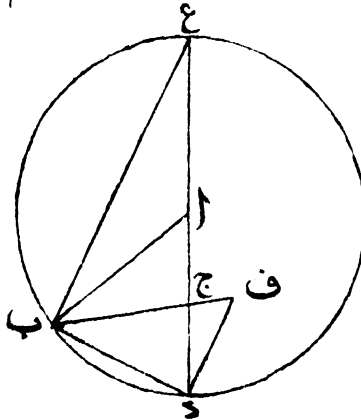
اس لیے عمل تقسیم سے ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج}) = \frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{ب}+\text{ج}}\,\text{مم}\,\frac{1}{2}\text{ا} \quad ......(۵)$$

ان ضابطوں کو ہندسی طور پر ثابت کرنے کے لیے مرکز ا اور نصف قطر ا ب کے ساتھ ایک دائرہ کھینچو جو ا ج کو د اور ع پر قطع کرے، د ف کو ب ع کے متوازی کھینچو، تب

ج ع = ب + ج، د ج = ج − ب، د ع ب = ½ ا، اور

د ب ف = ج + ½ ا − ۹۰ = ½ ج − ½ ب، اب چونکہ

$$\frac{\text{ج د}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{جب ب ف}}{\text{جب ع د ب}}، \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{ا}} = \frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}\text{ا}}$$

(159)

اور نیز

$$\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{ج}-\text{ب}} = \frac{\text{ج ع}}{\text{ج ہ}} = \frac{\text{ع ب}}{\text{د ف}} = \frac{\text{ب د مم}\ \frac{1}{2}\ \text{ا}}{\text{ب د مس}\ \frac{1}{2}(\text{ج}-\text{ب})}$$

$$= \frac{\text{مم}\ \frac{1}{2}\ \text{ا}}{\text{مس}\ \frac{1}{2}(\text{ج}-\text{ب})}$$

اس لیے

$$\text{مس}\ \frac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج}) = \frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{ب}+\text{ج}}\ \text{مم}\ \frac{1}{2}\ \text{ا}$$

مثلث کا رقبہ

۱۲۵ — کسی مثلث کا رقبہ اُس متوازی الاضلاع کے رقبہ کا نصف ہوتا ہے جو اُسی قاعدہ پر اُسی ارتفاع کے ساتھ بنایا گیا ہو جو کہ مثلث کے ہیں؛ اگر ضلع ا قاعدہ ہو تو ارتفاع ب جب ج یا ج جب ب ہوگا اور اس لیے مثلث کے رقبہ کے لیے ہمیں حسب ذیل جملے ملینگے:-

$$\frac{1}{2}\ \text{ا ب جب ج} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2}\ \text{ا ج جب ب}$$

پس مثلث کا رقبہ = ½ × کوئی دو ضلعوں کا حاصل ضرب × ان کے درمیانی زاویہ کی جیب

یعنے مثلث کا رقبہ اس کے کسی دو ضلعوں اور ان کے درمیانی زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

اب جب ا کی بجائے وہ جملہ جو دفعہ ۱۲۲ میں معلوم کیا جا چکا ہے یعنے

$$\frac{1}{2\,\text{ب ج}}\sqrt{(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ب}+\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}+\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})}$$

استعمال کرنے سے مثلث کے رقبہ کے لیے ہمیں یہ جملہ

$$\frac{1}{4}\sqrt{(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ب}+\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}+\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})}$$

یا $\sqrt{س(س-ا)(س-ب)(س-ج)}$ .... (۶)

ملتا ہے۔ اسکندریہ کے ہیرو[1] نے یہ ضابطہ تقریباً ۱۲۵ ق۔م میں حاصل کیا تھا۔ اِس ضابطہ (۶) کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$\frac{۱}{۴}\sqrt{۲ب^۲ج^۲ + ۲ج^۲ا^۲ + ۲ا^۲ب^۲ - ا^۴ - ب^۴ - ج^۴}$

(160)

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں میں تغیرات

۱۲۶ــــــ اب ہم اُن رشتوں کی تحقیق کرینگے جو ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتوں کے مثبت یا منفی چھوٹے اضافوں کے درمیان پائے جاتے ہیں۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کے اجزاء میں سے تین اجزا کی پیمایش کی گئی ہے جن میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہے، باقی دیگر تین اجزاء اِس باب کے ضابطوں سے متعین ہونگے، تب اِن اجزا کے اضافوں کے درمیان جو رشتے ہوتے ہیں اُن کی مدد سے ہم یہ معلوم کرسکینگے کہ قبل الذکر اجزا کی پیمایش میں چھوٹی خطاؤں کی موجودگی سے مابعد الذکر تین اجزا کی قیمتوں میں کیا خطائیں واقع ہوتی ہیں۔ ہم فرض کر لینگے کہ اضافے اس قدر چھوٹے ہیں کہ ان کے مربع اور حاصل ضرب نظر انداز ہوسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتیں ا، ب، ج ا، ب، ج ہیں جن میں تین یعنے ایک ضلع اور دو زاویے، یا دو ضلع اور ایک زاویہ، یا تین ضلعوں کی قیمتیں پیمایش کے ذریعہ معلوم کی گئی ہیں اور دوسری تین قیمتیں ان پیمایش کردہ قیمتوں کے ساتھ مذکورۂ بالا ضابطوں کے

[1] دیکھو بال کی ہسٹری آف میاتھمٹیکس صفحہ ۸۲ جس میں اس ضابطہ کا اصلی ہندسی ثبوت دیا گیا ہے

ذریعہ مربوط ہیں۔ اگر ان پیمایش کردہ اجزا میں کوئی خطا واقع ہوئی ہے تو اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ دیگر تین اجزا کی قیمتوں میں جو ضابطوں سے حاصل کی گئی ہیں خطائیں واقع ہونگی۔

فرض کرو کہ زاویوں اور ضلعوں کی صحیح قیمتیں ا+مف ا، ب+مف ب، ج+مف ج، ا+مف ا، ب+مف ب، ج+مف ج ہیں؛ ہم ان چھ خطاؤں مف ا، مف ب، مف ج، مف ا، مف ب، مف ج کے درمیان رشتے معلوم کرینگے۔ یہ فرض کرنا سہولت بخش ہوگا کہ زاویوں کے اضافے دائری ناپ میں پیمایش کیے گئے ہیں، ان کو فوراً ثانیوں میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے ج جیب ب - ب جیب ج = ۰

اور (ج + مف ج) جیب (ب + مف ب) - (ب + مف ب) جیب (ج + مف ج) = ۰؛

اب چونکہ مف ب، مف ج کے مربع نظر انداز ہوسکتے ہیں اس لیے

جیب (ب + مف ب) = جیب ب + مف ب جم ب،

جیب (ج + مف ج) = جیب ج + مف ج جم ج

اس لیے (ج + مف ج) (جیب ب + مف ب جم ب) - (ب + مف ب) (جیب ج + مف ج جم ج) = ۰

اس لیے اگر مف ج، مف ب، مف ب، مف ج کے حاصل ضرب نظر انداز کیے جائیں تو

ج جم ب × مف ب + جیب ب × مف ج - ب جم ج مف ج - جیب ج مف ب = ۰؛

اسی طرح اور دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور یہ کل تین مساواتیں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں:۔

جیب ج × مف ب - جیب ب × مف ج = ج جم ب × مف ب - ب جم ج × مف ج
جیب ا × مف ج - جیب ج × مف ا = ا جم ج × مف ج - ج جم ا × مف ا ...(۱)
جیب ب × مف ا - جیب ا × مف ب = ب جم ا × مف ا - ا جم ب × مف ب

نیز چونکہ

ا + ب + ج = π،

اور ا + مف ا + ب + مف ب + ج + مف ج = π

(161) اس لیے مف ا + مف ب + مف ج = ۰، .... (۸)

مساواتیں (۷) ایک دوسرے کے غیر تابع نہیں ہیں، جیسا کہ ان کو شکل

مف ب / ب - مف ج / ج = مم ب × مف ب - مم ج × مف ج،

مف ج / ج - مف ا / ا = مم ج × مف ج - مم ا × مف ا،

مف ا / ا - مف ب / ب = مم ا × مف ا - مم ب × مف ب

میں رکھنے سے معلوم ہو سکتا ہے۔ کیونکہ اِن مساواتوں سے ظاہر ہے کہ اِن میں سے کوئی ایک مساوات دیگر دو مساواتوں سے اخذ کی جا سکتی ہے۔

پس مساواتوں (۷) میں سے کوئی دو مساواتیں مع مساوات (۸) کے چھ خطاؤں میں سے تین کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں جبکہ دیگر تین خطائیں دی گئی ہوں اور ان میں سے کم از کم ایک خطاء ضلع سے متعلق ہو۔

(۷) اور (۸) سے مف ب اور مف ج کو ساقط کرنے سے ہمیں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس سے مف ا حاصل ہوتا ہے مف ب، مف ج، اور مف ا کی رقوم میں؛ اس کو ضابطہ ا² = ب² + ج² - ۲ ب ج جم ا سے بھی بالراست معلوم کیا جا سکتا ہے؛ پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

ا مف ا = (ب - ج جم ا) مف ب + (ج - ب جم ا) مف ج + ب ج جب ا × مف ا

یہ اور اس کے متناظر دو ضابطے رشتہ (۱) کی مدد سے ذیل کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں۔

ا مف ا = ا جم ج × مف ب + ا جم ب × مف ج + ب ج جب ا × مف ا

ب مف ب = ب جم ا × مف ج + ب جم ج × مف ا + ج ا جب ب × مف ب ‏.....(۹)

ج مف ج = ج جم ب × مف ا + ج جم ا × مف ب + ا ب جب ج × مف ج

کثیر الاضلاعوں کے زاویوں اور ضلعوں کے درمیان رشتے

۱۲۷—فرض کرو کہ کسی مستوی بند کثیر الاضلاع کے ضلع ترتیب وار $ل_۱$، $ل_۲$، $ل_۳$ ...... $ل_ن$ سے تعبیر ہوتے ہیں اور فرض کرو کہ $ع_۱$، $ع_۲$، ... $ع_ن$ وہ زاویے ہیں جو یہ ضلع کسی ثابت خط مستقیم کے ساتھ جو اسی مستوی میں واقع ہے بناتے ہیں اور سب کے سب ایک ہی سمت میں مثبت ناپے گئے ہیں؛ تب ظلوں کے بنیادی مسئلہ (دفعہ ۱۷) سے ثابت خطِ مستقیم پر اور اس کے عمود پر ظل لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ل_۱ جم ع_۱ + ل_۲ جم ع_۲ + \dots + ل_ن جم ع_ن = ۰$$

$$ل_۱ جب ع_۱ + ل_۲ جب ع_۲ + \dots + ل_ن جب ع_ن = ۰$$

اب فرض کرو کہ جس ثابت خط پر ظل لیے گئے ہیں اسکو ضلع $ل_ن$ بنایا گیا ہے، اگر $ل_ن$ اور $ل_۱$ کے درمیانی خارجہ زاویہ کو $ب_۱$ سے تعبیر کریں، $ل_۱$ اور $ل_۲$ کے درمیانی خارجہ زاویہ کو $ب_۲$ سے، وغیرہ تو (162)

$$ع_۱ = ب_۱، ع_۲ = ب_۱ + ب_۲، ع_۳ = ب_۱ + ب_۲ + ب_۳، وغیرہ، ع_ن = ۲\pi$$

پس

$$ل_۱ جم ب_۱ + ل_۲ جم (ب_۱ + ب_۲) + ل_۳ جم (ب_۱ + ب_۲ + ب_۳) + \dots + ل_ن = ۰$$

$$ل_۱ جب ب_۱ + ل_۲ جب (ب_۱ + ب_۲) + ل_۳ جب (ب_۱ + ب_۲ + ب_۳) + \dots$$

$$+ ل_{ن-۱} جب (ب_۱ + ب_۲ + \dots + ب_{ن-۱}) = ۰ \quad \dots(۱۰)$$

یہ دو رشتے (۱۰) کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان بنیادی رشتے ہیں۔ اگر ضلعوں کی تعداد صرف تین ہو تو یہ رشتے (۱) اور (۲) میں تحویل ہو جاتے ہیں کیونکہ اس صورت میں ب۱ = π - ۱، ب۲ = π - ۲

۱۲۸ —— (۱۰) کی پہلی مساوات میں لن کو مساوات کی دوسری جانب منتقل کرو، پھر ہر مساوات کی طرفین کا مربع لے کر جمع کرو تو نتیجہ میں ۲ لر لس کا سر

جم (بر + بر+۱ + ۰۰۰ + بس) جم (ب۱ + ب۲ + ۰۰۰ + بس)

+ جیب (بر + بر+۱ + ۰۰۰ + بس) جیب (ب۱ + ب۲ + ۰۰۰ + بس)

ہوگا

یعنی جم (بر+۱ + بر+۲ + ۰۰۰ + بس)؛

یہ جیب التمام ہے زاویہ طرس کی جو ضلعوں لر اور لس کی مثبت سمتوں کا درمیانی زاویہ ہے؛ پس ہمیں ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

لن۲ = ل۱۲ + ل۲۲ + ۰۰۰ + لن-۱۲ + ۲ ل۱ ل۲ جم ط۱۲ + ۰۰۰ + ۲ لر لس جم طرس + ۰۰۰۰۰

۰۰۰۰۰۰۰۰۰ (۱۱)

جو ضابطہ (۳) کے مماثل ہے اور اس میں تحویل ہو جاتا ہے اگر ن = ۳۔ ضابطہ (۱۱) میں ر اور س غیر مساوی ہیں اور ہر ایک ن سے کم ہے۔

کثیر الاضلاع کا رقبہ

۱۲۹ —— کثیر الاضلاع کا رقبہ حملہ

½ (ل۱ ل۲ جیب ط۱۲ + ۰۰۰۰ + لر لس جیب طرس + ۰۰۰) ۰۰۰ (۱۲)

یا ½ ∑ لر لس جیب طرس سے حاصل ہوتا ہے جبکہ مجموعہ ر اور س کی تمام مختلف قیمتوں کے لیے لیا گیا ہو۔ اگر ہم مقداروں ر اور س میں سے س کو

ہمیشہ ر سے بڑا فرض کریں تو زاویہ طرس حسب دفعہ سابق خارجہ زاویوں $بر+١$، $بر+٢$، ....، بس کا حاصل جمع ہے۔ ضابطہ بالا کو ثابت کرنے کے لیے ہم پہلے یہ دکھائینگے کہ ایک مثلث کی صورت میں یہ ضابطہ جملہ $\frac{1}{2}$ لٖ لٖ جب ا میں تحویل ہوتا ہے اور پھر ہم یہ بتائینگے کہ اگر وہ، (ن-١) ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے درست ہے تو وہ، ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے بھی درست ہے۔

(168) مثلث $ا_١ ا_٢ ا_٣$ کی صورت بن جس میں $ا_١ ا_٢ = ل_١$ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ط_{١٣} = \pi - ا_٢ ، ط_{٢٣} = \pi - ا_١ ، ط_{١٢} = ٢\pi - ا_٢ - ا_٣ ؛$$

پس اس صورت میں جملہ $\frac{1}{2} \Sigma$ لر لس جب طرس

$$= \frac{1}{2}(ل_١ ل_٢ \text{ جب } ا_٢ + ل_٢ ل_٣ \text{ جب } ا_٣ - ل_١ ل_٣ \text{ جب } ا_١)$$

$$= \frac{1}{2} ل_٢ ل_٣ \text{ جب } ا_١$$

اس طرح ضابطہ بالا درست ہے جبکہ ن = ٣،

اب فرض کرو کہ (ن-١) ضلعوں

$ل_١، ل_٢، ....، ل_{ن-١}$

والے کثیر الاضلاع کے لیے ضابطہ درست ہے، اس طرح اِس کثیر الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} \Sigma \text{ لر لس جب طرس} + \frac{1}{2} ل_{ن-١} \Sigma \text{ لر جب } ط_{ن-١، ر}$$

جس میں ر اور س میں سے ہر ایک، ن-١ سے کم ہے۔ اب ضلع $ل_{ن-١}$ کی جگہ دو ضلع $ل_{ن-١}$، $ل_ن$ رکھو اور اس طرح ن ضلعوں والا ایک کثیر الاضلاع بناؤ، تب ہمیں $\frac{1}{2}$ $ل_{ن-١}$ $ل_ن$ جب $ط_{ن-١ن}$ کو رقبۂ بالا میں جمع کرنا ہوگا؛ پس

ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\tfrac{1}{2}\sum \text{ل}_{\text{ر}}\,\text{ل}_{\text{س}}\ \text{جب}\ \text{ط}_{\text{ر،س}} + \tfrac{1}{2}\,\text{ل}'_{\text{ن}-1}\sum \text{ل}_{\text{ر}}\ \text{جب}\ \text{ط}'_{\text{ن}-1،\text{ر}} + \tfrac{1}{2}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}\,\text{ل}_{\text{ن}}\ \text{جب}\ \text{ط}_{\text{ن}-1،\text{ن}}$$

اب ضلع $\text{ل}'_{\text{ن}-1}$ کا ظل $\text{ل}_{\text{ر}}$ پر لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ل}'_{\text{ن}-1}\ \text{جب}\ \text{ط}'_{\text{ر،ن}-1} = \text{ل}_{\text{ن}-1}\ \text{جب}\ \text{ط}_{\text{ر،ن}-1} + \text{ل}_{\text{ن}}\ \text{جب}\ \text{ط}_{\text{ر،ن}}$$

پس جملہ بالا ہو جاتا ہے

$$\tfrac{1}{2}\sum \text{ل}_{\text{ر}}\,\text{ل}_{\text{س}}\ \text{جب}\ \text{ط}_{\text{ر،س}} + \tfrac{1}{2}\sum \text{ل}_{\text{ر}}(\text{ل}_{\text{ن}-1}\ \text{جب}\ \text{ط}_{\text{ر،ن}-1} + \text{ل}_{\text{ن}}\ \text{جب}\ \text{ط}_{\text{ر،ن}})$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}\,\text{ل}_{\text{ن}}\ \text{جب}\ \text{ط}_{\text{ن}-1،\text{ن}}$$

یا $\tfrac{1}{2}\sum \text{ل}_{\text{ر}}\,\text{ل}_{\text{س}}\ \text{جب}\ \text{ط}_{\text{ر،س}}$

جبکہ ر اور س کو ایک سے لے کر ن تک تمام مختلف قیمتیں دی جائیں ایسی کہ ر > س۔

اب ہم ثابت کر چکے ہیں کہ ضابطہ (۱۲) درست ہے جبکہ ن = ۳، اور اس لیے وہ درست ہے جبکہ ن = ۴، اور علیٰ ہٰذا القیاس؛ اس لیے وہ عام طور پر بھی درست ہے خواہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ضابطہ (۱۲) میں $\text{ل}_{\text{ا}}$ کا سر، (۱۰) کی دوسری مساوات کی وجہ سے معدوم ہوتا ہے، پس ضابطہ ہو جاتا ہے
$\tfrac{1}{2}\sum \text{ل}_{\text{ر}}\,\text{ل}_{\text{س}}\ \text{جب}\ \text{ط}_{\text{ر،س}}$ جہاں ر اور س، ۲ سے ن تک تمام قیمتیں اختیار کرتے ہیں ایسی کہ ہمیشہ س > ر۔

دسویں باب پر مثالیں

(164)

ایک مثلث اب ج کے لیے حسب ذیل رشتے از مثال ۱ تا ۱۱

ثابت کرو:۔

(۱) ا جب (ب - ج) + ب جب (ج - ا) + ج جب (ا - ب) = ۰

(۲) ا^{3} جم ا + ب^{3} جم ب + ج^{3} جم ج = ا ب ج (۱ + ۴ جم ا جم ب جم ج)

(۳) ا^{2} جم ج + ج^{2} جم ا = (ج + ا)/(۲ ب) { ب^{2} + (ج - ا)^{2} }

(۴) ا جم ا جم ۲ ا + ب جم ب جم ۲ ب + ج جم ج جم ۲ ج
+ ۴ جم ا جم ب جم ج (ا جم ا + ب جم ب + ج جم ج) = ۰

(۵) ا^{2} جم ۲ (ب - ج) = ب^{2} جم ۲ ب + ج^{2} جم ۲ ج + ۲ ب ج جم (ب - ج)

(۶) ا^{3} جم (ب - ج) + ب^{3} جم (ج - ا) + ج^{3} جم (ا - ب) = ۳ ا ب ج

(۷) ج^{3} = ا^{3} جم ۳ ب + ۳ ا^{2} ب جم (۲ ب - ا) + ۳ ا ب^{2} جم (ب - ۲ ا)
+ ب^{3} جم ۳ ا

(۸) (مم ½ ا - مس ½ ب مس ½ ج)$^{\frac{1}{2}}$ + (مم ½ ب - مس ½ ج - مس ½ ا)$^{\frac{1}{2}}$
+ (مم ½ ج - مس ½ ا - مس ½ ب)$^{\frac{1}{2}}$ = (مم ½ ا + مم ½ ب + مم ½ ج)$^{\frac{1}{2}}$

(۹) ب^{2} + ج^{2} - ۲ ب ج جم (ا + ۶۰°) = ج^{2} + ا^{2} - ۲ ج ا جم (ب + ۶۰°)
= ا^{2} + ب^{2} - ۲ ا ب جم (ج + ۶۰°)

اس نتیجہ کی ہندسی طور پر توضیح کرو۔

(۱۰) جم ½ ب جب (½ ب + ج) : جم ½ ج جب (½ ج + ب)
= ا + ج : ا + ب

(۱۱) (ا + ب) جب ب = ۲ ب جب (ب + ½ ج) جم ½ ج

(۱۲) ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو اس کے نیم زاویوں کے مماس التمام سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں۔

(۱۳) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کے مربع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اس کے زاویوں کے مماس سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۴) اگر ب ا-جم ا، ا-جم ب، ا-جم ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جب ا، جب ب، جب ج سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۵) اگر ب-ا = م ج تو ثابت کرو کہ ا = جم$^{-1}$ (م جم $\frac{1}{2}$ ج) - $\frac{1}{2}$ ج

اور مم $\frac{1}{2}$ (ب-ا) = $\frac{\text{۱ + م جم ب}}{\text{م جب ب}}$

(۱۶) ثابت کرو کہ ایک مثلث میں جم ا + جم ب + جم ج > ۱ اور ≯ $\frac{3}{2}$

(۱۷) ثابت کرو کہ ایک مثلث میں مس^{2} $\frac{1}{2}$ ب مس^{2} $\frac{1}{2}$ ج + مس^{2} $\frac{1}{2}$ ج مس^{2} $\frac{1}{2}$ ا + مس^{2} $\frac{1}{2}$ ا مس^{2} $\frac{1}{2}$ ب < ۱، اور یہ کہ اگر ایک زاویہ دو قائمہ زاویوں کے لاانتہا قریب آئے تو اس جملہ کی کم سے کم قیمت $\frac{1}{2}$ ہے۔

(۱۸) ثابت کرو کہ ایک مثلث، متساوی الاضلاع ہوگا اگر مم ا + مم ب + مم ج = √۳

(165)

(۱۹) اگر ایک مثلث میں

قم ا قم ب قم ج + ۴ مم ا مم ب مم ج

= قط $\frac{1}{2}$ ا قط $\frac{1}{2}$ ب قط $\frac{1}{2}$ ج + ۴ مس $\frac{1}{2}$ ا مس $\frac{1}{2}$ ب مس $\frac{1}{2}$ ج

تو ثابت کرو کہ اس کا ایک زاویہ ۹۰° ہے۔

(۲۰) اگر ایک مثلث میں جم ا = جم ب جم ج تو ثابت کرو کہ مم ب مم ج = $\frac{1}{2}$

(۲۱) اگر ط وہ زاویہ ہو جو جم ط = $\frac{\text{ا - ب}}{\text{ج}}$ سے متعین ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

جم $\frac{1}{2}$ (ا-ب) = $\frac{\text{(ا + ب) جب ط}}{\text{۲ √(اب)}}$

اور جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب) = $\frac{\text{ج جب ط}}{\text{۲ √(اب)}}$

(۲۲) اگر ایک تساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ و ہو تو ثابت کرو کہ

جم (ب و ج - ۹۰°) = $\frac{\text{ب و}^2 + \text{ج و}^2 - ۲\ \text{ا و}^2}{۲\ \text{ب و} \times \text{ج و}}$

(۲۳) - اگر ج = ب + ½ ا اور ب ج نقطہ د پر تقسیم ہوا ایسا کہ ب د : د ج = ۱ : ۳ تو ثابت کرو کہ د ا ج د = ۲ د ا د ج

(۲۴) اگر ایک مثلث ا ب ج کے قاعدے کے ساتھ خطوطِ مستقیم ج د، ج ع مساوی زاویے عہ بنائیں تو ثابت کرو کہ

رقبہ ا ب ج : رقبہ ج ع د :: ج : ۲ ب جب ا مم عہ

(۲۵) اگر ا ب کو نقاط ج، د پر تقسیم کیا گیا ہو ایسا کہ ا ج = ج د = د ب اور اگر پ کوئی دوسرا نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

جب ا پ د جب ب پ ج = ۴ جب ا پ ج جب ب پ د

(۲۶) اگر ایک متوازی الاضلاع کے ضلع ا، ب ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو ثابت کرو کہ وتروں کا حاصل ضرب ہے $\{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^2 - ۴\ \text{ا}^2 \text{ب}^2\ \text{جم}^2\ \text{سہ}\}^{\frac{1}{2}}$

(۲۷) اگر ایک مثلث کے ضلع ب ج کا نقطہ وسطی د ہو اور زاویہ ب ا د = طہ، زاویہ ج ا د = فہ تو ثابت کرو کہ مم طہ - مم فہ = مم ب - مم ج

(۲۸) ایک خط مستقیم ایک مثلث کے زاویہ ج کو دو حصوں عہ، بہ میں اور ضلع ج کو دو منقطعوں لا، ما میں تقسیم کرتا ہے اور اس ضلع کے ساتھ زاویہ طہ پر مائل ہے؛ ثابت کرو کہ لا مم عہ - ما مم بہ = ما مم ا - لا مم ب = (لا + ما) مم طہ

(۲۹) اگر ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور اگر بڑے سے بڑا زاویہ چھوٹے سے چھوٹے زاویہ سے بقدر ۹۰° کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ضلعوں میں نسبت

$\sqrt{۷} + ۱ : \sqrt{۷} : \sqrt{۷} - ۱$ ہے۔

(۳۰) ہندسی طور پر ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

ا جم طہ = ب جم (ج - طہ) + ج جم (ب + طہ)، جس میں طہ کوئی زاویہ ہے۔

اگر کسی مستوی ذوالاربعۃ الاضلاع کے ضلعوں ا ب، ب ج، ج د کو ا، ب، ج سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ۲ ا} = \frac{\text{ا جب ا - ب جب (ا - ب) + ج جب (ا - ب - ج)}}{\text{ا جم ا - ب جم (ا - ب) + ج جم (ا - ب - ج)}}$$

(۳۱) اگر ایک مثلث ا ب ج ایسا ہو کہ ایک خط مستقیم ا د جو ب ج کو نقطہ د پر ملتا ہے کھینچا جاسکتا ہے اس طور پر کہ د ب ا د = $\frac{1}{2}$ د ب ا ج اور نیز ب د = $\frac{1}{2}$ ب ج تو ثابت کرو کہ ا^2 ب^2 = (ب^2 - ج^2) (ب^2 + ۸ ج^2)

(۳۲) ایک مربع کا ایک ضلع ب ج ہے اور ب ج کے عمودی ناصف پر دو نقطے پ، ق لیے گئے ہیں جو مربع کے مرکز سے مساوی فاصلے پر ہیں؛ ب پ، ج ق کو ملایا گیا ہے اور وہ ایک دوسرے کو نقطہ ا پر قطع کرتے ہیں؛ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج میں

$$\text{مس ا (مس ب - مس ج)}^2 + ۸ = ۰$$

(166)

(۳۳) اگر

$$\left.\begin{aligned} &\text{ما}^2 + \text{ی}^2 - ۲\ \text{ما ی جم عہ} = \text{ا}^2 \\ &\text{ی}^2 + \text{لا}^2 - ۲\ \text{ی لا جم بہ} = \text{ب}^2 \\ &\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - ۲\ \text{لا ما جم جہ} = \text{ج}^2 \end{aligned}\right\}\ \text{اور}\quad \text{عہ + بہ + جہ} = ۲\pi$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{(ما ی جب عہ + ی لا جب بہ + لا ما جب جہ)}^2 = \tfrac{1}{4}\text{(۲ ب}^2\text{ج}^2 + ۲\text{ج}^2\text{ا}^2 + ۲\text{ا}^2\text{ب}^2 - \text{ا}^4 - \text{ب}^4 - \text{ج}^4)$$

(۳۴) اگر ایک مثلث کے زاویے ا، ب، ج ہوں اور لا، ما، ی حقیقی مقداریں ہوں ایسی کہ وہ مساوات

$$\frac{\text{ما جب ج - ی جب ب}}{\text{لا - ما جم ج - ی جم ب}} = \frac{\text{ی جب ا - لا جب ج}}{\text{ما - ی جم ا - لا جم ج}}$$

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{ی}}{\text{جب ج}}$$

(۳۵) ثابت کرو کہ بڑے سے بڑے مستطیل کا رقبہ جو ر نصف قطر کے دائرے کے ایک قطاع میں بنایا جاسکتا ہے ر^2 مس $\frac{1}{2}$ عہ ہے جہاں ۲ عہ، قطاع کا

زاویہ ہے۔

(۳۶) بتاؤ کہ کس طرح اقل رقبہ کا قائم الزاویہ مثلث بنایا جا سکتا ہے جس کے راس تین دیے ہوئے متوازی خطوط مستقیم پر واقع ہوں؛ اگر درمیانی خط مستقیم کے فاصلے دوسرے دو خطوں سے ا، ب ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث کا وتر متوازی خطوں کے ساتھ زاویہ مم$^{-1}$ $\frac{ا - ب}{ا + ب}$ بناتا ہے۔

(۳۷) ایک مثلث کے ضلعوں کے طول پیمائشوں سے معلوم کیے گئے ہیں، جن میں خفیف سی خطائیں واقع ہوئی ہیں؛ ان طولوں سے مثلث کے زاویوں کا حساب لگانے سے معلوم ہوا کہ زاویے ا، ب، ج ہیں۔ اگر طولوں میں تقریبی خطائیں عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے جواب میں زاویوں کے مماس النماوں کی خطائیں مقدارول

قم ا (بہ جم ج + جہ جم ب - عہ)، قم ب (جہ جم ا + عہ جم ج - بہ)

قم ج (عہ جم ب + بہ جم ا - جہ)

کے متناسب ہونگی۔

(۳۸) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کی پیمائش میں دو ضلعوں ا، ب میں چھوٹی خطائیں لا، ما واقع ہوں تو زاویہ ج میں خطا ہوگی

$$\left(\frac{لا}{ا} \text{ مم ب} + \frac{ما}{ب} \text{ مم ا}\right) -$$

نیز دوسرے زاویوں کی خطائیں بھی معلوم کرو۔

(۳۹) ایک مثلث کا رقبہ اس کے ضلعوں کے طول ناپ کر معلوم کیا گیا ہے؛ اور کسی طول کے ناپنے میں ممکن الوقوع خطا کی انتہا خواہ وہ مثبت ہو یا منفی طول کی ن گنا ہے جہاں ن ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کی صورت میں جس کے اضلاع (پیمائش کردہ) ۱۱۰، ۸۱، ۵۹ ہیں خطا کی انتہا جو اس کے رقبہ میں ممکن ہے رقبہ کی تقریباً ۳۳۴۲ء۳ ن گنا ہے۔

(۴۰) ثابت کرو کہ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے چار زاویوں کی جیوب التمام ج۱، ج۲، ج۳، ج۴ رشتہ ذیل کو پورا کرتی ہیں:۔

$$(\text{جم}_1^4+\text{جم}_2^4+\text{جم}_3^4+\text{جم}_4^4)-2(\text{جم}_1^2\,\text{جم}_2^2+\text{جم}_1^2\,\text{جم}_3^2+\text{جم}_2^2\,\text{جم}_3^2+\text{جم}_1^2\,\text{جم}_4^2+\text{جم}_2^2\,\text{جم}_4^2+\text{جم}_3^2\,\text{جم}_4^2)$$

$$+4(\text{جم}_2^2\,\text{جم}_3^2\,\text{جم}_4^2+\text{جم}_1^2\,\text{جم}_3^2\,\text{جم}_4^2+\text{جم}_1^2\,\text{جم}_2^2\,\text{جم}_4^2+\text{جم}_1^2\,\text{جم}_2^2\,\text{جم}_3^2)$$

$$+4\,\text{جم}_1\,\text{جم}_2\,\text{جم}_3\,\text{جم}_4\,(2-\text{جم}_1^2-\text{جم}_2^2-\text{جم}_3^2-\text{جم}_4^2)=0$$

(167)

گیارہواں باب

مثلثوں کا حل

۱۳۰۔ اب ہم پچھلے باب کے محصلہ ضابطوں کو مثلثوں کے حل کرنے میں استعمال کرینگے یعنے اس وقت جب چھ اجزا میں سے تین اجزا کی مقداریں دی گئی ہوں جن میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو باقی تین اجزا کی مقداریں معلوم کرنے میں۔ ہم بالعموم ایسے ضابطوں کا انتخاب کرینگے جن کو لوکارثموں کے ذریعہ عددی حساب لگانے میں استعمال کیا جا سکتا ہے کیونکہ صرف یہی ضابطے عمل میں مفید ہوتے ہیں۔

مثلثوں کا حل زاویوں کے دائری تفاعلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنے کے عمل پر منحصر کیا جاتا ہے، اب چونکہ دائری تفاعل قائم الزاویہ مثلثوں کے ضلعوں کی نسبتیں ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ تمام مثلثوں کا حل ان مثلثوں کو قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کر کے انجام پا سکتا ہے۔

قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۱۳۱۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کا زاویہ ج، ۹۰° ہے، تب یہ زاویہ دئے ہوئے اجزا میں سے ایک ہے اور ہم مثلث کو اُن مختلف

صورتوں میں حل کر سکتے ہیں جن میں دوسرے دو اجزا دیے گئے ہوں اور ان میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہو۔

(۱) فرض کرو کہ دو ضلع ا، ب دیے گئے ہیں؛ تب ضابطہ مس ا = ا/ب سے ا معلوم کیا جا سکتا ہے اور پھر ب، ا کا متمم زاویہ ہونے کی وجہ سے معلوم ہوتا ہے؛ نیز ج = ا قم ا جس سے ج معلوم ہوتا ہے جبکہ ا معلوم کر لیا گیا ہو؛ تب اس مثلث کو حل کرنے کے لیے لوکارتمی ضابطے ہیں

ل مس ا = ۱۰ + لوک ا - لوک ب،

ب = ۹۰° - ا،

لوک ج = لوک ا - ل جب ا + ۱۰

(168) (۲) فرض کرو کہ وتر ج اور ایک ضلع ا دیے گئے ہیں؛ تب ضابطہ جب ا = ا/ج کے ذریعہ ا معلوم کیا جاتا ہے؛ ب، ا کا متمم ہے؛ ضابطہ ب = ج جم ا، یا ب² = ج² - ا² سے ب معلوم ہوتا ہے۔

لوکارتمی ضابطے ہیں

ل جب ا = ۱۰ + لوک ا - لوک ج،

ب = ۹۰° - ا،

اور لوک ب = لوک ج + ل جم ا - ۱۰

یا لوک ب = ½ لوک (ج + ا) + ½ لوک (ج - ا)

(۳) فرض کرو کہ وتر ج اور ایک زاویہ ا دیے گئے ہیں تو ب فوراً ا کے متمم کے طور پر معلوم ہوتا ہے؛ ضابطہ ا = ج جب ا سے ا معلوم ہوتا ہے اور ب پچھلی صورت کے مانند حاصل ہوتا ہے۔

لوکارتمی ضابطے ہیں

لوک ا = لوک ج + ل جب ا - ۱۰،

ب = ۹۰° - ا،

لوک ب = لوک ج + ل جم ا - ۱۰
یا لوک ب = ½ لوک (ج + ا) + ½ لوک (ج - ا)
(۴) فرض کرو کہ ایک ضلع ا اور ایک زاویہ ا دیے گئے ہیں ؛
تب ب ہے ۹۰° - ا، ج ہے ا قم ا، اور ب پچھلی دو صورتوں کی مانند معلوم ہوتا ہے۔

لوکارتمی ضابطے ہیں
لوک ج = لوک ا - ل جب ا + ۱۰،
ب = ۹۰° - ا،
لوک ب = لوک ج + ل جم ا - ۱۰ -
یا لوک ب = ½ لوک (ج + ا) + ½ لوک (ج - ا)

۱۳۲ ـــــ بعض صورتوں میں دفعہ سابق کے ضابطے سہولت بخش نہیں ہوتے؛ مثلاً صورت (۲) میں اگر زاویہ ا، ۹۰° کے قریب ہو تو اس کو مساوات جب ا = ا/ج سے سہولت کے ساتھ معلوم نہیں کیا جا سکتا کیونکہ متصل جیوب کے لیے فرق اس صورت میں ناقابل قدر ہیں، اس لیے ہم دوسرا ضابطہ استعمال کرتے ہیں؛ دسویں باب کے مسئلہ (۴) سے ہم حاصل کرتے ہیں ب مس ½ ب = ج - ا، ب مم ½ ب = ج + ا،

پس مس² ½ ب = (ج - ا)/(ج + ا) اور اس طرح

مس (۴۵° - ½ ا) = ((ج - ا)/(ج + ا))^½

یہ ضابطہ متذکرہ صدر اعتراض سے پاک ہونے کی وجہ سے ا کے معلوم کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

نیز صورتوں (۳) اور (۴) میں ضابطہ ب = ج جم ا غیر سہولت بخش ہے جبکہ ا بہت چھوٹا ہو؛ ایسی صورت میں ہم ضابطہ ب = ج - ج جب ا × مس ½ ا استعمال کر سکتے ہیں۔

(169) **۱۳۴ ـــ** قائم الزاویہ مثلثوں کے حل کے لیے متعدد تقریبی ضابطے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ فرض کرو کہ زاویوں ا، ب کے دائری ناپ عہ، بہ ہیں۔

(۱) ضابطہ $\text{ا} = \text{ج جم ب}$ کی تقریبی شکل ہے

$$\text{ا} = \text{ج}\left(1 - \frac{1}{2}\,\text{بہ}^2 + \frac{1}{24}\,\text{بہ}^4\right)$$

جو جم ب کو بہ کے دائری ناپ کی قوتوں میں پھیلانے سے اور اس پھیلاؤ کی پہلی تین رقمیں لینے سے حاصل ہوئی ہے۔ اب یہ ضابطہ ا کو تقریبی طور پر محسوب کرنے کے لئے استعمال ہو سکتا ہے جبکہ ج اور بہ دیے گئے ہوں اور بہ بہت بڑا نہ ہو۔

(۲) چونکہ $\text{جب ا} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}}$، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{عہ} - \frac{1}{6}\,\text{عہ}^3 + \frac{1}{120}\,\text{عہ}^5 = \frac{\text{ا}}{\text{ج}}\text{، تقریباً}$$

عہ کو $\frac{\text{ا}}{\text{ج}}$ کی رقوم میں حاصل کرنے کے لیے پہلے تقرب کے طور پر $\text{عہ} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}}$ لے سکتے ہیں، دوسرے تقرب کے طور پر $\text{عہ} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left\{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\right\}^3$، اور تیسرے تقرب کے طور پر

$$\text{عہ} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left\{\frac{\text{ا}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\right)^3\right\}^3 - \frac{1}{120}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\right)^5$$

یا
$$\text{عہ} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\right)^3 + \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\right)^5\text{،}$$

جس کو عہ کے محسوب کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(۳) مساوات $\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{ب} = \left(\frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ج} + \text{ا}}\right)^{\frac{1}{2}}$ سے تقریبی ضابطہ

$$\frac{1}{2}\,\text{بہ} = \left(\frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ج} + \text{ا}}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ج} + \text{ا}}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ج} + \text{ا}}\right)^2\right\}$$

حاصل ہوسکتا ہے۔

(۴) زاویہ کے دائری ناپ کے بارے میں اسنیلیس (Snellius) کا

ضابطہ (دیکھو مثال ۳۲ صفحہ ۲۲۴)

$$ف = \frac{۳ جب ۲ ف}{۲ (۲ + جم ۲ ف)}$$

کو جس میں تقریبی خطا $\frac{۱}{۴۵}$ ف^{۵} ہے استعمال کرو اور رکھو ۲ ف = ب تو ہمیں ضابطہ حاصل ہوتا ہے ب = $\frac{۳ ب}{۲ ج + ا}$ اور تقریبی خطا ہے $\frac{۱}{۱۸۰}$ ب^{۵}

پس ب، اس تقریبی مساوات

$$ب = \frac{۳ ب}{۲ ج + ا} \times ۵۷،۲۹۵۷$$

سے درجوں میں حاصل ہوتا ہے۔

غیر قایم الزاویہ مثلثوں کا حل

۱۳۴ ــــــ مثلث کو حل کرنا جب تین ضلع دیے جائیں۔

ضابطوں

$$جب \tfrac{۱}{۲} ا = \left\{\frac{(س - ب)(س - ج)}{ب ج}\right\}^{\frac{۱}{۲}} ،$$

$$جم \tfrac{۱}{۲} ا = \left\{\frac{س (س - ا)}{ب ج}\right\}^{\frac{۱}{۲}} ،$$

$$مس \tfrac{۱}{۲} ا = \left\{\frac{(س - ب)(س - ج)}{س (س - ا)}\right\}^{\frac{۱}{۲}} ،$$

میں سے کوئی ایک ضابطہ مع دیگر زاویوں کے متناظر ضابطوں کے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ یہ سب ضابطے لوکارثمی عمل حساب کے لیے موزوں ہیں۔

(170)

مثال

ایک مثلث کے ضلع ۴، ۷، ۹ کے متناسب ہیں۔ اس کے زاویے معلوم کرو جبکہ حسب ذیل لوکارتم دیے گئے ہوں:—

لوگ ۲ = ۳۰۱۰۳۰ء

ل مس ۱۲° ۳۶' = ۹٫۳۴۹۳۲۹، فرق ۱' کے لیے = ۰۰۰۵۹۳ء

ل مس ۲۴° ۵' = ۹٫۶۵۰۲۸۱، فرق ۱' کے لیے = ۰۰۰۳۳۹ء

چونکہ س = ۱۰، س - ا = ۶، س - ب = ۳، س - ج = ۱، اس لیے

مس ½ ا = √(۱/۲۰)، مس ½ ب = √(۲/۱۰)، اس طرح

ل مس ½ ا = ۱۰ - ½ (۱ + ۳۰۱۰۳۰ء) = ۹٫۳۴۹۴۸۵

اور ل مس ½ ب = ۱۰ + ½ (۳۰۱۰۳۰ء - ۱) = ۹٫۶۵۰۵۱۵

ا معلوم کرنے کے لیے چونکہ ۹٫۳۴۹۴۸۵ - ۹٫۳۴۹۳۲۹ = ۰۰۰۱۵۶ء

اور ۱۵۶/۵۹۳ × ۶۰'' = ۱۵٫۸'' تقریباً، اس لیے ½ ا = ۱۲° ۳۶' ۱۵٫۸'' یا

ا = ۲۵° ۱۲' ۳۱٫۶''

ب معلوم کرنے کے لیے چونکہ ۹٫۶۵۰۵۱۵ - ۹٫۶۵۰۲۸۱ = ۰۰۰۲۳۴ء

اور ۲۳۴/۳۳۹ × ۶۰'' = ۴۱٫۴'' تقریباً، اس لیے ½ ب = ۲۴° ۵' ۴۱٫۴'' یا

ب = ۴۸° ۱۱' ۲۲٫۸''؛ نیز ج = ۱۸۰° - ا - ب = ۱۰۶° ۳۶' ۵٫۶''، اس طرح زاویوں کی تقریبی قیمتیں حاصل ہوگئیں۔

۱۳۵ — مثلث حل کرنا جب دو ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ دیے جائیں۔

فرض کرو کہ ب، ج اور ا دیے ہوئے اجزا ہیں، تب ب اور ج ضابطہ

مس ½ (ب - ج) = (ب - ج)/(ب + ج) مم ½ ا

اور ضابطہ ب + ج = ۱۸۰° - ا

سے متعین کیے جا سکتے ہیں۔ لوکارتمی ضابطہ ہے

ل مس ½ (ب - ج) = لوک (ب - ج) - لوک (ب + ج) + ل مم ½ ا،

ب اور ج معلوم کرنے کے بعد ضلع لا ان تین ضابطوں

لوک لا = لوک ج + ل جب ا - ل جب ج،

لوک لا + ل جم ½ (ب - ج) = لوک (ب + ج) + ل جب ½ ا،

لوک لا + ل جب ½ (ب - ج) = لوک (ب - ج) + ل جم ½ ا،

میں سے کسی ایک سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ہم لا کو اس طرح بھی معلوم کر سکتے ہیں: چونکہ لا² = ب² + ج² - ۲ ب ج جم ا

یعنے لا² = (ب + ج)² - ۴ ب ج جم² ½ ا

اس لیے لا = (ب + ج) جم فہ، جہاں فہ مساوات

جب فہ = ۲ √(ب ج) جم ½ ا / (ب + ج)

(171) سے معلوم ہوتا ہے۔ اس طرح ہم پہلے فہ کو لوکارتمی ضابطہ

ل جب فہ = لوک ۲ + ½ لوک ب + ½ لوک ج + ل جم ½ ا - لوک (ب + ج)

سے معلوم کر سکتے ہیں اور پھر لا کو ضابطہ

لوک لا = لوک (ب + ج) + ل جم فہ - ۱۰

سے۔

مثال

اگر لا = ۱۲۳، ج = ۲۲۱، اور ب = ۲۹° ۱۶' تو ا، ج، ب معلوم کرو۔

یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۹۹ = ۱،۹۹۵۶۳۵۲،	ل جب ۲۹° ۱۶' = ۹،۶۸۹۱۹۷۸
لوک ۱۲۳ = ۲،۰۸۹۹۰۵۱،	ل جب ۱۵° ۱۱' = ۹،۴۲۳۲۲۸۵، فرق ۱' کیلئے = ۴۶٫۸
لوک ۲۲۰ = ۲،۳۴۲۴۲۲۷۵،	ل مم ۱۴° ۳۸' = ۱۰،۵۸۳۱۹۰۱
لوک ۲۲۲۱ = ۳،۳۴۶۵۴۸۶،	ل مس ۵۹° ۴۹' = ۱۰،۲۳۴۴۵۵۲، فرق ۱' کیلئے = ۲۷٫۴

ہمیں حاصل ہوتا ہے

ل مس ½ (ج − ا) = ل مم ١٤° ٤٨′ + لوک ٩٩ − لوک ٢٢٢

= ١٠٫٥٨٣١٩٠١ + ١٫٩٩٥٦٣٥٢ − ٢٫٣٤٦٣٥٣٠

= ١٠٫٢٣٢٤٧٢٣

اب ١٠٫٢٣٢٤٧٢٣ − ١٠٫٢٣٢٤٥٥٢ = ٫٠٠٠٠١٧١ ، اور $\frac{١٧١}{٤٨٫٢٦}$ = ٣٫٥ تقریباً، اس لیے ½ (ج − ا) = ٥٩° ٣٩′ ٣٫٥″ ، نیز ½ (ج + ا) = ٧٥° ٢٢′

اس لیے ا = ١٥° ٤٢′ ٥٦٫٥″ ، ج = ١٣٥° ١′ ٣٫٥″

نیز لوک ب = ٩٫٦٨٩١٩٧٨ + ٢٫٠٨٩٩٠٥١ − ل جب ١٥° ٤٢′ ٥٦٫٥″

اور ٥٦٫٥ × ٧٤٫٨٦٧ = ٤٢٣٠٫١٥٥ ، اس لیے ل جب ١٥° ٤٢′ ٥٦٫٥″ = ٩٫٤٣٢٧٥١٥

اس لیے لوک ب = ٢٫٣٤٦٣٥١٤ یعنے ب = ٢٢٢ − $\frac{١٦}{١٩٥٦}$ = ٢٢١٫٩٩٢

۱۳۶ — مثلث کو حل کرنا جبکہ دو ضلع اور ان میں سے ایک کے متقابل کا زاویہ دیے جائیں۔

یہ بالعموم مبہم صورت کے طور پر مشہور ہے۔

فرض کرو کہ ر، ج، اور ا دیے ہوئے اجزا ہیں تو جب ج مساوات جب ج = $\frac{ج}{ر}$ جب ا سے متعین ہوتا ہے؛ جب ج کو اس طرح معلوم کرنے کے بعد اگر $\frac{ج}{ر}$ جب ا > ۱ تو ج کی بالعموم دو قیمتیں ۱۸۰° سے کم ایک حادہ اور دوسری منفرجہ ہونگی جن کی جیب حاصل کردہ جیب کے مساوی ہوگی؛ پس ہمیں تین صورتوں پر غور کرنا چاہیے۔

(۱) اگر $\frac{ج}{ر}$ جب ا > ۱ تو جب ج > ۱ جو ناممکن ہے اور اس حقیقت کا اظہار کرتا ہے کہ کوئی مثلث ایسا نہیں ہے جو دیے ہوئے اجزا رکھتا ہو۔

(۲) اگر $\frac{ج}{ر}$ جب ا = ۱ تو جب ج = ۱ اور اس لیے ج کی صرف ایک قیمت ۹۰° ہے۔ اگر ا < ۹۰ تو دیے ہوئے اجزا کے ساتھ ایک مثلث موجود ہوگا اور یہ مثلث قائم الزاویہ مثلث ہوگا۔ لیکن اگر ا > ۹۰° تو ج کی قیمت

(172) ناقابلِ قبول ہوگی اور کوئی مثلث دیے ہوئے اجزا کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔

(۳) اگر ج جب ا < ر تو جب ج < ۱ اور اس لیے ج کی دو قیمتیں ہیں ایک حادہ اور ایک منفرجہ، پس

(عہ) اگر ج < ر تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے ج < ا، اس لیے ج حادہ ہونا چاہیے، اس طرح دیے ہوئے اجزا کے ساتھ صرف ایک مثلث موجود ہوگا؛

(بہ) اگر ج > ر تو ج کا حادہ ہونا ضروری نہیں ہے اور اس کی دونوں قیمتیں قابل قبول ہیں بشرطیکہ ا < ۹۰°؛ لیکن اگر ا > ۹۰° تو دونو قیمتیں ناقابل قبول ہیں کیونکہ ج > ا، اس لیے دیے ہوئے اجزا کے ساتھ دو مثلث ہونگے اگر ا < ۹۰° اور کوئی مثلث نہ ہوگا اگر ا > ۹۰°؛

(جہ) اگر ج = ر تو ج = ا یا ۱۸۰° - ا؛ ج کی قیمت ۱۸۰° - ا کے لیے مثلث کے دو ضلع ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اس لیے ایسی صورت میں مثلث موجود نہ ہوگا، اس طرح ج کی صرف پہلی قیمت یعنے ا رہ جاتی ہے جس سے محدود رقبہ کا ایک مثلث ملیگا بشرطیکہ ا < ۹۰°۔

ہم نتائج محصلہ بالا کو اس طرح بیان کرسکتے ہیں:-

اگر

ج جب ا > ر، کوئی حل نہیں

ج جب ا = ر، ا < ۹۰°، ایک حل

ج جب ا = ر، ا > ۹۰°، کوئی حل نہیں

ج جب ا < ر،
- ج < ر، ایک حل
- ج = ر، ا < ۹۰°، ایک حل
- ج = ر، ا > ۹۰°، کوئی حل نہیں
- ج > ر، ا < ۹۰°، دو حل
- ج > ر، ا > ۹۰° کوئی حل نہیں

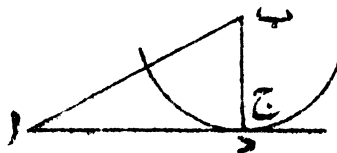
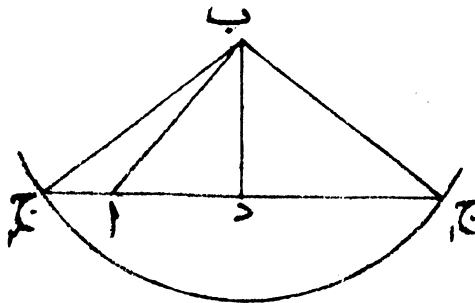
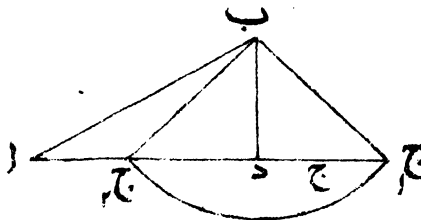
اگر ج، ۹۰° کے قریب ہو تو اس کو اس کی جیب کے ذریعہ صحیح طور پر معلوم نہیں کیا جاسکتا، ایسی صورت میں ضابطوں

مس ج = ± ج جب ا / √((ا + ج جب ا) (ا − ج جب ا)) ، مس (۴۵° + ½ ج) = ± √((ا + ج جب ا) / (ا − ج جب ا))

میں سے کوئی ایک استعمال ہو سکتا ہے۔

۱۳۷ — دفعۂ ماسبق میں جن مختلف صورتوں پر بحث کی گئی ہے ان کی تحقیق ہندسی طور پر کرنا سبق آموز ہوگا۔

ضلع ب پر ب سے عمود ب د کھینچو؛ تب ب د = ج جب ا، ب کو مرکز اور ا کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو؛ تب اگر ا < ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو قطع نہیں کریگا اور اس لیے دیے ہوئے اجزا کے ساتھ کوئی مثلث نہیں کھینچا جا سکتا؛ لیکن اگر ا > ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو دو نقطوں ج۱ اور ج۲ پر قطع کرتا ہے اگر ا < ج اور ا < ۹۰° تو ج۱ اور ج۲ دونوں ا کی ایک ہی جانب ہیں (دیکھو شکل (۱)) اور دو مثلثوں ا ب ج۱ اور ا ب ج۲ میں سے ہر ایک،

(178)

دیے ہوئے اجزا رکھتا ہے؛ زاویے ا ج ب اور ا ج ب متمم ہیں۔
اگر ا د < ج مگر ا > ۹۰° تو ا ج کے پرے ہوگا اور کوئی مثلث دیے ہوئے اجزا کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔ اگر ا > ج تو ج اور ج' ا کی مقابل جانبوں پر ہونگے اور صرف مثلث ا ب ج میں دیے ہوئے اجزا ہونگے۔ اس آخری صورت میں مثلث ا ب ج میں ا پر کا زاویہ ا کے مساوی نہیں ہوگا بلکہ ۱۸۰° - ا کے، اور اس لیے دی ہوئی شرطوں کو پورا نہیں کریگا۔

اگر ا = ج جب ا تو دائرہ ا ج کو نقطہ د پر مس کریگا اور قائم الزاویہ مثلث ا د ب مطلوبہ مثلث ہوگا جس میں دیے ہوئے اجزا ہونگے بشرطیکہ ا < ۹۰°۔

یہ قابل ذکر ہے کہ چونکہ (شکل (۱))

ا د = ج جم ا اور ج د = ج' د = $\sqrt{ا^۲ - ج^۲ جب^۲ ا}$

اس لیے ب کی دو قیمتیں یہ ہیں۔

ج جم ا + $\sqrt{ا^۲ - ج^۲ جب^۲ ا}$ اور ج جم ا - $\sqrt{ا^۲ - ج^۲ جب^۲ ا}$

یہ قیمتیں دونوں مثبت ہونگی جبکہ دو حل ہوں؛ ب کی ان دو قیمتوں کو ہم حسب ذیل ب کی دو درجی مساوات سے بھی حاصل کر سکتے ہیں:-

ا^۲ = ب^۲ + ج^۲ - ۲ ب ج جم ا

۱۲۸ — مثلث کو حل کرنا جبکہ ایک ضلع اور دو زاویے دیے جائیں۔ (174)

فرض کرو کہ دیا ہوا ضلع ا ہے اور دیے ہوئے زاویے ا، ج؛
تب مساوات ب = ۱۸۰° - ا - ج سے ب کا تعین ہوتا ہے اور
تناسبطوں

لوک ب = لوک ا + ل جب ب - ل جب ا،
لوک ج = لوک ا + ل جب ج - ل جب ا،
سے ضلع ب اور ج معلوم ہوتے ہیں۔

مثال

اگر ا = ۱۰، ا = ۵۱° ۳۰′ ۴۰″، ب = ۷۶° تو ب معلوم کرو۔ دیا گیا ہے کہ

لوک ۱۲۳۹۶ = ۴٫۰۹۳۲۸۱۶، ل جب ۷۶° = ۹٫۹۸۶۹۰۴۱،
لوک ۱۲۳۹۷ = ۴٫۰۹۳۳۱۶۶، ل جب ۵۱° ۳۰′ = ۹٫۸۹۳۵۴۴۴،
ل جب ۵۱° ۳۱′ = ۹٫۸۹۳۶۴۴۸

ہمیں حاصل ہوتا ہے

لوک ب = ۹٫۹۸۶۹۰۴۱ + ۱ - ل جب ۵۱° ۳۰′ ۴۰″

اب چونکہ ل جب ۵۱° ۳۰′ ۴۰″ = ۹٫۸۹۳۵۴۴۴ + $\frac{۴۰}{۶۰}$ × ۰٫۰۰۰۱۰۰۴
= ۹٫۸۹۳۶۱۱۳

اس لیے لوک ب = ۱٫۰۹۳۲۹۲۸، اور اس لیے ب = ۱۲٫۳۹۶ + $\frac{۱۱۲}{۳۵۰}$ × ۰٫۰۰۱
یا ب = ۱۲٫۳۹۶۳ تقریباً

۱۳۹ — جملہ ج جم ا ± $\sqrt{ا^۲ - ج^۲ جب^۲ ا}$ جو ب کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہے لوکارثمی عمل حساب کے لیے موزوں بنایا جا سکتا ہے،

فرض کرو جب فہ = $\frac{ج}{ا}$ جب ا تو ب = $\frac{ا جب (فہ ± ا)}{جب ا}$،

پس مساوات ل جب فہ = ل جب ا + لوک ج - لوک ا سے فہ معلوم کرنے کے بعد مساوات لوک ب = لوک ا + ل جب (فہ ± ا) - ل جب ا سے ب معلوم کیا جا سکتا ہے۔

زاویوں ا، ب، ج کے دائری ناپ علی الترتیب ع، ب، جہ سے

تعبیر کئے گئے ہوں تو مثلثوں کے حل کے لئے حسب ذیل تقریبی ضابطے حاصل ہوتے ہیں :—

(۱) فرض کرو کہ ا ' ج ' و دیے گئے ہیں اور ج بڑا نہیں ہے ' تب ضابطہ

$$ج = \frac{و جب ج}{جب ا}$$ سے ہمیں یہ تقریبی ضابطہ

$$ج = و تم ا \left\{ جہ - \frac{1}{6} جہ^3 + \frac{1}{120} جہ^5 \right\}$$

ملتا ہے۔ نیز اگر ا ' ج دونوں بڑے نہ ہوں تو

$$ج = \frac{و(جہ - \frac{1}{6} جہ^3 + \frac{1}{120} جہ^5 - \dots)}{عہ - \frac{1}{6} عہ^3 + \frac{1}{120} عہ^5 - \dots}$$

پس $$ج = و \frac{جہ}{عہ} \left\{ 1 + \frac{1}{6} (عہ^2 - جہ^2) \right\}$$

سے ج تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے اور اس کو ج کے محسوب کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ا ' ج ' و حسب سابق دیے گئے ہیں ؛ نیز فرض کرو کہ ج تقریباً 90° ہے تب $ج = \frac{و جم جہ}{جب ا}$ ؛ اس لیے جملہ $ج = \frac{و}{جب ا}$ $(1 - \frac{1}{2} جہ^2 + \frac{1}{24} جہ^4)$ ' ج کو تقریبی طور پر متعین کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

(185) اگر ا اور ج دونوں 90° کے قریب ہوں تو

$$ج = \frac{و جم جہ}{جم عہ} \quad یا \quad ج = \frac{و(1 - \frac{1}{2} جہ^2 + \dots)}{1 - \frac{1}{2} عہ^2 + \dots}$$

اس لیے $$ج = و \left\{ 1 - \frac{1}{2} (جہ^2 - عہ^2) \right\}$$

سے ج تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۰ — اب ہم مثلثوں کے حل کی چند مثالیں دینگے جبکہ ضلعوں اور زاویوں کی بجائے دوسرے مفروضات ہوں۔

(۱) فرض کرو کہ راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمود دیے گئے ہیں؛ ان کو $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$ سے تعبیر کرو، تب

$$ا \times ع_1 = ب \times ع_2 = ج \times ع_3$$ = مثلث کے رقبہ کا دوچند۔ اب چونکہ

$$\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,ا = \sqrt{\frac{س\,(س - ا)}{ب\ ج}}$$

اس لیے

$$\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,ا = \sqrt{\frac{(ع_2 ع_3 + ع_3 ع_1 + ع_1 ع_2)(-ع_2 ع_3 + ع_3 ع_1 + ع_1 ع_2)}{4\,ع_1^2\,ع_2\,ع_3}}$$

اس سے ا معلوم ہوتا ہے۔ نیز $ع_2 = ج\ \text{جب}\ ا$، اس لیے ا معلوم ہونے کے بعد ج معلوم ہوتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ مثلث کے زاویے اور اس کا گھیرا دیے گئے ہیں۔ تب

$$س = ر\,(\text{جب}\ ا + \text{جب}\ ب + \text{جب}\ ج)$$

پس ر معلوم ہوتا ہے اور پھر اضلاع بالترتیب

$$2ر\ \text{جب}\ ا،\ 2ر\ \text{جب}\ ب،\ 2ر\ \text{جب}\ ج$$

کے مساوی ہیں یا

$$ا = \frac{2\,س\ \text{جب}\ ا}{\text{جب}\ ا + \text{جب}\ ب + \text{جب}\ ج}$$

مع ب اور ج کی متناظر قیمتوں کے۔ ا کی یہ قیمت

$$\frac{س\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\,ا}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,ب\ \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,ج}$$

بن تحویل ہوتی ہے جو لوگارثمی عمل حساب کے لیے موزوں ہے۔

(۳) فرض کرو کہ قاعدہ، ارتفاع، اور قاعدے پر کے زاویوں کا فرق دیے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قاعدہ ا ہے، ارتفاع ع، اور دیا ہوا فرق ب - ج = ۲ عہ؛ تب

چونکہ ب + ج = ۱۸۰° - ا، اس لیے ب = ۹۰° + عہ - ½ ا، ج = ۹۰° - عہ - ½ ا،

نیز ا = ع (مم ب + مم ج) = ع {مس (½ ا - عہ) + مس (½ ا + عہ)}

اس لیے ا / ع = ۲ جب ا / (جم ا + جم ۲ عہ)، پس دو درجی مساوات

ا² (جم ا + جم ۲ عہ)² = ۴ ع² (۱ - جم² ا)

یا جم² ا (ا² + ۴ ع²) + ۲ ا² جم ۲ عہ جم ا = ۴ ع² - ا² جم² ۲ عہ

سے جم ا حاصل ہوتا ہے۔ اس دو درجی کا حل ہے

جم ا = - ا² جم ۲ عہ / (ا² + ۴ ع²) ± ۲ ع (۴ ع² + ا² جب² ۲ عہ)^½ / (ا² + ۴ ع²)

اس طرح جم ا کی دو قیمتیں، مسئلہ کے دو حل کے جواب میں، حاصل ہوتی ہیں۔

معطیات ذیل سے مثلث کو حل کرو:۔

(۴) ج، ج، ا + ب

(۵) ب، ا، ب + ج

(۶) رقبہ اور زاویے

(۷) ج، ج + ا، ج + ب

(۸) زاویے اور ارتفاع

کثیر الاضلاعوں کا حل

۱۴۱ ـــــ کارنٹ[1]، ہولیر[2]، لیکسل[3] اور دیگر علمائے ریاضی نے اُن رشتوں پر جو کثیر الاضلاعوں کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان پائے جاتے ہیں اور اُن طریقوں پر بحث کی ہے جو کثیر الاضلاع کو حل کرنے کے لیے ہیں جبکہ ضلعوں اور زاویوں کی کچھ تعداد دی گئی ہو علم الکثیر الاضلاع (polygonometry) کے دو بنیادی ضابطے دفعہ ۱۲۷ میں بیان کیے جاچکے ہیں۔

ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے اس کے ۲ ن اجزا میں سے (۲ ن-۳) اجزاء دیے جانے چاہئیں جن میں سے کم ازکم (ن-۲) اضلاع ہونے چاہئیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کو ایک وتر کے ذریعہ ایک مثلث اور (ن-۱) ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع میں تقسیم کیا گیا ہے؛ اگر اس آخری کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کی تعیین ہو جاتی تو چونکہ مثلث کا ایک ضلع اس کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کے طور پر معلوم ہو چکا ہوتا ایسے مثلث کے صرف دو اجزا کا معلوم ہونا درکار ہوتا تاکہ ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی پوری طرح تعیین ہو جائے؛ پس ن ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے ن-۱ ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کی بہ نسبت دو زائد اجزاء معلوم ہونا چاہیئے۔ اب چونکہ کثیر الاضلاع کی سادہ ترین شکل ایک مثلث ہے اور مثلث کی تعیین کے لیے اس کے تین اجزاء معلوم ہونا چاہیئے جن میں سے ایک

---

[1] Carnot, *geometrie der Stellung*

[2] L' Huilier, *Polygonometrie*. Geneva. 1789

[3] Lexell, *Nov. comm. Petrop.* vols. xix. xx

ضلع ہو اس لیے ن ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے ۳ + ۲ (ن - ۳) یعنے (۲ ن - ۳) اجزا دیے جانے چاہئیں۔ ان (۲ ن - ۳) اجزاء میں سے اگر صرف (ن - ۳) ضلع ہوں تو ن زاویے دیے جائینگے؛ لیکن اگر (ن - ۱) زاویے دیے گئے ہوں تو ن واں زاویہ معلوم ہو سکتا ہے اس لیے گویا صرف (۲ ن - ۴) غیر تابع اجزا دیے گئے ہیں اور یہ ناکافی ہیں۔ اس لیے کل اجزا میں سے کم از کم (ن - ۲) اجزاء ضلع ہونے چاہئیں۔

بعض صورتوں میں کثیر الاضلاع کو وتروں کے ذریعہ مثلثوں میں تقسیم کرکے اس کو آسانی سے حل کیا جا سکتا ہے، اس میں وتروں کو محسوب کرنا پڑتا ہے؛ تاہم یہ طریقہ ہمیشہ سہولت بخش نہیں ہوتا جیسا کہ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کی صورت پر غور کرنے سے معلوم ہوگا جبکہ اس کے تین زاویے اور دو متقابلہ ضلع دیے گئے ہوں۔

۱۴۲ ـــــ ن ضلعی کثیر الاضلاع حل کرنا جبکہ (ن - ۱) ضلع اور (ن - ۲) زاویے دیے جائیں۔

(۱) فرض کرو کہ معلوم شدنی زاویے معلوم شدنی ضلع کے متصل ہیں۔ ہم دفعہ ۱۲۷ کے مطابق ضلعوں کے درمیان خارجہ زاویوں کی بجائے $ب_۱$، $ب_۲$، ......، $ب_ن$ استعمال کرینگے؛ فرض کرو کہ ضلع $ل_ن$ معلوم شدنی ہے، تب دفعہ ۱۲۷ کی مساواتوں (۱۰) میں سے دوسری مساوات کی رُو سے (۱۶۶)

$$\text{جب}\ ب_۱\left\{ل_۱ + ل_۲\ \text{جم}\ ب_۲ + ل_۳\ \text{جم}\ (ب_۲ + ب_۳) + \cdots\cdots + ل_{ن-۱}\ \text{جم}\ (ب_۲ + \cdots + ب_{ن-۱})\right\}$$

$$= -\text{جم}\ ب_۱\left\{ل_۲\ \text{جب}\ ب_۲ + ل_۳\ \text{جب}\ (ب_۲ + ب_۳) + \cdots\cdots + ل_{ن-۱}\ \text{جب}\ (ب_۲ + \cdots\cdots + ب_{ن-۱})\right\}$$

$$\text{پس}\quad \text{مس}\ ب_۱ = \frac{ل_۲\ \text{جب}\ ب_۲ + ل_۳\ \text{جب}\ (ب_۲ + ب_۳) + \cdots + ل_{ن-۱}\ \text{جب}\ (ب_۲ + \cdots + ب_{ن-۱})}{ل_۱ + ل_۲\ \text{جم}\ ب_۲ + ل_۳\ \text{جم}\ (ب_۲ + ب_۳) + \cdots + ل_{ن-۱}\ \text{جم}\ (ب_۲ + \cdots + ب_{ن-۱})}$$

اس سے $ب_۲$، دیے ہوئے زاویوں $ب_۱$، $ب_۲$، ... $ب_{ن-۱}$ اور دیے ہوئے ضلعوں $ل_۱$، $ل_۲$، ... $ل_ن$ کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے؛ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ یہ مساوات، غیر معلوم ضلع کے عمود پر ضلعوں کا ظِل لینے سے حاصل کی گئی ہے؛ باقی زاویہ $ب_ن$، رشتہ $ب_۱ + ب_۲ + \cdots + ب_ن = ۲\pi$ سے معلوم ہوتا ہے۔

$ب_۲$ اور $ب_ن$ معلوم کرنے کے بعد ضلعوں کا $ل_ن$ پر ظل لینے سے جو مساوات

$$ل_ن = -\{ل_۱ \,\text{جم}\, ب_۱ + ل_۲ \,\text{جم}\,(ب_۱ + ب_۲) + \cdots\}$$

حاصل ہوتی ہے اس سے $ل_ن$ کی تعیین ہوسکتی ہے یا دفعہ ۱۲۸ کی مساوات (۱۱) کی مدد سے، جس میں $ل_ن^۲$ کو دوسرے ضلعوں کے مربعوں اور ضلعوں اور ضلعوں کے درمیانی زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ معلوم شدنی زاویے ایک دوسرے کے متصل ہیں مگر معلوم شدنی ضلع کے متصل نہیں ہیں۔ فرض کرو کہ $ل_ن$ معلوم شدنی ضلع ہے اور $ب_ر$، $ب_{ر+۱}$ معلوم شدنی زاویے۔

تب $ب_ر + ب_{ر+۱} = ۲\pi - (ب_۱ + ب_۲ + \cdots + ب_{ر-۱} + ب_{ر+۲} + \cdots + ب_ن)$،

اس طرح $ب_ر + ب_{ر+۱}$ معلوم ہوتا ہے؛ نیز مساواتوں (۱۰) میں سے دوسری مساوات کی رُو سے

$$ل_ر \,\text{جب}\,(ب_۱ + ب_۲ + \cdots + ب_ر) = -ل_۱ \,\text{جب}\, ب_۱ - ل_۲ \,\text{جب}\,(ب_۱ + ب_۲) - \cdots$$
$$- ل_{ر-۱} \,\text{جب}\,(ب_۱ + ب_۲ + \cdots + ب_{ر-۱}) - ل_{ر+۱} \,\text{جب}\,(ب_۱ + \cdots + ب_{ر+۱}) \cdots$$
$$- ل_{ن-۱} \,\text{جب}\,(ب_۱ + \cdots + ب_ن)$$

پس $ب_۱ + ب_۲ + \cdots + ب_ر$ معلوم ہوسکتا ہے اور اس لیے $ب_ر$۔

اس کے بعد ضلع $ل_ن$ حسب دفعہ سابق معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(۳) اُس صورت میں جبکہ دو غیر معلوم زاوئے ایک دوسرے کے متصل نہ ہوں فرض کرو کہ ھ، ک وہ راس ہیں جن پر کے زاویے غیر معلوم ہیں؛ ھ ک کو ملاؤ تو کثیر الاضلاع دو کثیر الاضلاعوں میں تقسیم ہو جاتا ہے جن میں سے ایک میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے اُن دو زاویوں کے معلوم ہیں جو غیر معلوم ضلع کے متصل ہیں۔ اس لئے ہم اس کثیر الاضلاع کو (۱) کی بموجب ھ ک اور ھ، ک پر کے زاویوں کو متعین کر کے حل کر سکتے ہیں۔

(178)

دوسرے کثیر الاضلاع میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے دو متصلہ زاویوں کے معلوم ہیں؛ اس لئے اس کثیر الاضلاع کو (۲) کی بموجب حل کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے سب ضلع معلوم ہوتے ہیں اور ھ، ک پر کے زاویے اُن دو حصوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں جن میں وہ ھ ک سے تقسیم ہوئے تھے اور جو علیحدہ علیحدہ معلوم ہو چکے ہیں۔

۱۴۳ ــــ ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ (ن-۲) ضلع اور (ن-۱) زاویے دیے جائیں۔

ہم رشتہ

$$ب_۱ + ب_۲ + \cdots + ب_ن = ۲\pi$$

سے فوراً باقی زاویہ معلوم کر لیتے ہیں۔

غیر معلوم ضلع $ل_۱$ معلوم کرنے کے لئے مساوات

$$ل_۱ \text{ جب } ب_۱ + ل_۲ \text{ جب } (ب_۱ + ب_۲) + \cdots + ل_{ن-۱} \times \text{ جب } (ب_۱ + ب_۲ + \cdots + ب_{ن-۱}) = ۰$$

کو استعمال کرو جو دوسرے غیر معلوم ضلع $ل_ن$ کے عمود پر ظل لینے سے حاصل ہوئی ہے۔ پھر ہم $ل_ن$ کو اسی طرح معلوم کر سکتے ہیں یا دوسری نبیادی مساوات استعمال کر سکتے ہیں۔

۱۴۴ ــــ ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ ن ضلع اور (ن-۳) زاویے دیے جائیں۔

فرض کرو کہ ف ، ق ، ر ، وہ راسس ہیں جن پر کے زاوئے نہیں دئے گئے ہیں ، ف ق ، ق ر ، ر ف کو ملاؤ تو کثیرالاضلاع چار حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں سے ایک مثلث ہے۔ ف ق ر کے سوا ہر حصہ میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے اُن دو زاویوں کے دئے گئے ہیں جو اِن غیر معلوم ضلعوں کے متصل ہیں ؛ اس لئے ہم ف ق ، ق ر ، ر ف ، اور ف ، ق ، ر پر کے زاویوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔ پھر مثلث ف ق ر کے زاوئے معلوم کئے جا سکتے ہیں کیونکہ اس کے ضلع معلوم ہو چکے ہیں۔ اب ہم ف ، ق ، ر پر کے زاویوں کو جمع کر کے دئے ہوئے کثیرالاضلاع کے مطلوبہ زاویے حاصل کر لیتے ہیں۔

بلندیاں اور فاصلے

۱۴۵۔۔۔ اب ہم بلندیوں اور فاصلوں کی تعیئن پر مثلثوں کے حل کے اطلاقات کی چند مثالیں دینگے۔ اس مضمون پر زیادہ مکمل معلومات کے لیے مثلاً زاویوں کی پیمائش میں استعمال ہونے والے آلات کے بیان وغیرہ کے لیے پیمائش (Surveying) پر لکھی ہوئی کتابوں کا مطالعہ کرنا چاہیے۔

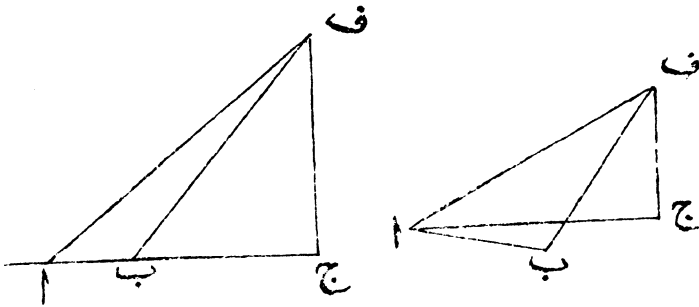
وہ خط مستقیم جو مقام مشاہدہ کو کسی شئے سے ملاتا ہے افق کے ساتھ ایک زاویہ بنائیگا، اس زاویہ کو شئے کا زاویہ ارتفاع کہتے ہیں اگر شئے مذکور افق کے اوپر ہو اور زاویہ نشیب اگر وہ افق کے نیچے ہو۔

(179) ۱۴۶۔۔۔ اُفقی مستوی کے اوپر ایک ایسے نقطہ کی بلندی معلوم کرنا جہاں تک رسائی نہیں ہو سکتی۔

فرض کرو کہ یہ نقطہ ف ہے اور اس کا ظِل افقی مستوی پر ج ہے ، فرض کرو کہ ف ج = ف اور اس افقی مستوی پر کوئی خط ا ب = ا بشرط امکان ایسا منتخب کیا گیا ہے کہ ا ب ج ایک خط مستقیم ہے ،

فرض کرو کہ ا اور ب پر ف کے زوایائے ارتفاع پیمائش کیے گئے ہیں؛

اِن کو عہ، بہ سے تعبیر کرو۔ تب ا = ا ج - ب ج = ف (مم عہ - مم بہ)
اِس لیے

$$ف = \frac{ا \text{ جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}}$$

جس سے ف معلوم ہوتا ہے۔ اگر قاعدہ کے خط کو ٹھیک ٹھیک ج کی سمت میں ناپنا ناممکن العمل ہو تو فرض کرو کہ اس کو کسی اور سمت میں ناپا گیا ہے، ا پر ف کا زاویۂ ارتفاع عہ پیمائش کرو اور نیز زاویوں ف ا ب (= جہ) اور ف ب ا (= ضہ) کی پیمائش کرو۔

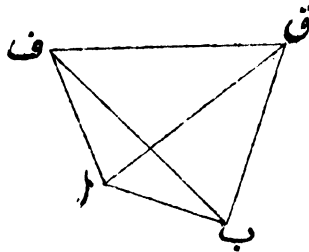
تب ف ا = ا ب × $\frac{\text{جب ضہ}}{\text{جب (جہ + ضہ)}}$، اور ف = ا ف × جب عہ، اس لیے

$$ف = ا \frac{\text{جب عہ جب ضہ}}{\text{جب (جہ + ضہ)}}$$

اس سے ف معلوم ہوتا ہے۔

۱۴۷ — ناقابل رسائی دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔

(180) فرض کرو کہ یہ دو نقطے ف اور ق ہیں اور فرض کرو کہ کوئی قاعدہ کا خط اب (= ل) ناپا گیا ہے، نقطوں ا اور ب کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ ف اور ق دونوں اِن میں سے ہر نقطہ سے نظر آ سکتے ہیں۔ اب حسب ذیل تین زاویے پیمایش کرو۔

ف ا ق = عہ، ق ا ب = بہ، ف ا ب = جہ؛

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ زاویے ف ا ق اور ق ا ب بالعموم ایک ہی مستوی میں نہیں ہوتے۔ ب پر زاویے ف ب ا (= ضہ) اور ق ب ا (= صہ) پیمایش کرو۔

مثلثوں ل ب ف اور ا ب ق سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ا ف = ل \frac{\text{جب ضہ}}{\text{جب (جہ + ضہ)}}$$

اور $ا ق = ل \frac{\text{جب صہ}}{\text{جب (بہ + صہ)}}$، پس ا ف اور ا ق اِن ضابطوں سے حاصل ہوتے ہیں:-

لوک ا ف = لوک ل + ل جب ضہ - ل جب (جہ + ضہ)،

لوک ا ق = لوک ل + ل جب صہ - ل جب (بہ + صہ)،

مثلث ف ا ق میں ا ف، ا ق اور زاویہ ف ا ق = عہ معلوم ہیں۔

اس لیے ہم ضابطوں

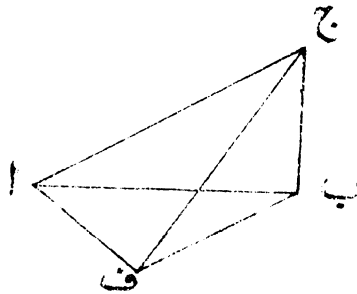
ل مس ½ (ا ف ق - ا ق ف) = ل مم ½ ع + لوک (ا ق - ا ف)
- لوک (ا ق + ا ف)،

ا ف ق + ا ق ف = ۱۸۰° - ع،

سے زاویے ا ف ق اور ا ق ف معلوم کرتے ہیں۔ پھر ضابطہ

لوک ف ق = لوک ا ف + ل جب ع - ل جب ا ق ف

کے ذریعہ ف ق معلوم ہوتا ہے۔

۱۴۸ — پوتھناٹ (Pothenot.) کا مسئلہ — ایک مثلث کے مستوی میں وہ نقطہ معلوم کرنا جس پر مثلث کے ضلعوں کے محاذی دیے ہوئے زاویے بنیں۔

فرض کرو کہ ع، ہ وہ زاویے ہیں جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں ا ج، ج ب کے محاذی نقطہ ف پر بنتے ہیں؛ فرض کرو کہ زاویوں ف ا ج، ف ب ج کو علی الترتیب لا، ما سے تعبیر کیا گیا ہے؛

ف کا محل معلوم ہو جاتا ہے اگر زاویے لا اور ما معلوم ہو جائیں کیونکہ مثلثوں ف ا ج، ف ب ج کو حل کرنے سے ف ا اور ف ب معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

(181)

ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} + \text{ما} = 2\pi - \text{عہ} - \text{بہ} - \text{ج}$$

نیز　$$\text{ف ج} = \frac{\text{ا جب ما}}{\text{جب بہ}} = \frac{\text{ب جب لا}}{\text{جب عہ}}$$

ایک امدادی زاویہ فہ مان لو ایسا کہ

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{ا جب عہ}}{\text{ب جب بہ}}$$

اس لیے $\frac{\text{جب لا}}{\text{جب ما}} = \text{مس فہ}$، پس $\frac{\text{جب لا} - \text{جب ما}}{\text{جب لا} + \text{جب ما}} = \text{مس}(\text{فہ} - 45^\circ)$

یا　$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{لا} - \text{ما}) = \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{لا} + \text{ما})\,\text{مس}(\text{فہ} - 45^\circ)$$

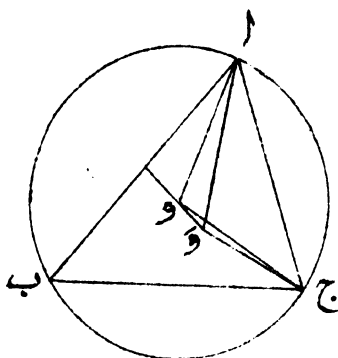
$$= \text{مس}(45^\circ - \text{فہ})\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{عہ} + \text{بہ} + \text{ج})$$

اس طرح لا - ما معلوم کیا جا سکتا ہے اور چونکہ لا + ما معلوم ہے اس لیے لا اور ما معلوم ہو سکتے ہیں۔

مثالیں

(۱) افقی مستوی میں ایک مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج میں سے ہر راس پر ایک پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع عہ دکھائی دیتا ہے؛ ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی $\frac{1}{2}$ ل مس عہ قم ا ہے۔ نیز اگر ج پر کے ارتفاع میں چھوٹی خطا نَ واقع ہوئی ہو تو بتاؤ کہ اصل بلندی بہت تقریبی طور پر ہے

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{ل مس عہ}}{2\,\text{جب ا}}\left(1 + \frac{\text{حم ج}}{\text{جب ا جب ب}}\cdot\frac{\text{جب نَ}}{\text{جب ۲ عہ}}\right)$$

فرض کرو کہ پہاڑ کی چوٹی کا ظل مستوی ا ب ج پر و ہے، تب اگر پہاڑ

کی بلندی ف ہو تو ف = و ا مس عہ = و ب مس عہ = و ج مس عہ؛
اِس لیے و، ا ب ج کے حائط دائرہ کا مرکز ہے، پس و ا = ½ الف قم ا،
یا ف = ½ و مس عہ قم ا۔ اگر ج پر کے ارتفاع کی پیمایش عہ + نؔ ہو تو فرض
کرو کہ وَ، پہاڑ کی چوٹی کا ظل ہے، تب چونکہ ا اور ب پر کے ارتفاع مساوی
ہیں اس لیے و وَ، ا ب پر عمود ہے؛ اب فرض کرو کہ پہاڑ کی بلندی
ف + لا ہے۔ ہندسی طور پر حاصل ہوتا ہے۔

وَ ا = و ا + و وَ جم ج،

وَ ج = و ج ۔ و وَ جم (ا ۔ ب)،

اب اگر و وَ اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کے مربع نظر انداز ہو سکیں، تو (182)

ف + لا = وَ ا مس عہ = وَ ج مس (عہ + نؔ)

= (و ا + و وَ جم ج) مس عہ = {و ج ۔ و وَ جم (ا ۔ ب)} مس (عہ + نؔ)

پس لا = و وَ × جم ج × مس عہ = ۔ و وَ جم (ا ۔ ب) مس عہ + و ج قط² عہ × جب نؔ

کیونکہ مس (عہ + نؔ) = مس عہ + قط² عہ جب نؔ، تقریباً، و وَ کو ساقط کرنے سے

لا جم (ا - ب) مس ع = جم ج مس ع (و ج قط² ع جب نٗ - لا)،

اس لیے ۲ لا جب ا جب ب = و ج قط² ع جم ج جب نٗ

اس لیے اصل بلندی ہے ف + اا = ½ (و مس ع / جب ا) (۱ + (جم ج / جب ا جب ب) × (جب نٗ / جب ۲ ع))

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں کی پیمایش کی گئی تو معلوم ہوا کہ ا = ۵، ب = ۴، ج = ۶ لیکن یہ معلوم ہے کہ ج کی پیمایش میں ایک چھوٹی خطا ہے؛ معلوم کرو کہ کون سا زاویہ زیادہ سے زیادہ صحت کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ج کی صحیح قیمت لا + ۶ ہے؛ فرض کرو کہ مثلث کے زاویے ا + مف ا، ب + مف ب، ج + مف ج ہیں جن میں اجزا، مف ا، مف ب، مف ج منحصر ہیں لا پر؛ ہم لا کو اس قدر چھوٹا مان لینگے کہ اس کا مربع نظر انداز ہو سکتا ہے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے

جم (ا + مف ا) = (۱۶ + (لا + ۶)² - ۲۵) / (۲ × ۴ (لا + ۶)) = (۲۷ + ۱۲ لا) / (۴۸ (۱ + ۱/۶ لا)) = ۲۷/۴۸ (۱ + ۱۲/۲۷ لا - ۱/۶ لا)

= ۲۷/۴۸ (۱ + ۵/۱۸ لا)، تقریباً

پس جب ا × مف ا = - ۵/۳۲ لا؛

نیز جم (ب + مف ب) = (۲۵ + (لا + ۶)² - ۱۶) / (۲ × ۵ (لا + ۶)) = ۳/۴ (۱ + لا/۱۰)

پس جب ب × مف ب = - ۳/۴۰ لا؛

اور نیز جم (ج + مف ج) = (۲۵ + ۱۶ - (لا + ۶)²) / (۲ × ۵ × ۴) = ۱/۸ (۱ - ۱۲/۵ لا)

پس جب ج × مف ج = ۳/۱۰ لا؛

نیز $\frac{\text{جب ا}}{۵} = \frac{\text{جب ب}}{۴} = \frac{\text{جب ج}}{۶}$

اس طرح ۲۴ مف ا = ۴۰ مف ب = ۱۵ مف ج

اس لیے مف ب، مف ا اور مف ج سے عدداً چھوٹا ہے اور اس لیے زاویہ ب زیادہ سے زیادہ صحت کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

گیارہویں باب پر مثالیں

۱ — ایک مثلث کے ضلع ۸، ۷، ۵ ہیں؛ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ معلوم کرو۔

یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۱۱۲ = ۲٫۰۴۹۲۱۸۰

لوک °۹ ۱َ۶ = ۹٫۹۷۵۴۰۸۳، فرق ۶۰َ کے لیے = ۰۰۰٫۴۳۷

۲ — اگر ایک مثلث میں ا = ۶۵، ب = ۱۶، ج = °۶۰ تو دوسرے زاویے معلوم کرو۔

یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳٫، ل مس °۴۶ ۴۰َ = ۱۰٫۰۲۰۲۲۰۳

لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰٫، ل مس °۴۶ ۴۱َ = ۱۰٫۰۲۰۴۷۳۱

۳ — ایک مثلث کے ضلع ۳، ۵، ۷ فٹ ہیں۔ زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۱۳٫۵ = ۱٫۱۳۰۳۳۳۸، لوک ۱۴ = ۱٫۱۴۶۱۲۸۰،

ل جم °۱۰ ۳۵َ = ۹٫۹۹۲۱۱۷۵، ل جم °۱۰ ۴۵َ = ۹٫۹۹۲۰۹۳۲

۴ — اگر ب = °۵۵، ج = °۱۰، ا = ۲۰۰ فٹ تو ب معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰٫، لوک ۱۶۴ = ۲٫۲۱۴۸۴۱۴۷... لوک ۴ = ۱٫۷۲۴۶۴... ۲٫۲۳۷۱۴۱۴

ل جب °۵۵ = ۹٫۹۱۳۳۶۴۵، لوک ۱٫۷۲٫۶۵ = ۲٫۲۳۷۱۶۶۶

۵ — اگر ایک مثلث میں ب = ۲٫۲۵ فٹ، ج = ۵٫۷۵ فٹ، ا = °۴۵ تو ب اور ج معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

(183)

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰ ، ل مم ۲۷° = ۱۰٫۲۹۲۸۳۴ ،

ل مس ۱۳° ۴۷′ = ۹٫۳۸۹۷۲۴ ، ل مس ۱۳° ۴۸′ = ۹٫۳۹۰۲۷۰ ،

۶ — اگر ایک مثلث کے دو ضلعوں کے طولوں میں نسبت ۹ : ۷ ہو اور ان کا درمیانی زاویہ ۴۷° ۲۵′ ہو تو دوسرے زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ ، ل مس ۶۶° ۱۷′ ۳۰″ = ۱۰٫۳۵۷۳۹۴۲

ل مس ۱۵° ۵۳′ = ۹٫۴۵۴۱۲۷۹ ، فرق ۱′ کے لیے = ۴۷۹۶

۷ — ایک مثلث کا ایک زاویہ ۹۰° ہے، رقبہ ۱۰ $\sqrt{۳}$ ، اور گھیرا ۲۰، باقی زاویے اور ضلع معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ ، ل جب ۴۹° ۶′ = ۹٫۸۷۸۴۳۷۶

لوک ۷ = ٫۸۴۵۰۹۸۰ ، ل جب ۴۹° ۷′ = ۹٫۸۷۸۵۴۷۰

۸ — ایک مثلث ا ب ج میں یہ دیا گیا ہے کہ ا = ۱۰ فٹ، ب = ۹ فٹ، ج = مس$^{-۱}$ (۴/۳)، جَ معلوم کرو۔ اگر ا اور ب کے ناپنے میں ایک انچ سے بڑی اور ج کی پیمائش میں ۱° سے بڑی خطائیں نہ ہوں تو ثابت کرو کہ جَ کی محسوب کردہ قیمت میں جو خطا ہے وہ ۲٫۷ انچ سے کم ہوگی۔

۹ — اگر مبہم صورت میں مثلث کے اجزاء ا، ب، ب دیے گئے ہوں جہاں ا > ب، اور تیسرے ضلع کی قیمتیں ج، جَ ہوں تو ثابت کرو کہ ج^۲ − ۲ ج جَ جم ۲ ب + جَ^{۲} = ۴ ب^۲ جم^۲ ب

۱۰ — مبہم صورت میں جس میں ا، ب، ا دیے گئے ہوں اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے متناظر زاویہ کا دُگنا ہو تو ثابت کرو کہ

ا $\sqrt{۳}$ = ۲ ب جب ا ، یا ۴ ب^۳ جب^۲ ا = ا^۲ (ا + ۳ ب)

۱۱ — ایک مثلث کا قاعدہ اس کے ارتفاع کے مساوی ہے اور دوسرے دو ضلع معلومہ طول کے ہیں۔ مثلث کے دیگر اجزاء معلوم کرو اُن ضابطوں سے جو لوکارثمی عمل حساب کے لیے موزوں ہوں۔ ثابت کرو کہ دیے ہوئے ضلعوں میں جو نسبت ہے اُس کو ½ ($\sqrt{۵}$ − ۱) اور ½ ($\sqrt{۵}$ + ۱) کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔

۱۲ — زمین کے ایک مثلثی ٹکڑے میں اس کا طویل ترین ضلع ۹۰ گز ہے، دوسرے دو ضلعوں کا مجموعہ ۱۰۰ گز ہے اور اس کا ایک زاویہ ۴۶° ہے۔ دوسرے زاویے

معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

ل مس ۳۲° = ۹،۶۲۷۸۵۱۹

ل مس ۳۱° ۱۵َ = ۹،۳۷۱۹۳۳۳ ، ل مس ۳۱° ۱۶َ = ۹،۳۷۲۴۹۹۲

۱۳ — ایک مثلث کا ایک زاویہ ۳۶° ہے، مقابل کا ضلع ۴ اور ارتفاع √۵ - ۱ ہے۔ مثلث کو حل کرو۔

۱۴ — اگر ایک مثلث کا کوئی ضلع ۱/۴ (۳ - √۵) × گھیرا سے کم ہو تو بتاؤ کہ زاویوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمودوں سے ایک مثلث کا بنانا ناممکن ہے؛ لیکن اگر ہر ضلع ۱/۶ گھیرے سے بڑا ہے تو یقیناً ایسا مثلث بنانا ممکن ہے۔ (184)

۱۵ — اگر اجزا ا ج = ۵°، ب = ۲، ج = √۶ سے ایک مثلث کو حل کیا جائے تو بتاؤ کہ ج کی قیمت میں ۰،۱ کی خطا سے ب کی محسوب کردہ قیمت میں تقریباً ۲۲،۴ً کی خطا پیدا ہوگی۔

۱۶ — ایک مثلث کے ضلع سلسلۂ حسابیہ میں ہیں۔ اگر اس کا اوسط ضلع اور اس کے مقابل کا زاویہ دیے گئے ہوں تو مثلث کو حل کرنے کے لیے ضابطوں کی تلاش کرو اور دیے ہوئے زاویہ کی بڑی سے بڑی ممکن قیمت معلوم کرو۔ اگر اوسط ضلع ۴۵ فٹ اور مقابل کا زاویہ ۵۹° ۵۹َ ۵۹ً ہو تو مثلث کو حل کرو۔

۱۷ — ایک مثلث کے وسطی خط کا طول اور وہ زاویے دیے گئے ہیں جن میں یہ خط راسی زاویہ کو تقسیم کرتا ہے۔ اس مثلث کو حل کرو۔

۱۸ — ایک مثلث کا ایک ضلع، اس کے مقابل کا زاویہ، اور اس زاویہ سے ضلع پر کا عمود دیے گئے ہیں۔ مثلث کو حل کرو۔

۱۹ — ایک مثلث کو دیے ہوئے اجزا ا، ب، ا سے حل کیا گیا ہے۔ اگر ا، ب کی قیمتیں چھوٹی خطاؤں لا، ما سے علی الترتیب متاثر ہوں تو ان کی وجہ سے ا سے مقابل کے ضلع پر کھینچے ہوئے عمود کے محسوب کرنے میں جو خطا واقع ہوتی ہے اس کو معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ خطا صفر ہے اگر

لا جب^۲ ب جم ج = ما (جب^۲ ب - جب^۲ ج)

۲۰ — ایک کشتی جنوب سے ۵۴° مشرق کی سمت میں چل رہی ہے اس سے

ایک روشنی کا مینار دیکھا گیا ہے جو شمال سے ۵۴° مشرق والی سمت میں نظر آتا ہے۔ کشتی ایک میل آگے جانے کے بعد پھر اس مینار کا مشاہدہ کیا گیا تو وہ ٹھیک شمال کی سمت میں نظر آیا۔ اس آخری مشاہدہ کے وقت مینار کا فاصلہ، گزوں تک صحیح، معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

ل جب ۴۰° = ۹٫۸۰۸۰۶۷ ، لوک ۲ = ۰.۳۰۱۰۳۰۰

لوک ۲.۶ = ۰.۴۱۴۹۷۳۳ ، لوک ۲.۷ = ۰.۴۳۱۳۶۳۸

۲۱۔ ایک چٹان پر ایک مینار ہے جس کو دریا میں کی ایک کشتی سے دیکھا گیا تو معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی کا ارتفاع ۶۰° ہے؛ پھر ساحل کی طرف پہلے مشاہدے کے مستوی میں ۵۰۰ گز کا فاصلہ طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی اور اس کے قاعدے کے ارتفاع علی الترتیب ۹۰° اور ۴۵° ہیں۔ چٹان اور مینار کی بلندیاں معلوم کرو۔

۲۲۔ ایک انتصابی ستون کا پائین ا ہے۔ ب اور ج، ا کے ٹھیک مشرق میں ہیں اور د، ج کے جنوب میں ہے۔ ب پر ستون کا جو ارتفاع ہے وہ ج پر کے ارتفاع کا دوگنا ہے اور وہ زاویہ $\sin^{-1}\frac{1}{4}$ ہے جو اب کے محاذی د پر بنتا ہے؛ نیز ب ج = ۲۰ فٹ، ج د = ۳۰ فٹ۔ ستون کی بلندی معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک خاص مقام سے ایک پہاڑ شمال مشرقی سمت میں نظر آتا ہے۔ اس مقام سے اس پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع عہ مشاہدہ کیا گیا ہے۔ مذکورہ مقام سے مشرق جنوب مشرق کی سمت میں ایک ٹیلہ پر جس کا ارتفاع ف معلوم ہے چڑھا جاتا ہے اور ٹیلہ کی چوٹی سے پہاڑ کی چوٹی سمت شمال میں زاویہ ارتفاع بہ پر دکھائی دیتی ہے۔ ثابت کرو کہ مقام قبل الذکر کے اوپر پہاڑ کی چوٹی کی بلندی

ف جب عہ جم بہ قم (عہ - بہ) ہے۔

۲۴۔ دو مستقیم متقاطع پٹڑیوں میں سے ایک پر ایک ٹرین جا رہی ہے۔ جب اس کے پہلے ڈبہ کا اگلا رخ پٹڑیوں کے مقامِ اتصال پر پہنچتا ہے تو ٹرین کے محاذی دوسری پٹڑی پر کے کسی خاص مقام پر زاویہ عہ بنتا ہے اور جب اس کے آخری ڈبہ کی پشت پہنچتی ہے تو زاویہ عہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ دو پٹڑیاں ایک

دوسرے سے زاویہ طہ پر مائل ہیں جہاں طہ، مساوات ۲مم طہ = مم عہ بہ مم عہَ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۵ — ایک اسطوانی مینار ایک افقی میدان پر قائم ہے؛ ایک آنکھ جو میدان میں واقع ہے مینار کے اوپر کے سرے کی کور کی قوس کو دیکھتی ہے جو نظر آرہی ہے۔ اگر اس قوس کے کسی سرے کے زاویۂ ارتفاع میدان کے اوپر عہ، عہَ، عہً ہوں جبکہ آنکھ علی الترتیب ج، جَ، جً فاصلوں پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$(\text{جَ}^۲ - \text{جً}^۲)\ \text{مم}^۲\ \text{عہ} + (\text{جً}^۲ - \text{ج}^۲)\ \text{مم}^۲\ \text{عہَ} + (\text{ج}^۲ - \text{جَ}^۲)\ \text{مم}^۲\ \text{عہً} = ۰$$

۲۶ — ایک غبارہ شمال مشرقی سمت میں ارتفاع عہ پر دیکھا گیا؛ دس منٹ بعد ٹھیک شمال میں ارتفاع بہ پر وہ نظر آیا۔ بعد ازاں معلوم ہوا کہ جس شرح سے وہ نیچے اتر رہا تھا وہ چھ میل فی گھنٹہ تھی؛ اس کی افقی حرکت کو یکساں فرض کرکے ثابت کرو کہ اس کی افقی حرکت کی شرح

$$\frac{۶}{\sqrt{۲}\ \text{مس عہ} - \text{مس بہ}}$$

میل فی گھنٹہ تھی؛ اس دوران میں ہوا کی سمت مشرقاً تھی۔

۲۷ — مجھے دو میناروں کی چوٹیاں ایک خطِ مستقیم میں زاویۂ ارتفاع عہ پر نظر آتی ہیں، اور ساکن پانی میں ان کے عکسوں کے زاویۂ نشیب بہ اور جہ دکھائی دیتے ہیں۔ اگر میری آنکھ کی بلندی سطحِ آب کے اوپر ج ہو تو ثابت کرو کہ میناروں کے درمیان افقی فاصلہ ہے

$$\frac{۲\ \text{ج}\ \text{جم}^۲\ \text{عہ}\ \text{جیب}\ (\text{بہ} - \text{جہ})}{\text{جیب}\ (\text{بہ} - \text{عہ})\ \text{جیب}\ (\text{جہ} - \text{عہ})}$$

۲۸ — ایک برج کے جنوب میں مقام ا سے برج کا زاویۂ ارتفاع °۳۰ ہے اور مقام ب پر جو ا سے ا فاصلہ پر اس کے مغرب میں واقع ہے برج کا ارتفاع °۱۸ ہے۔ بتاؤ کہ برج کی بلندی $\frac{\text{ا}}{\sqrt{۲\sqrt{۵} + ۲}}$ ہے۔

۲۹۔ ایک برج جو ۱۵ فٹ بلند ہے اور زمین سے ۵ فٹ بلندی پر اس پر ایک نشان ہے؛ بتاؤ کس فاصلہ پر برج کے یہ دو حصے ایک آنکھ پر مساوی زاویے بنائینگے جبکہ آنکھ سطح زمین سے ۵ فٹ بلند واقع ہو۔

۳۰۔ ایک شخص مسطح میدان سے جس پر ایک برج ہے اور برج پر ایک مینار ہے مشاہدہ کرتا ہے کہ جب وہ برج کے پائین سے ا فیٹ فاصلے پر ہوتا ہے تو اس کی چوٹی اور ایک پہاڑ کی چوٹی ایک خطِ مستقیم میں نظر آتی ہیں۔ برج کے پائین سے ب فٹ اور پرے ہٹنے سے وہ دیکھتا ہے کہ مینار کے محاذی اس کی آنکھ پر حسب سابق وہی زاویہ بنتا ہے اور اس کی چوٹی اور پہاڑ کی چوٹی ایک خطِ مستقیم میں ہیں؛ ثابت کرو کہ اگر مشاہد کی آنکھ میں سے گزرنے والے افقی مستوی کے اوپر برج کی بلندی ج فٹ ہو تو پہاڑ کی بلندی اُسی مستوی کے اوپر $\frac{\text{ا ب ج}}{\text{ج}^2 - \text{ا}^2}$ فٹ ہوگی

۳۱۔ ایک شخص ۵ فٹ قد والا ایک مخروط مضلع کے قاعدہ کے نزدیک کھڑا ہے جس کا قاعدہ مربع ہے، وہ دیکھتا ہے کہ آفتاب مخروط مضلع کے ایک کنارہ پر اس کے وسط میں غائب ہونا ہے۔ اگر نزدیک ترین کناروں سے شخص مذکور کے فاصلے ا اور ب ہوں اور سورج کا ارتفاع ط ہو تو ثابت کرو کہ مخروط مضلع کی بلندی ہے

$$\text{۱۰} + \text{مس ط} \sqrt{\tfrac{1}{2}(\text{۵ ا}^2 - \text{۲ ا ب} + \text{ب}^2)} \text{ فٹ}$$

(186)

۳۲۔ ایک پہاڑی کی چوٹی سے نیچے کے میدان پر کے ایک نقطہ کا زاویۂ نشیب ۳۰° ہے اور پہاڑی سے تین چوتھائی راستہ نیچے اترنے کے بعد اسی نقطہ کا زاویۂ نشیب ۴۵° ہے۔ ٹھیک ٹھیک پہاڑی کا میلان معلوم کرو۔

۳۳۔ ا ب ج د، ایک کمرہ کا مستطیلی فرش ہے جس کا طول ا ب، ا فٹ ہے۔ کمرہ کی بلندی معلوم کرو اگر ج پر کمرے کی بلندی کے محاذی کونہ ا پر زاویہ ء بنے اور کونہ ب پر زاویہ ہ بنے۔ اگر ا = ۴۸ فٹ، ء = ۴۸°، ہ = ۳۰° تو ثابت کرو کہ بلندی تقریباً ۱۸ فٹ ۱ انچ ہے۔

۳۴۔ ایک برج ایک افقی مستوی پر ایک پہاڑی سے جس کا میلان ء ہے

ا فاصلہ پر واقع ہے۔ پہاڑی پر کے ایک شخص کو بُرج کے اوپر سے ایک تالاب عین دکھائی دے سکتا ہے، اس تالاب کا فاصلہ بُرج سے ب ہے۔ اگر مشاہد کا فاصلہ پہاڑی کے پائین سے ج ہو تو ثابت کرو کہ بُرج کی بلندی

$$\frac{\text{ب ج جب عہ}}{\text{ا + ب + ج جم عہ}}$$ ہے۔

۳۵ — ایک شخص دو بُرجوں کے درمیان کھڑا دیکھتا ہے کہ ان میں سے ہر ایک بُرج اُس کی آنکھ پر زاویہ عہ بناتا ہے؛ پھر وہ ایک سیدھے راستہ پر جو بُرجوں کو ملانے والے خط سے زاویہ جہ پر مائل ہے ا فٹ چلتا ہے اور دیکھتا ہے کہ اس کی آنکھ پر ان میں سے ہر برج کے محاذی زاویہ بہ بنتا ہے؛ برجوں کی بلندیاں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل رشتے ثابت کرو:—

$$\text{ف فَ (مم}^2\text{ بہ − مم}^2\text{ عہ) = ا}^2$$

$$\text{(فَ − ف) (مم}^2\text{ بہ − مم}^2\text{ عہ) = ۲ ا مم عہ جم جہ}$$

جن میں ف، فَ سے برجوں کی بلندیاں تعبیر ہوتی ہیں۔

۳۶ — ایک پہاڑی کی چوٹی سے ایک پُل کے دو ستونوں کے زاویہ نشیب عہ، بہ مشاہدہ کیے گئے ہیں اور ستونوں کا درمیانی فاصلہ ا، مشاہدہ کے نقطہ پر زاویۂ طہ بناتا ہے؛ ثابت کرو کہ پہاڑی کی بلندی ہے:

$$\tfrac{1}{2}\ \text{ا مم فہ قط}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طہ}\ \sqrt{\text{جب عہ جب بہ}}$$

جہاں $$\text{جم فہ} = \text{۲ جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طہ}\ \sqrt{\text{جب عہ جب بہ}}\ \left(\text{جب عہ + جب بہ}\right)^{-1}$$

۳۷ — ایک پہاڑی پر سے ایک شخص دیکھتا ہے کہ تین بُرج جو ایک افقی مستوی پر واقع ہیں اس کی آنکھ پر مساوی زاویے بناتے ہیں اور ان کے قاعدوں کے زاویے نشیب عہ، عہَ، عہً ہیں؛ اگر ج، جَ، جً برجوں کی بلندیاں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب (عہَ − عہً)}}{\text{ج جب عہ}} + \frac{\text{جب (عہً − عہ)}}{\text{جَ جب عہَ}} + \frac{\text{جب (عہ − عہَ)}}{\text{جً جب عہً}} = ۰$$

۳۸ — ایک قلعہ سے ایک توپ ا داغی گئی تو معلوم ہوا کہ دو مقامات ب اور ج پر اس کی روشنی کے نظر آنے اور آواز کے سنائی دینے میں جو وقفے ہوئے وہ علی الترتیب ت، تَ ہیں؛ خطِ مستقیم ب ج میں ا سے معلومہ فاصلہ ل پر د ایک نقطہ ہے؛ اگر ب د = ب، اور ج د = ج تو ثابت کرو کہ آواز کی رفتار ہے

$$\left\{\frac{(\text{ب} - \text{ج})(\text{ل}^2 - \text{ب ج})}{\text{ب تَ}^2 - \text{ج ت}^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

اس صورت کا امتحان کرو جب، $\text{ل}^2 = \text{ب ج}$

۳۹ — ایک پہاڑی کی چوٹی پر ایک چوکونی مینار ہے اور پہاڑی کا ڈھال مستقل میلان رکھتا ہے۔ ڈھال پر کے ایک نقطہ سے مینار کے سرے کا زاویہ ارتفاع عہ مشاہدہ کیا گیا اور پھر پہاڑی کی چوٹی کی طرف ل فٹ آگے بڑھنے سے زاویہ ارتفاع بہ معلوم ہوا۔ اگر مینار کی بلندی ف ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑی کا میلان افق کے ساتھ ہے

$$\text{جم}^{-1}\left\{\frac{\text{ل}}{\text{ف}} \times \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}}\right\}$$

۴۰ — ایک کروی گنبد کے راس پر ایک صلیب نصب ہے؛ کسی خاص نقطہ پر صلیب کا زاویہ ارتفاع عہ اور گنبد کا زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے؛ گنبد کی طرف فاصلہ ل طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ صلیب گنبد کے عین اوپر ہے اور اس کا زاویہ ارتفاع جہ ہے۔ ثابت کرو کہ سطح زمین کے اوپر گنبد کے مرکز کی بلندی ہے

$$\frac{\text{ل جب جہ}}{\text{جب (جہ - عہ)}} \times \frac{\text{جب عہ جم جہ - جم عہ جب بہ}}{\text{جم جہ - جم بہ}}$$

۴۱ — کسی دن دوپہر کے وقت آفتاب کا ارتفاع عہ ہے۔ ایک شخص اس وقت

(187)

ایک ابر کے ٹکڑے میں ایک دائری شگاف دیکھتا ہے جو اُس کے جنوب میں ا فاصلہ پر کے ایک مقام کے اوپر انتصاباً واقع ہے۔ وہ مشاہدہ کرتا ہے کہ شگاف کے محاذی اُس کی آنکھ پر ۲ طہ کا زاویہ بنتا ہے اور زمین پر کا روشن دماغ اُس کی آنکھ پر ۲ فہ کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر ابر کے ٹکڑے کی بلندی زمین کے اوپر لا ہو تو ثابت کرو کہ

لا۲ (م۲ عہ مس۲ فہ ـ مس۲ طہ) ـ ۲ ا لا م عہ مس۲ فہ + ا۲ (مس۲ فہ ـ مس۲ طہ) = ۰

۴۲ـــ ایک پہاڑی کے ڈھال پر کے ایک نقطہ سے دو سیدھے راستے بنائے گئے ہیں، ایک راستہ ایک انتصابی مستوی میں جنوباً واقع ہے، دوسرا راستہ دوسرے انتصابی مستوی میں جو قبل الذکر کے علی القوائم ہے مشرقاً واقع ہے۔ یہ راستے ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ عہ بناتے ہیں اور ان کے طول اُس افقی سڑک تک جو پہاڑی کے پائین میں ہے علی الترتیب ا اور ب ہیں۔ ثابت کرو کہ پہاڑی

افقی سمت کے ساتھ زاویہ جب$^{-1}$ $\left(\frac{ا^2 + ب^2 - ۲\ ا\ ب\ جم\ عہ}{ا\ ب\ جب\ عہ\ مس\ عہ}\right)^{\frac{1}{2}}$ پر مائل ہے۔

۴۳ـــ ایک سیدھی ندی کا عرض اس طرح محسوب کیا گیا ہے کہ اس کی ایک جانب ا طول کا ایک قاعدہ ناپا گیا ہے اور اس کے سروں کو مقابل کے کنارہ پر کے ایک نشان سے ملانے والے خطوطِ مستقیم جو زاویے قاعدے کے ساتھ بناتے ہیں ان کا مشاہدہ کیا گیا ہے۔ اگر اس آلہ سے جس سے زاویے ناپے گئے ہیں زاویوں کی قیمتیں اصلی قیمتوں سے (۱ + ن) گنی حاصل ہوئی ہوں جہاں ن بہت چھوٹا ہے تو ثابت کرو کہ دریا کے محسوب کردہ عرض میں جو خطا ہے وہ

$$ن\ ا \times \frac{بہ\ جب^2\ عہ - عہ\ جب^2\ بہ}{جب^2\ (عہ - بہ)}$$

کے بہت قریب ہے؛ عہ، بہ مذکورہ بالا زاویوں کے دائری ناپ ہیں۔

۴۴ـــ ایک مشاہد ایک جہاز کے عرشہ سے جو سطح سمندر سے ۲۰ فٹ اوپر ہے دُور کے روشنی کے مینار کی چوٹی کو عین دیکھ سکتا ہے، وہ پھر جھنڈے کے ڈنڈے پر اوپر تک چڑھتا ہے جہاں وہ عرشہ سے ۸۰ فٹ بلند ہو جاتا ہے تو اُسے روشنی کے

مینار کا دروازہ نظر آتا ہے جس کی بلندی سمندر کے اوپر مینار کی بلندی کا چوتھائی ہے۔ مینار سے اُس کا فاصلہ اور مینار کی بلندی معلوم کرو اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے۔

۴۵ــــ ایک سیدھی نہر کے کنارے پر تین کھمبے ایک ایک میل کے فاصلے پر گاڑے گئے ہیں، ان میں سے ہر ایک کی بلندی سطح آب کے اوپر ایک ہی ہے۔ اگر پہلے اور تیسرے کھمبوں کے سروں کو ملانے والا نظری خط درمیانی کھمبے کو اس کے سرے سے آٹھ انچ نیچے قطع کرے تو زمین کا نصف قطر ایک میل تک صحیح معلوم کرو۔

۴۶ــــ تین نقطوں ا، ب، ج پر جو ایک افقی مستوی میں ہیں سوراخ ڈال کر مورم کی تہ کا سراغ لگایا گیا تو معلوم ہوا کہ وہ علی الترتیب ا، ب، ج گہرائیوں پر ہے؛ نیز ا ب = ف، ب ج = ک، ا ب ج = ع، اگر مورم کی تہ کی اوپر کی سطح، مستوی ہو تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ اس کا میلان ف مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مس}^{2}\,\text{ف} = \text{قم}^{2}\text{ع}\left\{\frac{(\text{ج}-\text{ب})^{2}}{\text{ک}^{2}} + \text{جم ع}\,\frac{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ج}-\text{ب})}{\text{ف ک}}\;2 - \frac{(\text{ا}-\text{ب})^{2}}{\text{ف}^{2}}\right\} \qquad (188)$$

۴۷ــــ ایک ستون کا زاویۂ ارتفاع ع ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے شمال میں ہے دیکھا جاتا ہے اور ب ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے مشرق میں اس سے ج فاصلہ پر ہے دیکھا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ستون کی بلندی ہے

$$\frac{\text{ج جب ع جب ب}}{\left\{\text{جب}\,(\text{ع}-\text{ب})\,\text{جب}\,(\text{ع}+\text{ب})\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

۴۸ــــ ایک بندرگاہ سے شمال میں ۹ میل فاصلے پر ایک روشنی کا مینار ہے۔ بندرگاہ سے ایک کشتی اُس سمت میں جو مشرق سے شمال کی طرف $22\frac{1}{2}°$ کا زاویہ بناتی ہے حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ روشنی کا مینار اس سے شمال مغربی سمت میں نظر آتا ہے، پھر وہ مڑتی ہے اور روشنی کے مینار کی طرف حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ بندرگاہ اس کے جنوب مغربی سمت میں نظر آتا ہے،

پھر وہ مڑتی ہے اور بندرگاہ میں اس کی طرف حرکت کرتی ہوئی داخل ہوتی ہے ثابت کرو کہ کشتی کی اس گردش کا طول تقریباً ۲۰ میل ہے۔

۴۹ — ر نصف قطر کے ایک دائری تالاب کے گرد یکساں عرض ب کا راستہ ہے جس کے گرد بلندی د کی باڑ لگی ہوئی ہے۔ ایک شخص جس کی لمبائی ف ہے باڑ کے عین اندر کھڑا ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ باڑ کا وہ حصہ جس کے بلند ترین نقطے پانی میں انعکاس کے ذریعہ اِس شخص کو نظر آ سکتے ہیں $\frac{1}{ن}$ واں ہے جہاں

$$\frac{1}{ن} = \frac{2}{\pi}\,جتا^{-1}\left\{\frac{ف+د}{2\sqrt{ف\,د}} \times \sqrt{\frac{ب^2+2\,ر\,ب}{ر+ب}}\right\}$$

بشرطیکہ $ف < د\left(1+\frac{2ر}{ب}\right)$ اور $> \frac{د}{1+\frac{2ر}{ب}}$

۵۰ — ایک کروکی حلقے (Croquet-hoop) کا عرض، اس کے تاروں کی موٹائی، اور گولہ کا قطر دیے گئے ہیں؛ گولہ ایک دیے ہوئے محل میں ہے، بتاؤ کہ وہ شرطیں کس طرح معلوم کی جائیں کہ گولہ کے سبب یہ عین ممکن ہوجائے کہ وہ حلقہ میں سے جا سکے (۱) سیدھا، (۲) ایک تار کو ٹکرانے کے بعد (۳) دونوں تاروں کو ٹکرانے کے بعد؛ یہ مان لو کہ زاویہ وقوع زاویہ انعکاس کے مساوی ہے۔

۵۱ — تین پہاڑوں کی چوٹیاں ا، ب، ج ایک مُشاہد کو ایک ہی خطِ مستقیم میں نظر آتی ہیں جبکہ وہ دو مقامات ف اور ق میں سے ہر ایک پر کھڑا رہتا ہے؛ یہ مقامات ایک ہی افقی مستوی میں ہیں، ا ب اور ب ج کے محاذی ہر مقام پر زاویہ عہ بنتا ہے اور زاویے ا ق ف، ج ف ق، علی الترتیب فہ اور بہ ہیں۔

ثابت کرو کہ پہاڑوں کی بلندیوں میں نسبت ہے:

مم ۲عہ + مم بہ : $\frac{1}{2}$ (مم عہ + مم بہ) (مم عہ + مم فہ) مس عہ : مم ۲عہ + مم فہ

نیز ثابت کرو کہ اگر ق ب خط ا ج کو د پر قطع کرے تو ا ج = ج د جب ۲ ع (مم ب + مم ۲ ع)

۵۲ — ایک شخص ریل کی ایک سیدھی پٹڑی سے ج فاصلہ پر کھڑا ہوا ایک ٹرین دیکھتا ہے جو پٹڑی پر کھڑی ہے اور جس کا قریب ترین سرا پٹڑی کے اُس نقطہ سے و فاصلے پر ہے جو اس شخص کے قریب ترین ہے۔ وہ شخص ٹرین کے محاذی جو زاویہ بنتا ہے اس کا مشاہدہ کرتا ہے اور پھر ٹرین کا طول محسوب کرتا ہے۔ اگر زاویہ ع کے مشاہدہ کرنے میں اُس سے ایک چھوٹی خطا ط سرزد ہو جائے تو ثابت کرو کہ اس کی وجہ سے محسوب کردہ طول میں جو خطا وقوع پذیر ہو گی اُس کو اصلی طول کے ساتھ یہ نسبت ہے

$$\frac{\text{ج ط}}{\text{جب ع (ج جم ع} - \text{و جب ع)}}$$

۵۳ — ایک پہاڑ کی بلندی ف حسب ذیل مشاہدہ کردہ چیزوں کی قیمتوں سے معلوم کرنی ہے، ایک افقی قاعدہ کا خط ب ج (ا)، زاویے ا ب ج، ا ج ب اور زاویہ (ی) جو ا ب، انتصابی خط کے ساتھ بناتا ہے۔ بتاؤ کہ

$$\text{ف} = \frac{\text{ا جم ی جب ج}}{\text{جب (ب + ج)}}$$

اگر ف تقریباً معلوم ہو تو ثابت کرو کہ ب ج کی مناسب ترین سمت (189)

$$\text{ب} = ۲ \,\text{مس}^{-۱} \left(\frac{\text{ا جم ی} - \text{ف}}{\text{ا جم ی} + \text{ف}}\right)$$

سے ملتی ہے ایسی کہ ج کی پیمایش میں جو خطا ہو اس کا اثر ف کی مذکورہ بالا قیمت کی صحت پر کم سے کم ہوتا ہے۔

۵۴ — تین انتصابی جھنڈے ایک افقی مستوی پر قائم ہیں۔ اس مستوی میں تین نقطے ا، ب، ج ہیں جن میں سے ہر ایک پر اِن تین جھنڈوں میں سے

دو کے سرے ایک ہی خط مستقیم میں نظر آتے ہیں، اور یہ خطوط مستقیم افق کے ساتھ علی الترتیب زاویے عہ، بہ، جہ بناتے ہیں۔ جھنڈوں کے سروں پر سے جو مستوی گذرتا ہے وہ افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ جھنڈوں کے طول ہیں

$$\frac{ب ج}{\sqrt{مم^2 به - مم^2 طه} + \sqrt{مم^2 جه - مم^2 طه}}$$

اور دو متشابہ جملے۔ بتاؤ کہ جذروں کی علامتیں کس طرح لی جانی چاہئیں۔

۵۵۔ ایک برج ا ب ایک افقی مستوی پر قائم ہے اور اس پر ایک مینار ب ج ہے۔ ایک پہاڑ پر جس کا رخ ایک مائل مستوی خیال کیا جا سکتا ہے ایک مشاہد مقام ع پر کھڑا دیکھتا ہے کہ ا ب، ب ج میں سے ہر ایک کے محاذی اس کی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے، اب وہ مقام ف تک حرکت کرتا ہے اور فاصلہ ع ف (= ۲ل) کی پیمائش کرتا ہے اور دیکھتا ہے کہ پھر ا ب، ب ج اس کی آنکھ پر وہی زاویے عہ بناتے ہیں؛ اب وہ زاویوں ا ف ع (= بہ) اور ج ف ع (= جہ) کی پیمائش کرتا ہے۔ اگر ا ب، ب ج کی بلندیاں لا اور ما ہوں تو بتاؤ کہ

$$لا\ جم\ به = ما\ جم\ جه = ل \left\{ ۱ - \frac{جم\ به\ جم\ جه\ جم^2\ عه}{جم^2 \frac{1}{2}(به + جه)\ جم^2 \frac{1}{2}(به - جه)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

نیز اگر ع ف کا نقطۂ وسطی ث ہو اور ث میں سے گذرنے والے خط میلان اعظم پر ھ وہ نقطہ ہو جس پر ا ب، ب ج مساوی زاویے ضہ بناتے ہیں اور اگر ث ھ = ب تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ پہاڑ کا میلان طہ، مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \frac{لا^2\ ما^2}{(لا - ما)^2} - \left(\frac{ل^2 + ب^2}{۲ب}\right)^2 جب\ طه + \frac{ل^2 ب^2}{۲ب} جم\ طه \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{لا\ ما\ (لا + ما)\ جب\ ۲\ ضه}{لا^2 + ما^2 - ۲\ لا\ ما\ جم\ ۲\ ضه}$$

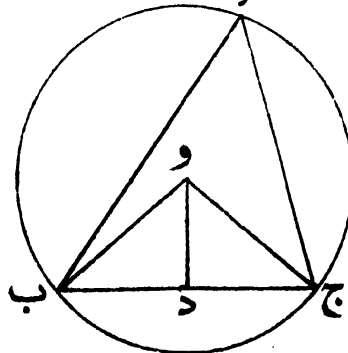
(190)

بارہواں باب

مثلثوں اور ذوار بعتہ الاضلاعوں کے خواص

۱۵۰ ـــــ اس باب میں ہم اکثر اقلیدسی ہندسہ کے اُن مسئلوں کو بلا ثبوت مان لینگے جو ہمارے مقصد کے لیے ضروری ہیں اور ان مسئلوں کی تحقیق کے لیے نظری ہندسہ پر لکھی ہوئی کتابوں کا حوالہ دینگے۔

مثلث کا حائط دائرہ

۱۵۱ ـــــ ایک مثلث کے حائط دائرہ کے نصف قطر کے لیے ضابطہ ر = $\frac{1}{2}$ ا قم ا' دفعہ ۱۲۰ میں حاصل ہو چکا ہے۔ اس ضابطہ کو یوں بھی حاصل کیا جاسکتا ہے:

فرض کرو کہ د' حائط دائرہ کا مرکز ہے؛ مثلث ا ب ج کے ضلع ب ج پر عمود و د کھینچو، تو ب ج کا نقطۂ وسطی د ہے اور زاویہ ب و د = ا

چونکہ ب د = و ب جب ب و د' اس لیے

$\frac{1}{2}$ ل = ر جب ا ' یا ر = $\frac{1}{2}$ ل قم ا . . . . (۱)

اگر مثلث کا رقبہ س سے تعبیر ہو تو

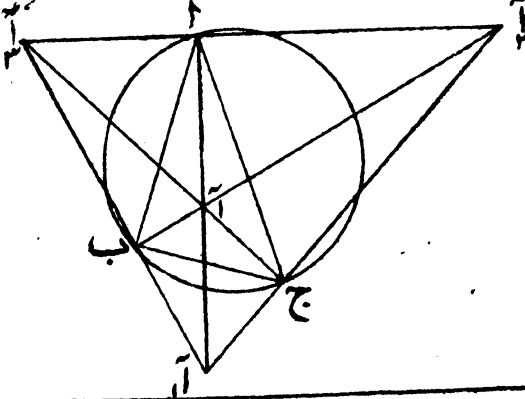
س = $\frac{1}{2}$ ب ج جب ا

اس طرح حائط دائرہ کے نصف قطر کے لیے ہمیں جملہ حاصل ہوتا ہے

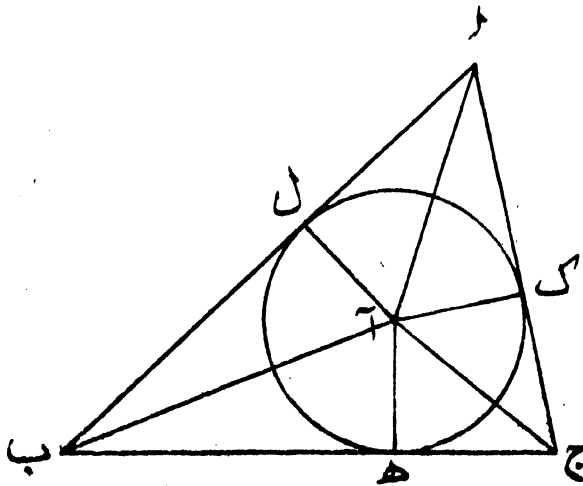
ر = $\frac{\text{ا ب ج}}{\text{۴ س}}$ ' . . . . . . (۲)

نیز و د = و ب جم ا = ر جم ا

مثلث کے اندرونی اور جانبی دائرے

۱۵۲ ——— ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرنے والے چار دائرے کھینچے جا سکتے ہیں؛ اندرونی دائرہ ہر ضلع کو داخلی طور پر مس کرتا ہے' فرض کرو کہ اس کا مرکز آ ہے؛ ہر جانبی دائرہ مثلث کے ایک ضلع کو اور دوسرے دو ممدودہ ضلعوں کو مس کرتا ہے' فرض کرو کہ

اِن جانبی دائروں کے مرکز آ، آ، آ ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ آ ا، آ ب، آ ج، علی الترتیب زاویوں ا، ب، ج کی تنصیف کرتے ہیں، اور آ ب، آ ج علی الترتیب زاویوں ب، ج کی خارجی طور پر تنصیف کرتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مثلث آ آ آ کے راسوں آ، آ، آ سے مقابل کے ضلعوں پر عمود ا آ، ب آ، ج آ ہیں اور اِس مثلث آ آ آ کا مرکز عمودی آ ہے۔

مثلث ا ب ج کا حائط دائرہ، مثلث آ آ آ کا نونقطی دائرہ ہے اور اس لیے یہ حائط دائرہ ضلعوں آ آ، آ آ، آ آ کے نقاط وسطی میں سے اور نیز آ آ، آ آ، آ آ کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔

(192) ۱۵۳ ـــــ فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے ضلعوں ا ب، ب ج، ج ا کو اس کا اندرونی دائرہ علی الترتیب نقطوں ل، ھ، ک پر مس کرتا ہے۔

تب △ آ ب ج + △ آ ج ا + △ آ ا ب = س،

اب چونکہ △ آ ب ج = $\frac{1}{2}$ آ ھ × ب ج = $\frac{1}{2}$ ر ا،

△ آ ج ا = $\frac{1}{2}$ ر ب، اور △ آ ا ب = $\frac{1}{2}$ ر ج،

جہاں ر اندرونی دائرہ کا نصف قطر ہے، اس لیے

$\frac{1}{2}$ ر (ا + ب + ج) = س،

یعنی ر = $\frac{\text{س}}{\text{سَ}}$ ، . . . . . . (۳)

جس سے اندرونی دائرہ کا نصف قطر حاصل ہوتا ہے۔ نیز چونکہ

ا = ب ھ + ھ ج = ر (مم $\frac{1}{2}$ ب + مم $\frac{1}{2}$ ج)

اس لیے ر = ا جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج قط $\frac{1}{2}$ ا . . . . (۴)

یہ ر کے لیے دوسرا جملہ ہے جو (۳) سے بھی اخذ ہو سکتا ہے۔

ضابطوں (۱) اور (۴) کو ملانے سے ہمیں متشاکل جملہ حاصل ہوتا ہے

ر = ۴ ں جب $\frac{1}{2}$ ا جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج . . . (۵)

نیز چونکہ ا ک + ب ج = $\frac{1}{2}$ (ب ج + ج ا + ا ب)

اس لیے ا ک = ا ل = س − ا

اور اسی طرح ب ھ = ب ل = س − ب، ج ھ = ج ک = س − ج

پس چونکہ ر = ا ک مس $\frac{1}{2}$ ا = ب ھ مس $\frac{1}{2}$ ب = ج ک مس $\frac{1}{2}$ ج

ہمیں جملے حاصل ہوتے ہیں

ر = (س − ا) مس $\frac{1}{2}$ ا = (س − ب) مس $\frac{1}{2}$ ب = (س − ج) مس $\frac{1}{2}$ ج . . (۶)

ان کو (۳) اور (۴) سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے۔

(193) ۱۵۴ ـــــ دفعہ سابق کے جملوں کے جواب میں جانبی دائروں کے نصف قطروں $ر_۱$، $ر_۲$، $ر_۳$ کے لیے جملے معلوم کیے جا سکتے ہیں ۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کو وہ دائرہ جس کا مرکز $آ_۱$ ہے نقطوں $ھ_۱$، $ک_۱$، $ل_۱$ پر مس کرتا ہے ۔ تب

$$\triangle\ آ_۱ ا ب + \triangle\ آ_۱ ا ج - \triangle\ آ_۱ ب ج = س،$$

اس لیے $\frac{1}{۲} ر_۱ (ب + ج - ا) = س$

اور اس لیے جانبی دائروں کے نصف قطروں کے لیے ہمیں ضابطے ملتے ہیں

$$ر_۱ = \frac{س}{س - ا}،\ ر_۲ = \frac{س}{س - ب}،\ ر_۳ = \frac{س}{س - ج}، \quad \dots (۷)$$

نیز چونکہ $ا = ب ھ_۱ + ھ_۱ ج = ر_۱ (مس \frac{1}{۲} ب + مس \frac{1}{۲} ج)$

اس لیے $ر_۱ = ا جم \frac{1}{۲} ب جم \frac{1}{۲} ج قط \frac{1}{۲} ا \quad \dots (۸)$

اِس سے ضابطہ ملتا ہے

$$ر_1 = ۴\,ر \;\text{جب}\; \tfrac{1}{2}ا \;\text{جم}\; \tfrac{1}{2}ب \;\text{جم}\; \tfrac{1}{2}ج \quad \ldots\ldots(۹)$$

اسی طرح $ر_2$ اور $ر_3$ کے لیے تناظر جملے حاصل ہوتے ہیں ۔

پھر چونکہ

$$ب\,ھ_1 = ب\,ل_1،\;\text{اور}\; ج\,ھ_1 = ج\,ک_1،\;\text{اور}\; ا\,ک_1 = ا\,ل_1$$

اس لیے $ب\,ھ_1 = س - ج$، $ج\,ھ_1 = س - ب$، $ا\,ک_1 = ا\,ل_1 = س$

اس طرح ہمیں ضابطے ملتے ہیں

(194) $$ر_1 = س \;\text{مس}\; \tfrac{1}{2}ا = (س - ج)\;\text{مم}\; \tfrac{1}{2}ب = (س - ب)\;\text{مم}\; \tfrac{1}{2}ج \quad \ldots(۱۰)$$

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ

$$ر_1 + ر_2 + ر_3 - ر = ۴\,ر،$$

$$ر_2ر_3 + ر_3ر_1 + ر_1ر_2 = \frac{س^2}{ر^2}،$$

$$\frac{1}{ر_1} + \frac{1}{ر_2} + \frac{1}{ر_3} = \frac{1}{ر}$$

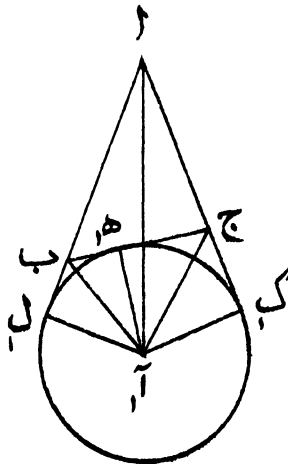
(۲) ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے لیے حسب ذیل جملے، جو جانبی دائروں کے نصف قطروں کی رقوم میں ہیں ثابت کرو:—

(الف) $$ا = \frac{ر_1(ر_2 + ر_3)}{\sqrt{ر_2ر_3 + ر_3ر_1 + ر_1ر_2}}،\quad (ب)\; \text{جب}\; \tfrac{1}{2}ا = \frac{ر_1}{\sqrt{(ر_1+ر_2)(ر_1+ر_3)}}$$

(ج) $$\text{جب}\; ا = ۲ر_1 \frac{\sqrt{ر_1ر_2 + ر_2ر_3 + ر_3ر_1}}{(ر_1+ر_2)(ر_1+ر_3)}$$

(۳) ثابت کرو کہ $$ر = \frac{1}{4}\,\frac{(ر_2+ر_3)(ر_3+ر_1)(ر_1+ر_2)}{ر_2ر_3 + ر_3ر_1 + ر_1ر_2}$$

(۴) ثابت کرو کہ $16\,\text{س}^2\,\text{ر}\,\text{ر}_1\,\text{ر}_2\,\text{ر}_3 = \text{ا}^2\,\text{ب}^2\,\text{ج}^2$

(۵) ثابت کرو کہ $\text{جم}\,\text{ا} = \dfrac{2\text{س} + \text{ر} - \text{ر}_1}{2\text{س}}$

(۶) اگر وہ جانبی دائرہ جو ضلع ا کو مس کرتا ہے حائط دائرہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\,\text{ا} = \text{جم}\,\text{ب} + \text{جم}\,\text{ج}.$$

(۷) ثابت کرو کہ $\text{ر}_1(\text{ر}_2 + \text{ر}_3)\,\text{قم}\,\text{ا} = \text{ر}_2(\text{ر}_3 + \text{ر}_1)\,\text{قم}\,\text{ب} = \text{ر}_3(\text{ر}_1 + \text{ر}_2)\,\text{قم}\,\text{ج}$

(۸) اگر اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کے فاصلے راس ا سے ع، ع_1، ع_2، ع_3 ہوں اور ا سے ب ج پر عمود ع ہو تو ثابت کرو کہ

(ا) $\text{ع}\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3 = 4\,\text{س}^2\,\text{ع}^2$ ،

(ب) $\text{ع}^2 + \text{ع}_1^2 + \text{ع}_2^2 + \text{ع}_3^2 = 16\,\text{س}^2$ ،

(ج) $\bar{\text{ع}}^2 + \bar{\text{ع}}_1^2 + \bar{\text{ع}}_2^2 + \bar{\text{ع}}_3^2 = 4\,\bar{\text{ع}}^2$

(۹) بتاؤ کہ اُس مثلث کا رقبہ جو جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے بنتا ہے یہ ہے

$$\frac{\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}}{2\text{ر}} \text{ ، یا } 8\,\text{س}^2\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ج}$$

(۱۰) ثابت کرو کہ اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے جو چار مثلث بنتے ہیں اِن میں کسی کے گرد کھینچے ہوئے دائرہ کا نصف قطر، س کا دُگنا ہوتا ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ رقبے $\text{آ}_1\,\text{آ}_2\,\text{آ}_3$ ، $\text{آ}\,\text{آ}_2\,\text{آ}_3$ ، $\text{آ}\,\text{آ}_3\,\text{آ}_1$ ، $\text{آ}\,\text{آ}_1\,\text{آ}_2$ ایسے بدلتے ہیں جیسے $\dfrac{1}{\text{ر}}$ ، $\dfrac{1}{\text{ر}_1}$ ، $\dfrac{1}{\text{ر}_2}$ ، $\dfrac{1}{\text{ر}_3}$

(۱۲) ثابت کرو کہ (ا) $\dfrac{\text{آ}_2\,\text{آ}_3^2}{\text{ر}_2\,\text{ر}_3} + \dfrac{\text{آ}_3\,\text{آ}_1^2}{\text{ر}_3\,\text{ر}_1} + \dfrac{\text{آ}_1\,\text{آ}_2^2}{\text{ر}_1\,\text{ر}_2} = 8\,\dfrac{\text{س}}{\text{ر}}$ ،

(ب) $\text{ر}^3 \times \text{آ}\,\text{آ}_1 \times \text{آ}\,\text{آ}_2 \times \text{آ}\,\text{آ}_3 = \text{آ}\,\text{ا}^2 \times \text{آ}\,\text{ب}^2 \times \text{آ}\,\text{ج}^2$ ،

(۱۳) اگر ایک مثلث کے راسوں سے آ کے فاصلے $ف_۱$، $ف_۲$، $ف_۳$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ف_۱ ف_۲ ف_۳}{ا ب ج} = \frac{۱}{س}$$

(۱۴) اگر اُس مثلث کے ضلع اَ، بَ، جَ ہوں جو جانبی دائروں کے نقاط تماس $ھ_۱$، $ھ_۲$، $ھ_۳$ کو ملانے سے بنتا ہے تو ثابت کرو کہ $\frac{ا^۲ - اَ^۲}{اَ} = \frac{ب^۲ - بَ^۲}{بَ} = \frac{ج^۲ - جَ^۲}{جَ}$

(۱۵) دائروں ب و ج، ج و ا، ا و ب کے مرکزوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اس کے ضلعوں میں نسبت جب ۲ ا : جب ۲ ب : جب ۲ ج ہوگی۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مبہم صورت میں جبکہ ا، ب دیے جائیں جو دو مثلث حاصل ہوتے ہیں اُن کے حائط دائرے مساوی ہوتے ہیں؛ نیز ثابت کرو کہ ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ہے

$$(ب^۲ \text{ قم}^۲ ب - ا^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

(۱۷) مثلث کے حل کی مبہم صورت میں ثابت کرو کہ دیے ہوئے ضلعوں میں سے بڑے ضلع کے ساتھ اندرونی دائروں کے نقاط تماس کا فاصلہ تیسرے ضلع کی قیمتوں کے فرق کے نصف کے مساوی ہوتا ہے۔

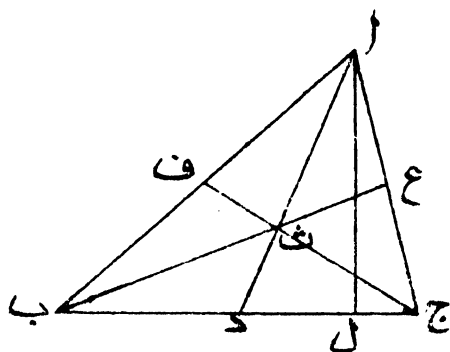
(۱۸) اگر مثلثوں آ ب ج، آ ج ا، آ ا ب کے حائط دائروں کے نصف قطر $غ_۱$، $غ_۲$، $غ_۳$ ہوں تو ثابت کرو کہ $۴ س^۳ - س (غ_۱^۲ + غ_۲^۲ + غ_۳^۲)$
$- غ_۱ غ_۲ غ_۳ = ۰$

(۱۹) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے جانبی دائروں کے نصف قطر، کعبی مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ (۴ س + ر) + لا س^۲ - ر س^۲ = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔

خطوط وسطی

۱۵۵ —— ایک مثلث کے راسوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے ملانے والے خطوط مستقیم ا د، ب ع، ج ف خطوط وسطی کہلاتے ہیں ۔

خط وسطی ا د کا طول، مشہور مسئلہ $\text{اب}^2 + \text{اج}^2 = 2(\text{اد}^2 + \text{بد}^2)$ سے حاصل ہوتا ہے، اِس طرح خطوط وسطی کے طولوں کے مربع مساواتوں

$$\text{م}_1^2 = \frac{1}{2}\text{ب}^2 + \frac{1}{2}\text{ج}^2 - \frac{1}{4}\text{و}^2 ,\quad \text{م}_2^2 = \frac{1}{2}\text{ج}^2 + \frac{1}{2}\text{و}^2 - \frac{1}{4}\text{ب}^2 ,$$

$$\text{م}_3^2 = \frac{1}{2}\text{و}^2 + \frac{1}{2}\text{ب}^2 - \frac{1}{4}\text{ج}^2 \quad \ldots (11)$$

سے ملتے ہیں جہاں م_1، م_2، م_3 خطوط وسطی کے طول ہیں ۔ فرض کرو کہ زاویہ ا د ج، م سے تعبیر ہوتا ہے، تب

$$\text{مم}\ \text{م}_1 = \frac{\text{دل}}{\text{ال}} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{بل} - \text{جل}}{\text{ال}}$$

جہاں ال، ب ج پر عمود ہے؛ پس م، مساوات

$$\text{م م}_1 = \frac{1}{2}(\text{م ب} - \text{م ج}) \quad \ldots\ldots \quad (۱۲)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

نقطہ ث جس پر خطوط وسطی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں مثلث کا مرکز ہندسی کہلاتا ہے۔ یہ بہت مشہور ہے کہ خطوط وسطی میں سے ہر ایک کو ث، نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

(196)

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مم ا ث ف + مم ب ث د + مم ج ث ع = مم ا + مم ب + مم ج

(۲) اگر دائروں ب ث ج، ج ث ا، ا ث ب کے مرکز عہ، بہ، جہ ہوں اور مثلثوں ا ب ج، عہ بہ جہ کے رقبے ق، قَ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{۴۸ ق قَ} = (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2)^2$$

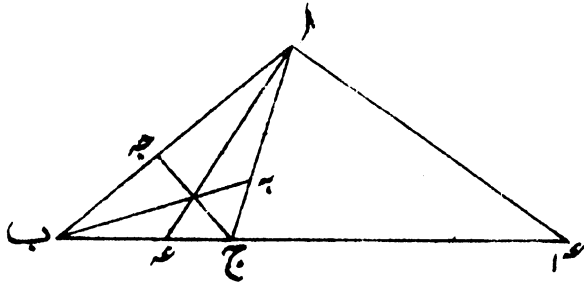
(۳) اگر دائروں ب ث ج، ج ث ا، ا ث ب کے نصف قطر ر_1، ر_2، ر_3 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ا}^2(\text{ب}^2 - \text{ج}^2)}{\text{ر}_1^2} + \frac{\text{ب}^2(\text{ج}^2 - \text{ا}^2)}{\text{ر}_2^2} + \frac{\text{ج}^2(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)}{\text{ر}_3^2} = ۰$$

(۴) اگر زاوئے ب ا د، ج ب ع، ا ج ف علی الترتیب عہ، بہ، جہ اور زاوئے ج ا د، ا ب ع، ب ج ف علی الترتیب عہَ، بہَ، جہَ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم عہ} + \text{مم بہ} + \text{مم جہ} = \text{مم عہَ} + \text{مم بہَ} + \text{مم جہَ}$$

زاویوں کے ناصف

۱۵۶ ـــــــ فرض کرو کہ زاویہ ا کے داخلی اور خارجی ناصف مقابل کے ضلع سے نقطوں عہ اور عہ$_1$ پر ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ داخلی ناصفوں ا عہ، ب بہ، ج جہ کے طول ف، گ، ہ ہیں اور خارجی ناصفوں ا عہ$_1$، ب بہ$_1$، ج جہ$_1$ کے طول فَ، گَ، ہَ۔ تب عہ اور عہ$_1$ کے محل معلوم کرنے کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{\text{ب عہ}}{\text{ج عہ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ج ا}} = \frac{\text{ب عہ}_1}{\text{ج عہ}_1}$، اس لیے

$$\text{ب عہ} = \frac{\text{ا ج}}{\text{ب + ج}}\text{، ج عہ} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب + ج}}\text{، ب عہ}_1 = \frac{\text{ا ج}}{\text{ج - ب}}\text{، ج عہ}_1 = \frac{\text{ا ب}}{\text{ج - ب}}$$

اور طول ف، فَ معلوم کرنے کے لیے

$$\triangle\text{ ا ب عہ} + \triangle\text{ ا ج عہ} = \text{س} = \triangle\text{ ا عہ}_1\text{ ب} - \triangle\text{ ا عہ}_1\text{ ج،}$$

اس لیے $\text{ف (ب + ج) جب } \frac{1}{2}\text{ ا} = \text{فَ (ج - ب) جم } \frac{1}{2}\text{ ا} = 2\text{ س}$

پس $\text{ف} = \frac{\text{۲ ب ج}}{\text{ب + ج}}\text{ جم } \frac{1}{2}\text{ ا، فَ} = \frac{\text{۲ ب ج}}{\text{ج - ب}}\text{ جب } \frac{1}{2}\text{ ا}$ ...(۱۳۱) (197)

مثالیں

(۱) اگر عہ، بہ، جہ وہ زاویے ہوں جو ا عہ، ب بہ، ج جہ ضلعوں ا، ب، ج کے ساتھ بناتے ہیں تو ثابت کرو کہ ا جب ۲ عہ + ب جب ۲ بہ + ج جب ۲ جہ = ۰

(۲) اگر زاویوں کے ناصفوں کو حائط دائرہ تک خارج کیا جائے اور ان کے طول ف، گ، ھ ہوں تو ثابت کرو کہ

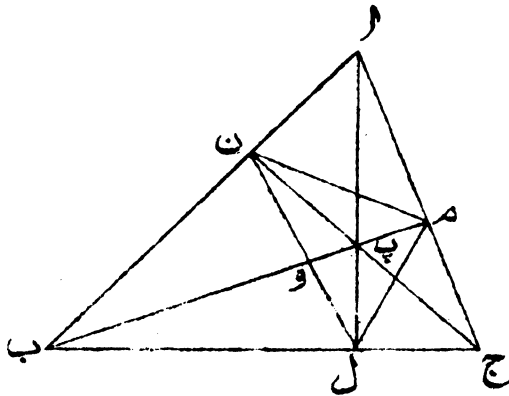
$$\text{ف}_{۱}^{-۱}\,\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ا} + \text{گ}_{۱}^{-۱}\,\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ب} + \text{ھ}_{۱}^{-۱}\,\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ج} = \text{ا}^{-۱} + \text{ب}^{-۱} + \text{ج}^{-۱}$$

اور

$$\text{ف}_{۱}\,\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ا} + \text{گ}_{۱}\,\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ب} + \text{ھ}_{۱}\,\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ج} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$$

(۳) ثابت کرو کہ عہ بہ، ج جہ کو نسبت ۲ ج : ا + ب میں قطع کرتا ہے۔

مثلث پائیں

۱۵۷ ـــــ ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود ا ل، ب م، ج ن کھینچے گئے ہیں۔ ان عمودوں کے پایوں کو ملانے سے جو مثلث ل م ن بنتا ہے اس کو ا، ب، ج کا مثلث پائیں کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی پ ہے، تب چونکہ پ م ا پ ن ا قائمہ زاویے ہیں اس لیے ایک دائرہ جس کا قطر پ ا ہو شکل پ م ا ن کے گرد کھینچا جا سکتا ہے، اس لیے

م ن = پ ا × اُس زاویہ کی جیب جو قطاع م ن میں بنتا ہے

یعنے م ن = پ ا جب ا

اب اگر حائط دائرہ کا مرکز و ہو اور و د، ب ج پر عمود ہو تو یہ ظاہر ہے کہ ا پ = ۲ و د، اور ہم نے دفعہ ۱۵۱ میں یہ بتا دیا ہے کہ

و د = ر جم ا، اس لیے

م ن = ۲ ر جب ا جم ا = اِ جم ا

(198) نیز زاویوں پ ل م، پ ل ن میں سے ہر ایک، ا کا متمم ہے، یا م ل ن = π − ۲ ا، پس مثلث پائیں کے ضلع اور زاویے علی الترتیب ہیں

$$\left.\begin{array}{l} \text{اِ جم ا، ب جم ب، ج جم ج} \\ \pi - ۲\text{ا، } \pi - ۲\text{ب، } \pi - ۲\text{ج} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (۱۴)$$

یہ توجہ طلب ہے کہ آ آ۲ آ۳ کا مثلث پائیں ا ب ج ہے۔ ل م ن کا مثلث پائیں، ا ب ج کا دوسرا مثلث پائیں کہلاتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

ہم نے اوپر یہ مان لیا ہے کہ مثلث حادۃ الزاویہ ہے، اگر زاویہ ا منفرجہ ہو تو یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلث پائیں کے زاویے ۲ ا − π، ۲ ب، ۲ ج ہیں اور اس کے ضلع − اِ جم ا، ب جم ب، ج جم ج ہیں۔

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مثلث ل م ن کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر ۲ ر جم ا جم ب جم ج ہے۔

(۲) اگر دائروں م پ ن، ن پ ل، ل پ م کے قطر ءہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{بہ جہ}}{\text{ب ج}} + \frac{\text{جہ ءہ}}{\text{ج ا}} + \frac{\text{ءہ بہ}}{\text{ا ب}} = 1$$

(۳) اگر مثلث پائیں کے اندرونی اور جانبی دائروں کے نصف قطر ر'، ر'۱، ر'۲، ر'۳ ہوں تو

ثابت کرو کہ $$\frac{\text{ر}'_1\,\text{ر}'_2\,\text{ر}'_3}{\text{ر}'} = \frac{\text{ر}_1\,\text{ر}_2\,\text{ر}_3}{\text{ر}}$$

(۴) اگر ال، ب م، ج ن، حائط دائرہ سے نقطوں ل'، م'، ن' پر ملیں تو

ثابت کرو کہ $$\frac{\text{ال}'}{\text{ال}} + \frac{\text{ب م}'}{\text{ب م}} + \frac{\text{ج ن}'}{\text{ج ن}} = 4$$

خاص نقطوں کے درمیان فاصلے

۱۵۸ ——— فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی پ، حائط دائرہ کا مرکز و، اندرونی دائرہ کا مرکز آ، ایک جانبی دائرہ کا مرکز آ۱، مرکز ہندسی ث، اور نو نقطی دائرہ کا مرکز ء ہے۔ آئیلر کے مشہور مسئلے کی بموجب تین نقطے و، ث، پ ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں اور پ ث = ۲ و ث؛ نقطہ ء بھی و پ پر واقع ہے اور اس کا وسطی نقطہ ہے۔ زاویوں آ ا و، آ ا پ میں سے ہر ایک، $\frac{1}{2}$(ب ~ ج) کے مساوی ہے؛ نیز ا و = س، ا پ = ۲ س جم ا

ا آ = ر قم $\frac{1}{2}$ ا = ۴ س جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج،

ا آ۱ = ۴ س جم $\frac{1}{2}$ ب × جم $\frac{1}{2}$ ج

اب ہم نقطوں و، آ، پ، آ۱، ء کے درمیان ایک دوسرے

سے جو فاصلے ہیں اُن کے لیے جملے معلوم کر سکتے ہیں۔

(199) (۱) و آ معلوم کرنا ۔ فرض کرو و آ = ضہ تو حاصل ہوتا ہے

ضہ۲ = ا و۲ + ا آ۲ - ۲ ا و × ا آ جم و ا آ

اس لیے ضہ۲ = ںہ۲ [۱ + ۱۶ جب۲ ½ ب جب۲ ½ ج - ۸ جب ½ ب جب ½ ج × جم ½ (ب - ج)]

یا ضہ۲ = ںہ۲ (۱ - ۸ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ ج)

پس ہمیں آیُلر کا ضابطہ ضہ۲ = ںہ۲ - ۲ ںہ ر . . . . (۱۵)
حاصل ہوتا ہے

(۲) و آ۱ معلوم کرنا ۔ فرض کرو و آ۱ = ضہ۱ تو

ضہ۱۲ = ںہ۲ [۱ + ۱۶ جم۲ ½ ب جم۲ ½ ج - ۸ جم ½ ب جم ½ ج جم ½ (ب - ج)]

یا ضہ۱۲ = ںہ۲ (۱ + ۸ جب ½ ا جم ½ ب جم ½ ج)

(200)

جس سے حاصل ہوتا ہے ضہ^2 = س^2 + ۲ س ر$'$ ... (۱۶)

(۳) و پ معلوم کرنا۔ مثلث و ا پ سے حاصل ہوتا ہے

و پ^2 = و ا^2 + ا پ^2 - ۲ و ا × ا پ جم و ا پ

یا و پ^2 = س^2 [۱ + ۴ جم^2 ا - ۴ جم ا جم (ب - ج)]

جس سے حاصل ہوتا ہے و پ^2 = س^2 (۱ - ۸ جم ا جم ب جم ج)$'$ ... (۱۷)

(۴) آ پ معلوم کرنا۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

آ پ^2 = ۴ س^2 جم^2 ا + ۱۶ س^2 جب^2 $\frac{1}{2}$ ب جب^2 $\frac{1}{2}$ ج

- ۱۶ س^2 جم ا جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج جم $\frac{1}{2}$ (ب - ج)

اس لیے آ پ^2 = ۴ س^2 {جم^2 ا + (۱ - جم ب) (۱ - جم ج) - جم ا جب ب جب ج

- جم ا (۱ - جم ب) (۱ - جم ج)}

یا آ پ^2 = ۴ س^2 {(۱ - جم ا) (۱ - جم ب) (۱ - جم ج) - جم ا جم ب جم ج}

.... (۱۸)

یا آ پ^2 = ۲ ر^2 - ۴ س^2 جم ا جم ب جم ج

(۵) آ ع معلوم کرنا۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

آ ع^2 = $\frac{1}{2}$ آ پ^2 + $\frac{1}{2}$ آ و^2 - $\frac{1}{4}$ و پ^2؛

اس لیے آ ع^2 = ر^2 + $\frac{1}{2}$ س^2 - س ر - $\frac{1}{4}$ س^2 = ($\frac{1}{2}$ س - ر)^2

اس لیے آ ع = $\frac{1}{2}$ س - ر

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ا ع = $\frac{1}{2}$ س + ر؛ اب چونکہ $\frac{1}{2}$ س

نو نقطی دائرہ کا نصف قطر ہے اس لیے آع، آ ع کے لیے جو جملے ہم نے حاصل کیے ہیں اُن سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ **اندرونی اور جانبی دائرے نو نقطی دائرہ کو مس کرتے ہیں** ۔ پس فیورباک (Feuerbach) کا مسئلہ علم مثلث کے ذریعہ ثابت ہو چکا، اس مسئلہ کے متعدد ہندسی ثبوت دیے جاتے ہیں ۔

مثالیں

(۱) اگر جانبی دائروں کے مرکزوں سے حائط دائرہ کے مماس کھینچے جائیں اور ان کے طول $ج_1$، $ج_2$، $ج_3$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ج_1^2}+\frac{1}{ج_2^2}+\frac{1}{ج_3^2}=\frac{ا+ب+ج}{ا\,ب\,ج}$$

(۲) ثابت کرو کہ مثلث آ و پ کا رقبہ ہے

$$= 2\,ر^2\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(ب-ج)\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(ج-ا)\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(ا-ب)$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$ث\,آ^2=\frac{16}{3}\,ر^2\left\{\sum \text{جب}^2\tfrac{1}{2}ب\;\text{جب}^2\tfrac{1}{2}ج-\tfrac{1}{12}\sum \text{جب}^2 ا\right\}$$

اور $ث\,آ^2+4\,ر\,ر=\frac{1}{3}(ب\,ج+ج\,ا+ا\,ب)-\frac{1}{9}(ا^2+ب^2+ج^2)$

(۴) ثابت کرو کہ

$$و\,پ^2=\frac{\sum ا^2(ا^2-ب^2)(ا^2-ج^2)}{(4\,س)^2}$$

(۵) اگر راسوں سے نو نقطی دائرہ کے مرکز کے فاصلے عہ، بہ، جہ ہوں اور مرکزِ عمودی سے اس کا فاصلہ ث ہو تو ثابت کرو کہ

عہ² + ب² + ج² + ث² = ۳ ر²

(۶) ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ حائط دائرہ کو قطع نہیں کرتا اِلّا اُس صورت کے جبکہ مثلث کا ایک زاویہ منفرجہ ہو اور اِس صورت میں یہ دائرے ایک دوسرے کو زاویہ

جم⁻¹ (ا + ۲ جم ا جم ب جم ج)

پر قطع کرتے ہیں۔

(۷) اگر حائط دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کے درمیان فاصلہ ½ ر ہو تو ثابت کرو کہ یا مثلث قائم الزاویہ ہے، یا مس ب مس ج = ۹

(۸) اگر نو نقطی دائرہ کا مرکز ق ہو تو ثابت کرو کہ

(ق آ₁ - ق آ₂)(ق آ - ق آ) = ب² - ج²

(۹) اگر و آ پ ایک تساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ

جم ا + جم ب + جم ج = ۳/۲

(۱۰) اگر اندرونی دائرہ کا مرکز، حائط دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی سے تساوی الفصل ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کا ایک زاویہ ۶۰° ہے۔

مثلث کے رقبہ کے لیے جملے

۱۵۹ ـــــ مثلث کے رقبہ کے لیے اس سے متعلق مختلف خطوط اور زاویوں کی رقوم میں جملوں کی ایک بہت بڑی تعداد معلوم ہو چکی ہے۔ ایسے بہت سے ضابطے Mathesis, Vol. III میں اور Annals of math. Vol. I. No.6 میں ملینگے۔

ان میں سے چند ضابطے ہم ذیل میں درج کرتے ہیں اور اِن کی تصدیق کا کام طالب علم پر مشق کے طور پر چھوڑتے ہیں:-

(۱) ر ر₁ ر₂ ر₃ ، (۲) ½ ر ع₁ ع₂ ع₃ ، (۳) ۴/۳ ث (ث - م₁)(ث - م₂)(ث - م₃)

جہاں م، م، م خطوط وسطی ہیں اور ۲ ث = م + م + م (۴) س^۲ / ع مم ۱/۲ ا ،

(۵) ف جم ۱/۲ (ب - ج) + گ جم ۱/۲ (ج - ا) + ھ جم ۱/۲ (ا - ب) / ۲ (ف^-۱ جم ۱/۲ ا + گ^-۱ جم ۱/۲ ب + ھ^-۱ جم ۱/۲ ج) ،

جہاں ف ، گ ، ھ زاویوں کے ناصف ہیں ۔

(۶) ۲ مم ۱/۲ ا مم ۱/۲ ب مم ۱/۲ ج ، (۷) ر^۲ مم ۱/۲ ا + ۲ ر ر جب ا ،

(۸) ر ر مس ۱/۲ ا ، (۹) ر ر ... / ب - ج ، (۱۰) ر ر √(۲ ر ... - (ر + ر)) / (ر + ۲)

مثلثوں کے مختلف خواص

۱۶۰ — اگر مثلث ا ب ج کے مستوی میں کوئی نقطہ ق ہو تو ہمیں متماثلہ رشتہ

△ ق ب ج + △ ق ج ا + △ ق ا ب ≡ △ ا ب ج

حاصل ہوتا ہے جبکہ اُن مثلثوں کے رقبے جن کا راس ق ہے واجب علامت کے ساتھ لیے جائیں ؛ مثلاً △ ق ب ج منفی ہوگا اگر ق اور ا ، ب ج کی مخالف جانبوں میں واقع ہوں ۔ ق کو مختلف مقامات پر لینے سے مثلث کے زاویوں کے درمیان مختلف مشہور رشتے حاصل ہوتے ہیں ۔

(۱) فرض کرو کہ ق ، و پر منطبق ہوتا ہے تو متذکرہ صدر رشتہ ہو جاتا ہے

جب ۲ ا + جب ۲ ب + جب ۲ ج = ۴ جب ا جب ب جب ج

کیونکہ زاویے ب و ج ، ج و ا ، ا و ب علی الترتیب ۲ ا ، ۲ ب ، ۲ ج ہیں ۔

(۲) فرض کرو کہ ق، آ پر ہے تو ہمیں رشتہ حاصل ہوتا ہے

جب ½ ا جب ½ (ب + ج) + جب ½ ب جب ½ (ج + ا)

+ جب ½ ج جب ½ (ا + ب) = ۲ جم ½ ا جم ½ ب جم ½ ج

(۳) فرض کرو کہ ق، ۶ پر ہے تو

جب ا جم (ب - ج) + جب ب جم (ج - ا) + جب ج جم (ا - ب)

= ۴ جب ا جب ب جب ج

۱۶۱ ـــــــ دفعہ سابق کا متماثلہ رشتہ جو ایک مستوی میں کے کسی چار نقطوں ا، ب، ج، ق کے باہمی چھ فاصلوں کے درمیان قائم رہتا ہے متعدد شکلوں میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

(۱) مساوات Δ ق ب ج + Δ ق ج ا + Δ ق ا ب = Δ ا ب ج

کو استعمال کرنے اور ان چار مثلثوں میں سے ہر مثلث کے رقبہ کو اس کے ضلعوں کی رقوم میں بیان کرنے سے مطلوبہ رشتہ ایک ایسی شکل میں ملتا ہے جس میں چار جذر المربع شامل ہوتے ہیں۔

(۲) اسی ربط کو منطق شکل میں حاصل کرنا ہو تو زاویوں ب ق ج، ج ق ا، ا ق ب کو علی الترتیب عہ، بہ، جہ سے تعبیر کرو تو چونکہ عہ + بہ + جہ = ۲ π ہمیں حاصل ہوتا ہے

ا - جم² عہ - جم² بہ - جم² جہ + ۲ جم عہ جم بہ جم جہ = ۰

اب جم عہ کی بجائے اس کی قیمت (ق ب² + ق ج² - ب ج²) / ۲ ق ب × ق ج درج کرنے سے اور علیٰ ہذا جم بہ اور جم جہ کی بجائے ان کی متناظر قیمتیں رکھنے سے ہمیں مطلوبہ رشتہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۱۶۲ ـــــــ کسی مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان کوئی عام رشتہ لیکر اس سے دوسرا رشتہ اخذ کیا جا سکتا ہے اگر ان ضلعوں اور

زاویوں کی بجائے مثلث پائیں کے متناظر ضلع اور زاویے رکھے جائیں۔
اِس مثلث کے ضلع اور زاویے دفعہ ۱۵۷ (۱۴) میں دیے گئے ہیں اور اس لیے ہم دیے ہوئے رشتہ میں ا، ب، ج کی بجائے ا جم ا، ب جم ب، ج جم ج اور زاویوں ا، ب، ج، کی بجائے $\pi - ۲\,\text{ا}$، $\pi - ۲\,\text{ب}$، $\pi - ۲\,\text{ج}$ رکھ سکتے ہیں۔

اس استحالہ کی ایک مثال یہ ہے:- ہم رشتہ $\text{ا}^۲ = \text{ب}^۲ + \text{ج}^۲ - ۲\,\text{ب ج جم ا}$ سے واقف ہیں، اس میں متذکرہ صدر اندراجات کرنے سے ہمیں نیا رشتہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}^۲\,\text{جم}^۲\,\text{ا} = \text{ب}^۲\,\text{جم}^۲\,\text{ب} + \text{ج}^۲\,\text{جم}^۲\,\text{ج} + ۲\,\text{ب ج جم ب جم ج جم}\,۲\,\text{ا}$$

استحالہ کے اِس طریقے کی توسیع عمل میں آسکتی ہے اگر ہم ن واں مثلث پائیں لیں جس کے ضلع ہیں

$$(-۱)^{\text{ن}-۱}\,\text{ا جم ا جم}\,۲\,\text{ا جم}\,۴\,\text{ا}\ldots\text{جم}\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{ا}،$$
$$(-۱)^{\text{ن}-۱}\,\text{ب جم ب جم}\,۲\,\text{ب جم}\,۴\,\text{ب}\ldots\text{جم}\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{ب}،$$
$$(-۱)^{\text{ن}-۱}\,\text{ج جم ج جم}\,۲\,\text{ج جم}\,۴\,\text{ج}\ldots\text{جم}\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{ج}،$$

اور جس کے زاویے

$$\tfrac{۱}{۳}(۲^{\text{ن}}+۱)\pi - ۲^{\text{ن}}\,\text{ا}،\quad \tfrac{۱}{۳}(۲^{\text{ن}}+۱)\pi - ۲^{\text{ن}}\,\text{ب}،\quad \tfrac{۱}{۳}(۲^{\text{ن}}+۱)\pi - ۲^{\text{ن}}\,\text{ج}$$

ہیں اگر ن طاق ہے، لیکن

$$-\tfrac{۱}{۳}(۲^{\text{ن}}-۱)\pi + ۲^{\text{ن}}\,\text{ا}،\quad -\tfrac{۱}{۳}(۲^{\text{ن}}-۱)\pi + ۲^{\text{ن}}\,\text{ب}،\quad -\tfrac{۱}{۳}(۲^{\text{ن}}-۱)\pi + ۲^{\text{ن}}\,\text{ج}$$

ہیں اگر ن جفت ہے۔

پس مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان کسی رشتہ

میں ہم ا کی بجائے

(-۱)^ن-۱ ا جم ۱ جم ۲ ۱ . . . جم ۲^ن-۱ ۱

اور زاویہ ۱ کی بجائے ۱/۳ (۲^ن + ۱) π - ۲^ن ۱، یا ۲^ن ۱ - ۱/۳ (۲^ن - ۱) π لکھ سکتے ہیں (بموجب اس کے کہ ن طاق ہو یا جفت) مع دیگر ضلعوں اور زاویوں کی بجائے ان کے تناظر جملوں کے۔

۱۶۳ ـــــ مثلث کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کے درمیان کسی عام رشتہ میں زاویوں ۱، ب، ج کی بجائے علی الترتیب پ ۱ + ق ب + ر ج، ق ۱ + ر ب + پ ج، ر ۱ + پ ب + ق ج لکھا جا سکتا ہے جہاں پ، ق، ر کوئی عدد ہیں ایسے کہ پ + ق + ر کی شکل ۶ ن - ۱ ہے یا ۶ ن + ۲ اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہے : لیکن یہ استحالہ عمل میں آ سکتا ہے بشرطیکہ تمام جیوب کی علامتیں بدل دیجائیں جبکہ پ + ق + ر کی شکل ۶ ن - ۱ ہو اور تمام جیوب التمام کی علامتیں بدل دیجائیں جبکہ پ + ق + ر کی شکل ۶ ن + ۲ ہو۔

یہ مسئلہ ان واقعات سے مستنبط ہوتا ہے کہ پہلی صورت میں زاویوں

۲ ن π - (پ ۱ + ق ب + ر ج)، ۲ ن π - (ق ۱ + ر ب + پ ج)،

۲ ن π - (ر ۱ + پ ب + ق ج)

کا مجموعہ π ہے اور دوسری صورت میں زاویوں

(۲ ن + ۱) π - (پ ۱ + ق ب + ر ج)، (۲ ن + ۱) π - (ق ۱ + ر ب + پ ج)، (۲ ن + ۱) π - (ر ۱ + پ ب + ق ج) کا مجموعہ π ہے

ذو اربعتہ الاضلاعوں کے خواص

۱۶۴ ـــــ فرض کرو کہ ۱ ب ج د ایک محدب ذو اربعتہ الاضلاع

(204)

ہے۔ ضلعوں اب، ب ج، ج د، د ا کو علی الترتیب ا، ب، ج، د سے اور وتروں ا ج، ب د کو علی الترتیب لا، ما سے تعبیر کرو، نیز فرض کرو کہ ا + ج = ۲عہ اور فہ = وتروں کا درمیانی زاویہ۔

ہم ذواربعۃ الاضلاع کے رقبہ س کے لیے ایک جملہ ا، ب، ج، د اور عہ کی رقوم میں معلوم کرینگے۔ چونکہ

ما^{2} = ا^{2} + د^{2} − ۲ ا د جم ا = ب^{2} + ج^{2} − ۲ ب ج جم ج،

اس لیے ا د جم ا − ب ج جم ج = $\frac{1}{2}$ (ا^{2} + د^{2} − ب^{2} − ج^{2})

نیز ا د جب ا + ب ج جب ج = ۲ س

اِن مساواتوں کی تناظر طرفوں کا مربع لو اور جمع کرو تو

ا^{2} د^{2} + ب^{2} ج^{2} − ۲ ا ب ج د جم ۲ عہ = ۴ س^{2} + $\frac{1}{4}$ (ا^{2} + د^{2} − ب^{2} − ج^{2})^{2}

پس ۱۶ س^{2} = ۴ (ا د + ب ج)^{2} − (ا^{2} + د^{2} − ب^{2} − ج^{2})^{2} − ۱۶ ا ب ج د جم^{2} عہ،

یا ۱۶ س^{2} = {(ا + د)^{2} − (ب − ج)^{2}}{(ب + ج)^{2} − (ا − د)^{2}}

− ۱۶ ا ب ج د جم^{2} عہ،

اس لیے س^{2} = (س − ا) (س − ب) (س − ج) (س − د)

− ا ب ج د جم^{2} عہ، .... (۱۹)

جہاں ۲ س = ا + ب + ج + د

اُس ذواربعۃ الاضلاع کی صورت میں جس کے گرد ایک دائرہ

کھینچا جا سکے ہمیں حاصل ہوتا ہے

۲ع = π

اس لیے س۲ = (س - ا) (س - ب) (س - ج) (س - د) ..... (۲۰)

جملہ (۱۹) سے یہ ظاہر ہے کہ وہ ذوار بعتہ الاضلاع جس کے ضلع دیے گئے ہوں بڑے سے بڑے رقبہ والا ہوگا جبکہ ع = ½ π، یعنے جبکہ ذوار بعتہ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا جا سکے۔

مسئلہ (۲۰) کو برہما گپتا (Brahmequpta) نے، جو چھٹی صدی عیسوی میں ایک ہندو جیومیٹر گزرا ہے، دریافت کیا تھا۔

۱۶۵ ــــــ ذوار بعتہ الاضلاع کے رقبہ کے لیے ایسے جملے معلوم کیے جا سکتے ہیں، جن میں وتروں کے طول اور ان کا درمیانی زاویہ شامل ہوں۔

ذوار بعتہ الاضلاع کا رقبہ اُن چار مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے جن میں یہ ذوار بعتہ الاضلاع وتروں سے تقسیم ہوتا ہے۔ اب چونکہ ان میں سے ہر مثلث کا رقبہ

= ½ × وتروں کے اُن دو مقطوعوں کا حاصلِ ضرب جو مثلث کے ضلع ہیں × جب فہ

جہاں فہ، وتروں کا درمیانی زاویہ ہے اس لیے چاروں مثلثوں کے رقبوں کو جمع کرنے سے

س = ½ لا اجب فہ ، . . . . (۲۱)

نیز چونکہ ۲ و ا × و ب جم فہ = و ا۲ + و ب۲ - ا۲،

۲ و ج × و د جم فہ = و ج۲ + و د۲ - ج۲،

۲ و ا × و د جم فہ = د۲ - و ا۲ - و د۲،

۲ و ب × و ج جم فہ = ب۲ - و ب۲ - و ج۲،

اس لیے $\quad ۲\,لا\,ا\,جم\,فہ = ب^۲ + د^۲ - ا^۲ - ج^۲ \quad \ldots \quad (۲۲)$

اس لیے $\quad س = \frac{۱}{۴}(ب^۲ + د^۲ - ا^۲ - ج^۲)\,مس\,فہ\,، \quad \ldots \quad (۲۳)$ (205)

اور فہ کو ساقط کرنے سے ہمیں برٹیشنی ڈر (Bretschneider) کا ضابطہ

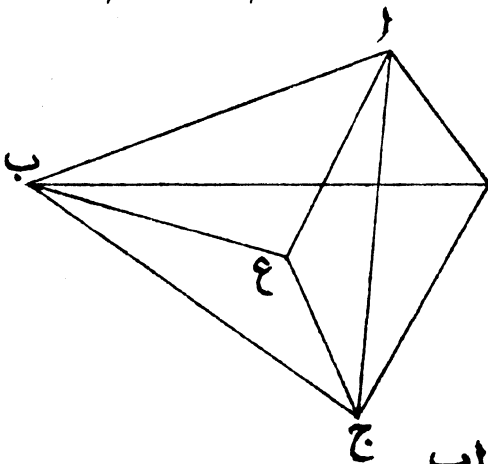
$$س = \frac{۱}{۴}\left\{۴\,لا^۲\,ا^۲ - (ب^۲ + د^۲ - ا^۲ - ج^۲)^۲\right\}^{\frac{۱}{۲}}\,، \quad \ldots \quad (۲۴)$$

حاصل ہوتا ہے جو ذواربعۃ الاضلاع کے رقبہ کو ضلعوں اور وتروں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

اگر ذواربعۃ الاضلاع میں ایک دائرہ بنایا جاسکے تو ا + ج = ب + د، اس لیے ضابطے (۲۳) اور (۲۴) ہو جاتے ہیں

$$س = \frac{۱}{۲}(ا\,ج - ب\,د)\,مس\,فہ\,،$$

اور $\quad س = \frac{۱}{۲}\left[لا^۲\,ا^۲ - (ا\,ج - ب\,د)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}$

۱۶۶ — ذواربعۃ الاضلاع کے وتروں کے حاصل ضرب کے لئے ایک جملہ، ضلعوں اور دو متقابلہ زاویوں کے حاصل جمع کی جیب التمام کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے۔

ب اور ج سے خطوط مستقیم ب ع اور ج ع کھینچو ایسے کہ زاویے ج ب ع، ب ج ع علی الترتیب زاویوں ا ب د، ا د ب کے مساوی ہوں، مثلث ع ج ب، ا ب د متشابہ ہیں، اس لئے

$$\frac{ا\,د}{ج\,ع} = \frac{ب\,د}{ج\,ب} = \frac{ا\,ب}{ب\,ع}$$

اس طرح ا د × ج ب = ب د × ج ع

نیز چونکہ زاوئے ج ب د، ا ب ع مساوی ہیں اور

ا ب : ب ع = ب د : ب ج

اس لیے مثلث ا ب ع، ج ب د متشابہ ہیں اور اس لیے

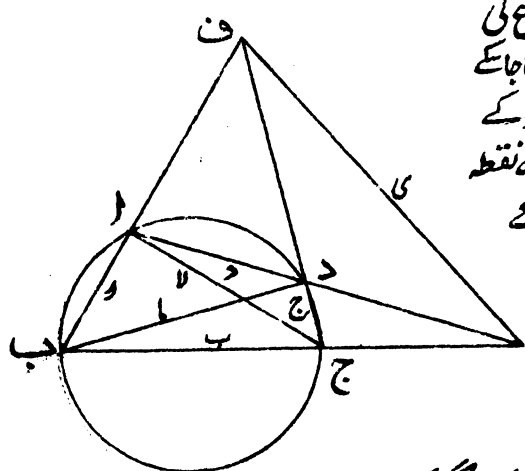
ا ب × ج د = ب د × ا ع

اب چونکہ ا ج^2 = ا ع^2 + ع ج^2 − ۲ ا ع × ع ج جم (ا+ج)

اس لیے ب د^2 سے ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

لا^2 ما^2 = ا^2 ج^2 + ب^2 د^2 − ۲ ا ب ج د جم ۲ عہ، . . . (۲۵)

اگر ۲ عہ = π تو ٹولمی کا مسئلہ لا ما = ا ج + ب د حاصل ہوتا ہے۔ جو ایسے ذو اربعۃ الاضلاع کے لیے صحیح ہے۔ جو ایک دائرہ کے اندر کھینچا جا سکے۔

اگر ۲ عہ = $\frac{1}{2}$ π تو لا^2 ما^2 = ا^2 ج^2 + ب^2 د^2 جو ایسے ذو اربعۃ الاضلاع کے لیے صحیح ہے جس میں دو متقابلہ زاویوں کا حاصل جمع ایک زاویہ قائمہ ہو۔

۱۶۷۔ اُس ذو اربعۃ الاضلاع کی صورت میں جو ایک دائرہ کے اندر کھینچا جا سکے وتروں لا، ما کے اور اُس تیسرے وتر کے طولوں کو جو ضلعوں ا اور ج کے نقطہ تقاطع کو ضلعوں ب اور د کے نقطہ تقاطع سے ملانے سے بنتا ہے ضلعوں کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ تیسرا وتر ف گ ہے اور ا ج، ب د، ف گ کے طول علی الترتیب لا، ما، ی سے تعبیر ہوتے

ہیں ۔ تب چونکہ

$$\text{لا}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - 2\,\text{ا ب جم ب}،$$

اور

$$\text{لا}^2 = \text{ج}^2 + \text{د}^2 - 2\,\text{ج د جم د}،$$

اس لیے

$$\text{لا}^2\left(\frac{1}{\text{ا ب}} + \frac{1}{\text{ج د}}\right) = \frac{\text{ا}^2+\text{ب}^2}{\text{ا ب}} + \frac{\text{ج}^2+\text{د}^2}{\text{ج د}}$$

پس

$$\text{لا}^2 = (\text{ا ج} + \text{ب د})(\text{ا د} + \text{ب ج}) \big/ (\text{ا ب} + \text{ج د})، \quad \ldots (26)$$

اور اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ

$$\text{ما}^2 = (\text{ا ج} + \text{ب د})(\text{ا ب} + \text{ج د}) \big/ (\text{ا د} + \text{ب ج})،$$

نیز چونکہ

(207)

$$\text{ف ا} = \text{ا د}\,\frac{\text{جب د}}{\text{جب (ا + د)}} = \frac{\text{د لا}}{\text{ما جم د + لا جم ا}}$$

اور اسی طرح

$$\text{ف ب} = \frac{\text{ب ما}}{\text{ما جم د + لا جم ا}}$$

اس لیے

$$\frac{\text{ف ا}}{\text{د لا}} = \frac{\text{ف ب}}{\text{ب ما}} = \frac{\text{ف ب - ف ا}}{\text{ب ما - د لا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب ما - د لا}}$$

پس

$$\text{ف ا} \times \text{ف ب} = \frac{\text{ا}^2\,\text{ب د لا ما}}{(\text{ب ما - د لا})^2}؛$$

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے

$$\text{گ ج} \times \text{گ ب} = \frac{\text{ب}^2\,\text{ا ج لا ما}}{(\text{ا ما - ج لا})^2}$$

اب چونکہ ف گ پر کا مربع، ف اور گ سے دائرہ تک کھینچے ہوئے مماسوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے (دیکھو Mc Dowell's *Geometry* صفحہ ۹۲) اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ی}^2 = \text{لا ما}\left\{\frac{\text{ا}^2\,\text{ب د}}{(\text{ب ما - د لا})^2} + \frac{\text{پ}^2\,\text{ا ج}}{(\text{ا ما - ج لا})^2}\right\}$$

اب لا^2 اور ما^2 کی اُن قیمتوں سے جو اوپر حاصل ہو چکی ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا د} + \text{ب ج}} = \frac{\text{ما}}{\text{ا ب} + \text{ج د}} = \frac{\text{ب ما} - \text{د لا}}{\text{ا}(\text{ب}^2 - \text{د}^2)} = \frac{\text{ا ما} - \text{ج لا}}{\text{ب}(\text{ا}^2 - \text{ج}^2)}$$

اس لیے ی^2 کے مندرجہ بالا جملہ میں اندراج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ی}^2 = (\text{ا د} + \text{ب ج})(\text{ا ب} + \text{ج د})\left\{\frac{\text{ب د}}{(\text{ب}^2 - \text{د}^2)^2} + \frac{\text{ا ج}}{(\text{ا}^2 - \text{ج}^2)^2}\right\} \quad \ldots(۲۷)$$

مثالیں

(۱) اگر ذوارابعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ہے

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{(\text{ا ب} + \text{ج د})(\text{ا ج} + \text{ب د})(\text{ا د} + \text{ب ج})}{(\text{س} - \text{ا})(\text{س} - \text{ب})(\text{س} - \text{ج})(\text{س} - \text{د})}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(۲) ثابت کرو کہ نصف قطر ر کے دائرہ کے مرکز اور اس دائرہ کے اندر کھینچے ہوئے ایک ذوارابعۃ الاضلاع کے وتروں کے نقطۂ تقاطع کے درمیان فاصلہ ہے

$$\frac{\text{ر}}{(\text{ا ب} + \text{ج د})(\text{ا د} + \text{ب ج})}\left[(\text{ا ج} + \text{ب د})\left\{\text{ا ج}(\text{ب}^2 - \text{د}^2)^2 + \text{ب د}(\text{ا}^2 - \text{ج}^2)^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(۳) ثابت کرو کہ ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذوارابعۃ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے سے ذیل کے زاویہ پر ملتے ہیں

$$\text{جم}^{-1}\frac{(\text{ا}^2 + \text{ج}^2) - (\text{ب}^2 + \text{د}^2)}{2(\text{ا ج} + \text{ب د})} \text{ ، یا } 2\,\text{مس}^{-1}\left\{\frac{(\text{س} - \text{ب})(\text{س} - \text{د})}{(\text{س} - \text{ا})(\text{س} - \text{ج})}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

اور نیز ثابت کرو کہ ایک وتر کے مقطوعوں کا حاصل ضرب ہے

$$\frac{\text{ا ب ج د}(\text{ا ج} + \text{ب د})}{(\text{ا ب} + \text{ج د})(\text{ا د} + \text{ب ج})}$$

(۴) اگر ایک ذوار بعتہ الاضلاع ایک دائرہ میں کھینچا جائے اور اس کا رقبہ س ہو تو ثابت کرو کہ متقابلہ ضلعوں کے نقاط وسطی کو ملانے والے خطوط مستقیم زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\left\{ \frac{۴\,\text{س}}{(\text{ب}^۲ - \text{د}^۲)(\text{ا}^۲ - \text{ج}^۲)} \times \frac{(\text{ا د} + \text{ب ج})(\text{ا ب} + \text{ج د})}{\text{ا ج} + \text{ب د}} \right\}$$

پر ملتے ہیں۔

(208) (۵) اگر ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذوار بعتہ الاضلاع کے تین وتروں میں سے دو دو کے نقاطِ تقاطع ع، ف، گ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث ع ف گ کے رقبہ کو ذوار بعتہ الاضلاع کے رقبہ سے نسبت ہے

$$\text{ا}^۲\,\text{ب}^۲\,\text{ج}^۲\,\text{د}^۲ : (\text{ا}^۲\,\text{ب}^۲ - \text{ج}^۲\,\text{د}^۲)(\text{ا}^۲\,\text{د}^۲ - \text{ب}^۲\,\text{ج}^۲)$$

(۶) ثابت کرو کہ ایک ذوار بعتہ الاضلاع کا رقبہ جس کے اندر ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے

$\sqrt{\text{ا ب ج د}}\ \text{جب}\ \frac{۱}{۲}(\text{ا} + \text{ج})$ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ $\sqrt{\text{ا د}}\ \text{جب}\ \frac{۱}{۲}\,\text{ا} = \sqrt{\text{ب ج}}\ \text{جب}\ \frac{۱}{۲}\,\text{ج}$

(۷) اگر چار خطوطِ مستقیم دیئے جائیں تو اِن سے تین جداگانہ ذوار بعتہ الاضلاع بنائے جا سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک، ایک دائرہ میں کھینچا جا سکتا ہے۔ ان کے رقبے مساوی ہوتے ہیں؛ اِن کے وہ چھ وتر جو دائرہ کے اندر متقاطع ہوتے ہیں زوج زوج مساوی ہوتے ہیں؛ اور اگر اِن خطوں کے طول عہ، بہ، جہ ہوں اور مشترک رقبہ س اور دائرہ کا نصف قطر ر ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ر} = \frac{\text{عہ بہ جہ}}{۴\,\text{س}}$$

(۸) دو مثلثوں کے رقبوں کا فرق جن کے قاعدے ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے ضلع ب، د ہیں اور جن کے راس ذوار بعتہ الاضلاع کے وتروں کے نقطۂ تقاطع پر منطبق ہوتے ہیں حسب ذیل ہوگا

$$\frac{۱}{۴}\sqrt{۴\,\text{ا}^۲\,\text{ج}^۲ - (\text{ل}^۲ + \text{م}^۲ - \text{ب}^۲ - \text{د}^۲)^۲}$$

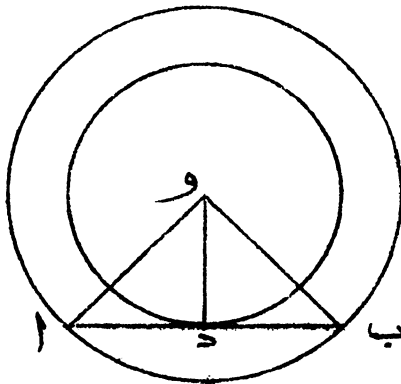
(۹) اگر ایک ذوار بعتہ الاضلاع ایسا ہو کہ وہ سب مستطیل جو اس کے گرد کھینچے جا سکتے ہیں متشابہ ہیں، تو ثابت کرو کہ $ا^2 + ج^2 = ب^2 + د^2$

(۱۰) ایک ذوار بعتہ الاضلاع ایسا ہے کہ ایک دائرہ اس کے گرد کھینچا جا سکتا ہے اور دوسرا اس کے اندر؛ ثابت کرو کہ اس دوسرے دائرہ کا نصف قطر $\frac{2\sqrt{ا ب ج د}}{ا + ب + ج + د}$ ہے۔

(۱۱) اگر ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے وتر نقطہ ق پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ

رقبہ ا و ب × رقبہ ا ب ج د = رقبہ ا ب ج × رقبہ ا ب د

منتظم کثیر الاضلاعوں کے خواص

۱۶۸ ــــــــ فرض کرو کہ و، اُن دائروں کا مرکز ہے جو ن ضلعوں والے ایک منتظم کثیر الاضلاع کے گرد اور اس کے اندر کھینچے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قبل الذکر دائرہ کا نصف قطر ر ہے اور مابعد الذکر دائرہ کا نصف قطر ر، اور فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کا طول ا ہے۔

(209) اگر کثیر الاضلاع کا ایک ضلع اب ہو اور اندرونی دائرہ کے ساتھ اس کا نقطہ تماس د ہو تو زاویہ ا و ب = $\frac{۲\pi}{ن}$ اور زاویہ ا و د = $\frac{\pi}{ن}$ پس

$$ل = ۲ ر \text{ جب } \frac{\pi}{ن} = ۲ ر_۱ \text{ مس } \frac{\pi}{ن} \quad \ldots\ldots (۲۸)$$

اس طرح دائروں کے نصف قطر معلوم ہو جاتے ہیں اگر ایک ضلع ل دیا گیا ہو۔ مثلث و ا ب کا رقبہ ہے

$$\frac{۱}{۲} ر^۲ \text{ جب } \frac{۲\pi}{ن} \text{، یا } \frac{۱}{۲} ل ر_۱ \text{ یا } ر_۱^۲ \text{ مس } \frac{\pi}{ن}$$

اس لیے کثیر الاضلاع کا رقبہ

$$\frac{۱}{۲} ن ر^۲ \text{ جب } \frac{۲\pi}{ن} \text{، یا } ن ر_۱^۲ \text{ مس } \frac{\pi}{ن} \text{،} \quad \ldots (۲۹)$$

یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ ایک دائرہ کے اندر یا گرد ن ضلعوں والے منتظم کثیر الاضلاع کے کھینچنے کا سوال زاویہ $\frac{\pi}{ن}$ کے دائری تفاعلوں کی تعیین کے سوال میں تحویل ہوتا ہے۔

۱۶۹ ـــــ مثالیں

(۱) ایک مثلث کے ضلعوں ل، ب، ج کو قطر مانکر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس دائرہ کا قطر ق جو اِن تین دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے ایسا ہے کہ

$$\sqrt{\frac{ق}{س-ل} - ۱} + \sqrt{\frac{ق}{س-ب} - ۱} + \sqrt{\frac{ق}{س-ج} - ۱} = \sqrt{\frac{س}{ق-س}}$$

اگر دیئے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی د، ع، ف ہوں اور اُس دائرہ کا مرکز و ہو جس کا قطر ق ہے تو

$$\text{ود} = \frac{1}{2}(\text{ق} - \text{ا})\text{، وع} = \frac{1}{2}(\text{ق} - \text{ب})\text{، وف} = \frac{1}{2}(\text{ق} - \text{ج})$$

نیز مثلث دع ف کے ضلع $\frac{1}{2}$ ا، $\frac{1}{2}$ ب، $\frac{1}{2}$ ج ہیں، پس رشتہ

$$\Delta\,\text{وع ف} + \Delta\,\text{وف د} + \Delta\,\text{ود ع} = \Delta\,\text{دع ف}$$

میں مثلثوں کے رقبوں کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کرنے سے مطلوبہ رشتہ حاصل ہو جاتا ہے۔

(۲) ایک نقطہ پ سے مثلث اب ج کے ضلعوں پر عمود پ ل، پ م، پ ن کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ل م ن کا رقبہ ہے

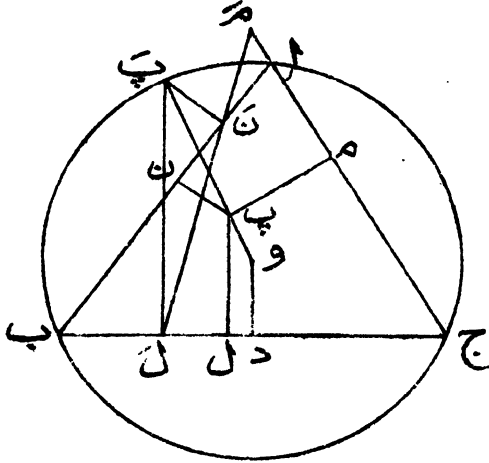
$$\frac{1}{2}(\text{ر}^2 - \text{ف}^2)\ \text{جب ا جب ب جب ج}$$

جس میں ف سے وہ فاصلہ مُراد ہے جو پ اور حائط دائرہ کے مرکز کے درمیان ہے۔

و پ کو خارج کرو تاکہ وہ حائط دائرہ سے نقطہ پَ پر ملے، پَ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود پَ لَ، پَ مَ، پَ نَ کھینچو تو اِن کے پائیں ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جس کو اس مثلث کے لحاظ سے پَ کا خطِ پائیں کہتے ہیں۔ ایک نقطہ سے ایک مثلث کے ضلع پر جو عمود کھینچا جائے وہ مثبت شمار ہوتا ہے اگر نقطہ اسی جانب واقع ہو جس جانب ضلع کے مقابل کا زاویہ واقع ہے اور منفی شمار ہوتا ہے اگر نقطہ مذکورہ بالا جانب کے مقابل واقع ہو۔

اب ہمیں حاصل ہوتا ہے $\dfrac{\text{پ ل} - \text{ود}}{\text{پَ لَ} - \text{ود}} = \dfrac{\text{وپ}}{\text{وپَ}} = \dfrac{\text{ف}}{\text{ر}}$ (210)

$$\text{اس لیے}\quad \text{پ ل} = (\text{ر} - \text{ف})\,\text{جم ا} + \frac{\text{ف}}{\text{ر}}\,\text{پَ لَ}$$

اسی طرح پ م، پ ن کے لیے متشابہ جملے ملتے ہیں۔ اب

$$2\Delta\,\text{ل م ن} = \text{پ م} \times \text{پ ن جب ا} + \text{پ ن} \times \text{پ ل جب ب} + \text{پ ل} \times \text{پ م جب ج}$$

= (ر - ف)² ح جب ا جم ب جم ج + ف/ر ح پَ مَ × پَ نَ جب ا

+ ف/ر (ر - ف) ح پَ لَ جب ا

نیز ½ ح پَ مَ × پَ نَ جب اَ شلث لَ مَ نَ کا رقبہ ہے. جو صفر ہے اور

ح پَ لَ جب ا = ½ ح ا × پَ لَ = ½ ح ۵ پَ ب ج = ½ ۵ ا ب ج

اور ح جب ا جم ب جم ج = جب ا جب ب جب ج

پس ۵ ۲ ل م ن = (ر - ف)² جب ا جب ب جب ج + ۲ ف (ر - ف) جب ا

× جب ب جب ج = (ر² - ف²) جب ا جب ب جب ج

(۳) اگر ا، ب، ج کوئی تین ثابت نقطے ہوں اور پ کوئی نقطہ ایک دائرہ پر ہو جس کا مرکز و ہے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ پر پ کے تمام مقامات کے لیے

اپ² × ۵ ب و ج + ب پ² × ۵ ج و ا + ج پ² × ۵ ا و ب

مستقل ہے۔

زاویوں ب و ج، ج و ا، ا و ب کو عہ، بہ، جہ سے تعبیر کرو تو عہ + بہ + جہ = ۲ ط، فرض کرو کہ زاویہ پ و ا = ط۔ اب چونکہ

$$ا پ^2 = و پ^2 + و ا^2 - ۲ و ا \times و پ \ جم ط$$

مع ب پ^۲، ج پ^۲ کے لیے تشابہ جملوں کے، اس لیے مندرجہ بالا جملہ

$$= و پ^2 \times \Delta ا ب ج + \Sigma و ا^2 \times \Delta ب و ج - ۲ و پ \ \Sigma \ و ا \times \Delta ب و ج \ جم ط$$

(211) اس جملہ کی پہلی دو رقمیں، دائرہ پر پ کے محل پر منحصر نہیں ہیں اور آخری رقم میں ۲ و پ کا مضروب ہے

$$\frac{1}{۲} و ا \times و ب \times و ج \{ جم ط \ جب \ عہ + جم (ط + جہ) جب \ بہ + جم (بہ - ط) جب \ جہ \}$$

$$\text{یا} \ \frac{1}{۲} و ا \times و ب \times و ج \ جم ط \ (جب \ عہ + جب \ بہ \ جم \ جہ + جم \ بہ \ جب \ جہ)$$

اور یہ جملہ صفر ہے، اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اس مسئلہ کی مخصوص صورتیں حسب ذیل ہیں :۔

(ا) $پ ا^2 جب ۲ ا + پ ب^2 جب ۲ ب + پ ج^2 جب ۲ ج$ مستقل ہے جبکہ پ، حائط دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

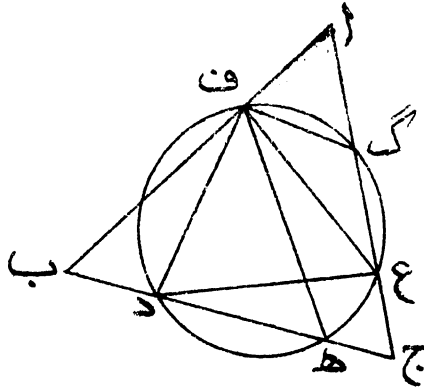
(ب) $پ ا^2 جب ا + پ ب^2 جب ب + پ ج^2 جب ج$ مستقل ہے جبکہ پ، اندرونی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

(ج) $پ ا^2 جب ا \ جم (ب - ج) + پ ب^2 جب ب \ جم (ج - ا) + پ ج^2 جب ج \ جم (ا - ب)$ مستقل ہے جبکہ پ، نو نقطی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ اُس اقل تساوی الاضلاع مثلث کے ضلع کا طول

$$\frac{۲ \sqrt{۲} \Delta}{\sqrt{ا^2 + ب^2 + ج^2 + ۴\sqrt{۳} \Delta}}$$

ہے جو ایک دیے ہوئے مثلث ا ب ج کے اندر کھینچا جا سکے اس طور پر کہ اس کے راس دیے ہوئے مثلث کے ضلعوں پر واقع ہوں، جملہ بالا میں ∆ سے مثلث ا ب ج کا رقبہ مُراد ہے۔

فرض کرو کہ ایسا متساوی الاضلاع مثلث د ع ف ہے اور فرض کرو کہ د ع ف کا حائط دائرہ ب ج اور ا ج کو علی الترتیب ھ اور گ میں قطع کرتا ہے، زاویوں ف گ ا، ف ھ ب میں سے ہر ایک ۶۰° ہے، اور اس لیے ف گ، ف ھ ثابت سمتوں میں ہیں؛ نیز زاویہ ھ ف گ = ۱۲۰° - ج

اگر ا ف کو لا سے تعبیر کریں تو

$$ف گ = \frac{لا جب ا}{جب ۶۰°}،\quad ف ھ = (ج - لا)\frac{جب ب}{جب ۶۰°}$$

اس لیے

$$ھ گ^۲ = قم^۲ ۶۰° \{لا^۲ جب^۲ ا + (ج - لا)^۲ جب^۲ ب - ۲ لا (ج - لا)$$
$$\times جب ا جب ب جم (۱۲۰° - ج)\}$$

اب دائرہ کا نصف قطر ہے ہ گ \ ۲ جب (۱۲۰° - ج)، پس دائرہ اقل ہوگا جبکہ ہ گ اقل ہو۔ اب کسی دو درجی جملہ $\text{لہ لا}^2 + 2\,\text{مہ لا} + \text{نہ}$ کی اقل قیمت $\text{نہ} - \frac{\text{مہ}^2}{\text{لہ}}$ ہے (جہاں لہ مثبت ہے) کیونکہ $\text{لہ لا}^2 + 2\,\text{مہ لا} + \text{نہ}$ اس شکل $\text{لہ}\left(\text{لا} + \frac{\text{مہ}}{\text{لہ}}\right)^2 + \text{نہ} - \frac{\text{مہ}^2}{\text{لہ}}$ میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے ہ گ جب ۶۰° کی اقل قیمت کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے (212)

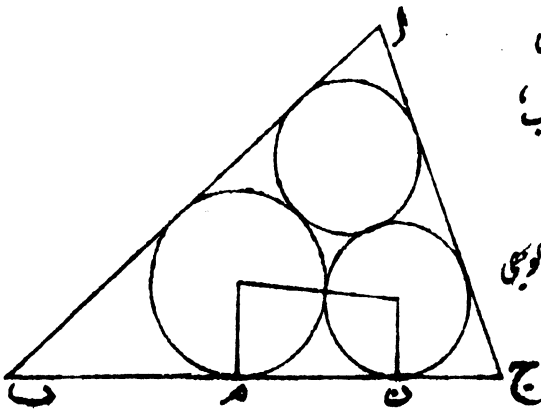
$$\left[\text{ج}^2\,\text{جب}^2\,\text{ب} - \frac{\{\text{ج جب}^2\,\text{ب} + \text{ج جب ا جب ب جم}\,(120^\circ - \text{ج})\}^2}{\text{جب}^2\,\text{ا} + \text{جب}^2\,\text{ب} + 2\,\text{جب ا جب ب جم}\,(120^\circ - \text{ج})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\text{ج جب ا جب ب جب}\,(120^\circ - \text{ج})}{\{\text{جب}^2\,\text{ا} + \text{جب}^2\,\text{ب} + 2\,\text{جب ا جب ب جم}\,(120^\circ - \text{ج})\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\text{ج}^2\,\text{جب ا جب ب جب}\,(120^\circ - \text{ج})}{\text{جب ج}\,\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 + 4\sqrt{3}\,\Delta}}$$

اب متساوی الاضلاع کا ضلع ہے ہ گ جب ۶۰° \ جب (۱۲۰° - ج)، پس اس ضلع کی اقل قیمت ہے

$$\frac{2\sqrt{2}\,\Delta}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 + 4\sqrt{3}\,\Delta}}$$

(۵) تین دائرے بناؤ جو باہم مس کریں اور ان میں سے ہر ایک ایک دیے ہوئے مثلث کے دو ضلعوں کو بھی مس کرے۔

فرض کرو کہ دائروں کے نصف قطر غ۱، غ۲، غ۳ ہیں، تب م ن = ۲ √(غ۲ غ۳)

اس لیے ا = ب م + ج ن + م ن = غ۲ مم $\tfrac{1}{2}$ ب + غ۳ مم $\tfrac{1}{2}$ ج + ۲ √(غ۲ غ۳)

مع ب اور ج کے لیے متشابہ جملوں کے۔

فرض کرو لا² = غ۱ مم $\tfrac{1}{2}$ ا، ما² = غ۲ مم $\tfrac{1}{2}$ ب، ی² = غ۳ مم $\tfrac{1}{2}$ ج،

√(مس $\tfrac{1}{2}$ ب مس $\tfrac{1}{2}$ ج) = – جم عہ، √(مس $\tfrac{1}{2}$ ج مس $\tfrac{1}{2}$ ا) = – جم بہ، √(مس $\tfrac{1}{2}$ ا مس $\tfrac{1}{2}$ ب) = – جم جہ

تو جب² عہ = ۱ – مس $\tfrac{1}{2}$ ب مس $\tfrac{1}{2}$ ج = ا/س، اور اسی طرح جب² بہ = ب/س، جب² جہ = ج/س

اس لیے ہمیں مساواتیں ملتی ہیں

س = (ما² + ی² – ۲ ما ی جم عہ) / جب² عہ = (ی² + لا² – ۲ ی لا جم بہ) / جب² بہ = (لا² + ما² – ۲ لا ما جم جہ) / جب² جہ

(213) یہ مساواتیں دفعہ ۶۸ مثال (۱۲) میں زیر بحث آچکی ہیں؛ اس میں جو پہلا حل حاصل ہوا تھا اس کے لینے سے

لا = √س جم (شہ – عہ)، ما = √س جم (شہ – بہ)، ی = √س جم (شہ – جہ)

جہاں ۲ شہ = عہ + بہ + جہ۔ اس لیے غ۱ = س مس $\tfrac{1}{2}$ ا جم² (شہ – عہ)،

غ۲ = س مس $\tfrac{1}{2}$ ب جم² (شہ – بہ)، غ۳ = س مس $\tfrac{1}{2}$ ج جم² (شہ – جہ)

دائروں کے مطلوبہ نصف قطر ہیں۔ محولہ بالا مثال کے دوسرے حلوں سے دائروں کے تین جٹوں کے نصف قطر ملتے ہیں؛ یہ دائرے ایسے ہیں کہ ہر جٹ میں سے دو دائرے مثلث کے دو محدودہ ضلعوں کو مس کرتے ہیں؛ ایک ایسے ہی جٹ کے نصف قطر ہیں

س مس $\tfrac{1}{2}$ ا جم² س، س مس $\tfrac{1}{2}$ ب جم² (س – جہ)، س مس $\tfrac{1}{2}$ ج جم² (س – بہ)

پس دائروں کے کل آٹھ جٹ ہیں جو دیے ہوئے مسئلہ کی شرطوں کو پورا کرتے ہیں۔

مندرجہ بالا حل لشیمز (Lechmütz) کے حل سے لیا گیا جو *Nouvelles Annales* کی جلد پنجم میں درج ہے۔ اس مسئلہ کا ہندسی حل، جو مال فیٹی کے مسئلہ کے طور پر مشہور ہے، کیسی (Casey) کی *Sequel to Euclid* میں ملیگا اور اس پر ایک تاریخی مضمون ایم یمنس کا لکھا ہوا Bulletin de L'Academie Royale de Belgigue بابتہ ۱۸۹۶ء میں ملیگا۔

بارہویں باب پر مثالیں

۱۔ ایک متوازی الاضلاع کے ضلع ا، ب زاویہ عہ پر ایک دوسرے سے مائل ہیں اور اس کے وتروں کا درمیانی زاویہ ط ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{\text{۲ ا ب جب عہ}}{\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲}$$

۲۔ اگر ایک مثلث کے راسوں سے اس کے اندرونی دائرہ کے نقاط تماس کے فاصلے عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ر} = \left(\frac{\text{عہ بہ جہ}}{\text{عہ + بہ + جہ}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

۳۔ ایک دائرہ کے اندر ایک منتظم کثیر الاضلاع اور اس کے گرد اتنے ہی ضلعوں والا دوسرا منتظم کثیر الاضلاع کھینچے گئے ہیں۔ قبل الذکر کثیر الاضلاع کے رقبہ کو مابعد الذکر کے رقبہ کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ۳ : ۴ ہے۔ ضلعوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۔ ایک متوازی الاضلاع کے ہر زاویہ سے ایک ایک خط اس طرح کھینچا گیا ہے کہ یہ خطوط ایک ہی ترتیب میں متصل ضلعوں کے ساتھ ایک ہی جانب مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ خطوط ایک دوسرا متوازی الاضلاع بنائینگے جو ابتدائی متوازی الاضلاع کے متشابہ ہوگا اگر $\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲ = \text{۲ ا ب جم ب}$ جہاں ا، ب ضلع ہیں اور متوازی الاضلاع کا زاویہ ب ہے۔

۵۔ وہ خطوطِ مستقیم جو ایک مثلث کے زاویوں ا، ج کی تنصیف

ملے Malfatte

کرتے ہیں حائط دائرہ کے محیط سے نقطوں عہ، جہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم عہ جہ، ج ب اور ب ا سے تین حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں نسبت ہے

جب² ½ ا : ۲ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ ج : جب² ½ ج

۶۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو اور اس کے ضلعوں پر عمود آ ا، آ ب، آ ج ہوں اور ذوالعبتہ الاضلاعوں ا ب آ ج، ب ج آ ا، ج ا آ ب کے اندرونی دائروں کے نصف قطر غہ₁، غہ₂، غہ₃ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{غہ_۱}{ر - غہ_۱} + \frac{غہ_۲}{ر - غہ_۲} + \frac{غہ_۳}{ر - غہ_۳} = \frac{ا + ب + ج}{۲ ر}$$

۷۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط دائرہ اور اندرونی دائرہ کے مرکزوں کو ملانیوالا خط ضلع ب ج کے ساتھ زاویہ $\text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{جب ب} - \text{جب ج}}{\text{جم ب} + \text{جم ج} - ۱}\right)$ بناتا ہے۔

۸۔ اگر ایک مثلث میں اس کے دو زاویوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمودوں کے پائیں اِن ضلعوں کے نقاط وسطی سے متساوی الفصل ہوں تو ثابت کرو کہ تیسرا زاویہ °۶۰ ہے یا °۱۲۰، ورنہ مثلث متساوی الساقین ہے۔

۹۔ اگر ا ب ج ایک مثلث ہو جس کا زاویہ ج قائمہ ہے اور ا ب پر عمود وار خطوط مستقیم ا ع، ب د کھینچے جائیں جو ب ج، ا ج ممدودہ کو علی الترتیب ع، د پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ مس ج ع د = مس³ ب ا ج، اور

$$\triangle ع ج د = \triangle ا ج ب$$

۱۰۔ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ لیا جائے ایسا کہ راسوں سے اس کے فاصلے ایک دوسرے مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج کے

متناسب ہوں تو ثابت کرو کہ اِن فاصلوں کے درمیانی زاویے ہونگے

$$\tfrac{1}{3}\pi+\text{ا}،\quad \tfrac{1}{3}\pi+\text{ب}،\quad \tfrac{1}{3}\pi+\text{ج}$$

۱۱- اُن چار دائروں میں سے جو ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرتے ہیں ہر ایک دائرہ کے نقاط تماس ملائے گئے ہیں؛ اندرونی دائرہ سے اس طور پر جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ اُن مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ سے تفریق کیا گیا ہے جو جانبی دائروں سے مذکورالصدر طریقہ پر حاصل ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ حاصل تفریق اصلی مثلث کے رقبہ کا دُگنا ہے۔

۱۲- اگر ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہو اور اُس کے اندر کوئی نقطہ پ تو ثابت کرو کہ

$$\triangle\,\text{اپ ج}\times\text{مم اپ ج}-\triangle\,\text{ب پ د}\times\text{مم ب پ د}$$

پ کے محل پر منحصر نہیں ہے۔

۱۳- تین دائروں کو جو ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں ایک چوتھا دائرہ مس کرتا ہے جس کے اندر یہ سب دائرے ہیں۔ اگر اندرونی تین دائروں کے نصف قطر اِ، بِ، جِ ہوں اور اِن کے مرکزوں کے فاصلے بیرونی دائرہ کے مرکز سے علی الترتیب عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$2\left(\frac{\text{بہ جہ}}{\text{بِ جِ}}+\frac{\text{جہ عہ}}{\text{جِ اِ}}+\frac{\text{عہ بہ}}{\text{اِ بِ}}\right)=4+\frac{\text{عہ}^2}{\text{اِ}^2}+\frac{\text{بہ}^2}{\text{بِ}^2}+\frac{\text{جہ}^2}{\text{جِ}^2}$$

۱۴- ایک مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب میں علی الترتیب نقطے پ، ق، ر ہیں ایسے کہ $\frac{\text{ب پ}}{\text{پ ج}}=\frac{\text{ج ق}}{\text{ق ا}}=\frac{\text{ا ر}}{\text{ر ب}}$، ثابت کرو کہ $\text{اپ}^2+\text{بق}^2+\text{جر}^2$ اقل ہوگا جبکہ پ، ق، ر، ضلعوں کی تنصیف کریں۔

۱۵- ایک مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج پر مثلث کے بیرونی جانب قطاع دائرے کھینچے گئے ہیں جن کے اندر علی الترتیب زاویے عہ، بہ، جہ بنتے ہیں، اور عہ + بہ + جہ = π، ان دائروں کے مرکزوں کو ملا کر ایک مثلث بنایا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ اس مثلث کے زاوئے ع، ب، ج ہیں۔

(215) ۱۶۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے مقابل کے زاویوں کے ناصفوں پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان سے ایک دوسرا مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ اُس مستطیل کے رقبہ کا چوتھائی ہے جس کے متصلہ اضلاع قبل الذکر مثلث کا گھیرا اور اس کے حائط دائرہ کا نصف قطر ہیں۔

۱۷۔ مثلث ا ب ج کے مستوی میں ایک نقطہ پ ہے اور اس نقطہ سے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائین ل، م، ن ہیں۔ اگر م ن + ن ل + ل م مستقل ہو اور ل کے مساوی ہو تو
ثابت کرو کہ $پ ا^2 + پ ب^2 + پ ج^2$ کی اقل قیمت ہے

$$\frac{ل^2}{جب^2 ا + جب^2 ب + جب^2 ج}$$

۱۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کے متوازی علی الترتیب $ر_1$، $ر_2$، $ر_3$ فاصلوں پر خطوط مستقیم بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ کھینچے گئے ہیں۔ مثلث اَ بَ جَ کا رقبہ معلوم کرو۔

اگر ایسے آٹھ مثلث بنائے جائیں تو ان کے گھیروں کا اوسط مثلث ا ب ج کے گھیرے کے مساوی ہوتا ہے لیکن اِن کے رقبوں کا اوسط مثلث ا ب ج کے رقبہ سے بقدر

$$\frac{ا^2 ر_1^2 + ب^2 ر_2^2 + ج^2 ر_3^2}{۴ \triangle}$$

کے بڑا ہوتا ہے۔

۱۹۔ ایک مختلف الاضلاع مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو قاعدے مانکر متشابہ تساوی الساقین مثلث بنائے گئے ہیں ایسے کہ یا تو سب کے سب اندرونی جانب ہیں یا سب کے سب بیرونی جانب۔ اِن تساوی الساقین مثلثوں کے راسوں کو ملاکر ایک نیا مثلث اَ بَ جَ بنایا گیا ہے۔ اگر اَ بَ جَ تساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ تساوی الساقین مثلثوں کے

قاعدوں پر کے زاویوں میں سے ہر ایک ۳۰° ہے لیکن اگر اَ بَ جَ، مثلث ا ب ج کے متشابہ ہو تو اِن زاویوں میں سے ہر ایک $مس^{-۱} \frac{۴ Δ}{ا^۲ + ب^۲ + ج^۲}$ ہے جہاں Δ سے مثلث ا ب ج کا رقبہ مُراد ہے۔

۲۰۔ ایک خطِ مستقیم تین ہم مرکز دائروں کو نقطوں ا، ب، ج پر قطع کرتا ہے اور ان کے مرکز سے فاصلہ ف پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو ا، ب، ج پر کے مماسوں سے بنتا ہے $\frac{ب ج × ج ا × ا ب}{۲ ف}$ ہے۔

۲۱۔ اگر ایک مثلث ا ب ج کے نو نقطی دائرہ کا مرکز ن ہو اور ضلعوں کے نقاط وسطی د، ع، ف ہوں تو ثابت کرو کہ

ب ج جم ن د ج + ج ا جم ن ع ا + ا ب جم ن ف ب = ۰

۲۲۔ ایک مثلث کے ضلع ب ا پر ب د، ا ج کے مساوی ناپا گیا ہے۔ ب ج اور ا د کی تنصیف نقاط ع، ف سے کی گئی ہے اور ع اور ف کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ب ع ف کے حائط دائرہ کا نصف قطر $\frac{۱}{۴}$ ب ج × قم $\frac{۱}{۲}$ ا ہے۔

۲۳۔ اگر مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر اَ، بَ، جَ کوئی نقطے ہوں تو ثابت کرو

ا بَ × ب جَ × ج اَ + اَ ب × بَ ج × جَ ا = ۴ ر × Δ اَ بَ جَ

۲۴۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے فاصلے مثلث کے راسوں سے لا، ما، ی ہوں تو ثابت کرو کہ

$ا^۲ لا^۴ + ب^۲ ما^۴ + ج^۲ ی^۴ + (ا + ب + ج)^۲ لا^۲ ما^۲ ی^۲ = ۲ (ب^۲ ج^۲ ما^۲ ی^۲ + ج^۲ ا^۲ ی^۲ لا^۲ + ا^۲ ب^۲ لا^۲ ما^۲)$

۲۵۔ د، ع، ف وہ نقطے ہیں جہاں مثلث ا ب ج کے زاویوں کے

ناصف مقابل کے ضلعوں سے ملتے ہیں؛ اگر لا، ا، ی وہ عمود ہوں جو ا، ب، ج سے مثلث د ع ف کے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے گئے ہیں اور ع، ع۱، ع۲ وہ عمود ہوں جو ا، ب، ج سے مثلث ا ب ج کے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ع}_1^2}{\text{لا}^2} + \frac{\text{ع}_2^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ع}_3^2}{\text{ی}^2} = 11 + 8\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{ا}\;\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{ب}\;\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{ج}$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے مرکز عمودی کے فاصلے اس کے راسوں سے حسب ذیل مساوات کی اصلیں ہیں:۔

$$\text{لا}^3 - 2(\text{س} + \text{ر})\,\text{لا}^2 + (\text{ر}^2 - 4\text{س}^2 + \text{س}^2)\,\text{لا} - 2\text{س}\left\{\text{س}^2 - (\text{ر} + 2\text{س})^2\right\} = 0$$

۲۷۔ اگر ایک مثلث کا ہر ضلع اس کے گھیرے کے ساتھ ایسی نسبت رکھے جو ۲ : ۵ سے کم ہے تو ایک مثلث بنایا جا سکتا ہے جس کے ضلع جانبی دائروں کے نصف قطروں کے مساوی ہوں۔

۲۸۔ ایک دائرہ کے اندر ایک مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے اور ب ج کے نقطہ وسطی د سے ایک خط، ب ج کے علی القوائم کھینچا گیا ہے جو دائرہ کے محیط سے ع اور ف پر ملتا ہے۔ ا ع اور ا ف کو ملایا گیا ہے اور اس طرح مثلث ا ع ف کو حاصل کیا گیا ہے۔ اسی طرح ا ب، ا ج کی تنصیف کرکے باقی اور دو مثلث بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان تین مثلثوں کے رقبے نسبت جب (ب-ج) : جب (ج-ا) : جب (ا-ب) میں ہیں۔

۲۹۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں؛ ثابت کرو کہ ان دو دائروں کے نصف قطر جو ان تین دائروں کو مس کرتے ہوئے کھینچے جا سکتے ہیں یہ ہیں

$$\frac{\text{ا ب ج}}{(\text{ب ج} + \text{ج ا} + \text{ا ب}) \pm 2\sqrt{\text{ا ب ج}\,(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})}}$$

۳۰۔ اب ج ایک مثلث ہے؛ اس کے بیرونی جانب اس کے ضلعوں پر متساوی الاضلاع مثلث اَب ج، بَ ج ا، جَ ا ب بنائے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ

(۱) ا اَ، ب بَ، ج جَ ایک نقطہ و پر ملتے ہیں؛

(۲) و اَ = و ب + و ج؛

(۳) $\triangle$ اَ بَ جَ = $\frac{۵}{۲}$ $\triangle$ اب ج + $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ (ب ج^۲ + ج ا^۲ + ا ب^۲)

۳۱۔ ایک مثلث کے ضلعوں د، ب کے وسطی نقطے اَ، بَ ہیں؛ ا، ب سے مقابل کے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائیں د، ع ہیں؛ اور اَ د، بَ ع کی تنصیف نقطوں پ، ق سے ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{پ ق} = \frac{۱}{۴}\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - ۲\,\text{ا ب جم ۳ ج}}$$

۳۲۔ ایک حادۃ الزاویہ مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کے عمود نقطہ پ پر ملتے ہیں اور ایک نیا مثلث ضلعوں پ ا، پ ب، پ ج کے ساتھ بنایا گیا ہے۔ وہ شرط معلوم کرو کہ یہ ممکن ہو اور اگر یہ ممکن ہے اور اس نئے مثلث کے زاویے ء، ہ، ج ہیں تو ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{\text{جم ء}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جم ہ}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{جم ج}}{\text{جم ج}} = \frac{۱}{۲}\ \text{قط ا قط ب قط ج}$$

۳۳۔ نصف قطر ر کے ایک دائرہ کے اندر جس کا مرکز ج ہے دو نقطے ا، ب لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن دائروں کے قطر جو ا، ب میں سے گذریں اور دیے ہوئے دائرہ کو مس کریں مساوات ذیل کی اصلیں ہیں:—

$$\text{لا}^۲ (\text{ر}^۲\text{ج}^۲ - \text{ا}^۲\text{ب}^۲ \text{جب}^۲\text{ج}) - ۴\,\text{لا ر ج}^۲ (\text{ر}^۲ - \text{ا ب جم ج}) + \text{ج}^۲ (\text{ر}^۲ - ۲\text{ر}^۲ \text{ا ب جم ج} + \text{ا}^۲\text{ب}^۲) = ۰$$

جہاں چھوٹے و بڑے حروف مثلث اب ج کے اجزاء کو تعبیر کرتے ہیں۔

۳۴۔ اگر ایک مثلث کو کاغذ پر سے کاٹ کر علیحدہ کر لیا جائے اور اس کو موڑ کر دوہرا کیا جائے اس طور پر کہ سلوٹ حائط دائرہ کے مرکز اور ایک راس ا

یں سے گذرے تو ثابت کرو کہ دہرا کئے ہوئے حصہ کا رقبہ ہے

$$\tfrac{۱}{۲}\, ب^{۲}\, جب^{۲}\, ج\ جم\ ج\ قم\ (۲ج - ب)\ قط\ (ج - ب)$$ جہاں ج > ب

۳۵ - ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان عمودوں کے پائین سے متصلہ ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان چھہ عمودوں کے پائین ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جس کا نصف قطر ہے

$$ر\,(جم^{۲}\,ا\ جم^{۲}\,ب\ جم^{۲}\,ج + جب^{۲}\,ا\ جب^{۲}\,ب\ جب^{۲}\,ج)^{\frac{۱}{۲}}$$

۳۶ - اگر پ ایک نقطہ ہو جہاں سے ایک مثلث ا ب ج کے تین جانبی دائروں کے مماس مساوی ہیں تو ثابت کرو کہ پ کا فاصلہ ضلع ب ج سے حسب ذیل ہے:-

$$\tfrac{۱}{۲}\,(ب + ج)\ قط\ \tfrac{۱}{۲}\,ا\ جب\ \tfrac{۱}{۲}\,ب\ جب\ \tfrac{۱}{۲}\,ج$$

۳۷ - اگر ل، م، ی، اُن تین مربعوں کے ضلع ہوں جو مثلث ا ب ج کے اندر اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ ان کا ایک ایک ضلع بالترتیب مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر واقع ہے تو ثابت کرو کہ $\frac{۱}{ل} + \frac{۱}{م} + \frac{۱}{ی} = \frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ج} + \frac{۱}{ر}$

۳۸ - مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود ا اَ، ب بَ، ج جَ ہیں؛ مثلثوں ا بَ جَ، ب جَ اَ، ج اَ بَ کے مرکز عمودی د۱، د۲، د۳ ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلثات د۱ د۲ د۳، اَ بَ جَ مساوی ہیں، (۲) $۲\, ر\, ر_{۱} = ر_{اَ}\, ر_{بَ}\, ر_{جَ}$ جہاں دائروں د۲ اَ د۳، د۳ بَ د۱، د۱ جَ د۲ کے نصف قطر $ر_{اَ}$، $ر_{بَ}$، $ر_{جَ}$ ہیں اور اُس دائرہ کا نصف قطر ر ہے جو اَ بَ جَ کے اندر کھینچا گیا ہے اور $ر_{۱}$ اُس دائرہ کا جو اَ بَ جَ کے گرد کھینچا گیا ہے۔

۳۹ - اگر ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں کے فاصلے اندرونی

دائرہ کے مرکز سے لا، ما، ی ہوں اور حائط دائرہ کا قطر ق ہو تو ثابت کرو کہ

لا ما ی + ق (لا² + ما² + ی²) = ۴ ق³

۴۰۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کو راسوں سے ملانیوالے خطوط مستقیم اِس دائرہ کو اَ، بَ، جَ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث اَ بَ جَ کا رقبہ ہے

½ ر² (جم ½ ا + جم ½ ب + جم ½ ج)

۴۱۔ اگر ایک مثلث کے ہر ضلع کو بقدر چھوٹی مقدار لا کے بڑھایا جائے تو ثابت کرو کہ رقبہ میں تقریباً ر لا (جم ا + جم ب + جم ج) کا اضافہ ہوگا۔

۴۲۔ ایک دائرہ کے قطر ا اَ، ب بَ، ج جَ ہیں اور اَ، بَ، جَ سے علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب پر کے عمودوں کے پائیں د، ع، ف ہیں۔ ثابت کرو کہ ا د، ب ع، ج ف ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور نیز ثابت کرو کہ رقبوں ا ب ج، د ع ف میں نسبت ۱ : ۲ جم ا جم ب جم ج ہے۔

۴۳۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز آ سے ضلعوں پر عمود آ د، آ ع، آ ف کھینچے جائیں تو آ ع ا ف، آ ف ب د، آ د ج ع میں کھینچے ہوئے دائروں کے نصف قطر معلوم کرو؟ اگر یہ نصف قطر علی الترتیب غ۱، غ۲، غ۳ ہوں تو ثابت کرو کہ

(ر − ۲ غ۱)(ر − ۲ غ۲)(ر − ۲ غ۳) = ر³ − ۴ غ۱ غ۲ غ۳

(218)

۴۴۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس دائرہ کا نصف قطر ر جو اِن تین دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے مساوات

√(ر ب ج (ب + ج + ر)) + √(ر ا ج (ج + ا + ر)) + √(ر ا ب (ا + ب + ر)) = √(ا ب ج (ا + ب + ج))

سے حاصل ہوتا ہے ۔

۴۵ ۔ مثلث ا ب ج کے راسوں میں سے مثلث کے مستوی کے عمود دار خطوط ا ا۱، ب ب۱، ج ج۱ کھینچے گئے ہیں اور ان کے طول علی الترتیب لا، ما، ی ہیں ۔ اگر ا ب ج اور ا۱ ب۱ ج۱ کے رقبے Δ اور Δ_1 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\Delta_1^2 - \Delta^2 = \tfrac{1}{4}\left\{\text{ا}^2(\text{لا}-\text{ما})(\text{لا}-\text{ی}) + \text{ب}^2(\text{ما}-\text{ی})(\text{ما}-\text{لا}) + \text{ج}^2(\text{ی}-\text{لا})(\text{ی}-\text{ما})\right\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left\{\text{ا}_1^2(\text{لا}-\text{ما})(\text{لا}-\text{ی}) + \text{ب}_1^2(\text{ما}-\text{ی})(\text{ما}-\text{لا}) + \text{ج}_1^2(\text{ی}-\text{لا})(\text{ی}-\text{ما})\right\}$$

۴۶ ۔ تین دائرے بنائے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک، ایک مثلث کے دو ضلعوں اور نیز اس کے اندرونی دائرہ کو مس کرتا ہے ۔ ان تین دائروں کے مرکزوں کو ملا کر ایک مثلث بنایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کے رقبہ کو دیے ہوئے مثلث کے رقبہ کے ساتھ نسبت ہے

$$4\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا}\;\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب}\;\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج}\left(\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا} + \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب} + \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج}\right)$$

$$:\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,.\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,.\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}\left(\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا} + \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب} + \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}\right)$$

۴۷ ۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کے ناصف مقابل کے ضلعوں سے د، ع، ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کا رقبہ ہے

$$2\text{ر}^2\,\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,.\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,.\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج})\,.\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{ا})\,.\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}$$

اور نیز ثابت کرو کہ

$$(\text{ا}+\text{ب})^2(\text{ا}+\text{ج})^2\,\text{ع ف}^2 + (\text{ب}+\text{ج})^2(\text{ب}+\text{ا})^2\,\text{ف د}^2 + (\text{ج}+\text{ا})^2(\text{ج}+\text{ب})^2\,\text{د ع}^2$$

$$= 16\,\Delta^2\,\text{ر}\,(11\,\text{ر} + 2\,\text{ر})$$

جہاں Δ مثلث ا ب ج کے رقبے کو تعبیر کرتا ہے ۔

۴۸ - ایک مثلث کے حائط دائرہ کا مرکز و ہے، اس کا مرکز عمودی ک ہے؛ اور و ک، حائط دائرہ کو پ اور پَ میں قطع کرتا ہے اور پ اور پَ کے خطوطِ پایئں سے ق اور قَ پر ملتا ہے -
ثابت کرو کہ و ق × و قَ = ۲ ر^۲ جم ا جم ب جم ج

۴۹ - ایک مثلث کے نو نقطی دائرہ کا مرکز ن ہے اور ج ب اور ج ا کے وسطی نقطے د، ع ہیں - ثابت کرو کہ ذوارلعبۃ الاضلاع ن د ج ع کا رقبہ ہے

$\frac{1}{2}$ غ^۲ (جب ۲ ا + جب ۲ ب + ۲ جب ۲ ج)

جہاں نو نقطی دائرہ کا نصف قطر غ ہے -

۵۰ - ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے ایک دوسرا مثلث بنایا گیا ہے اور اس دوسرے مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے تیسرا مثلث، علیٰ ہذا القیاس - ثابت کرو کہ ن ویں مثلث کے ضلع ہیں

ا قم $\frac{۱}{۲}$ قم $\frac{\pi - ۱}{۲^۲}$ قم $\frac{۳\pi + ۱}{۲^۳}$ ... قم $\frac{(۲^{ن-۲} - ۱)\pi + (۱-)^{ن-۲}\,۱}{۲^{ن-۱}}$

مع دیگر دو متشابہ جملوں کے -

۵۱ - اگر مثلث ا ب ج کے نو نقطی دائرہ کا مرکز ن ہو اور ا نَ ب ج سے نقطہ د پر ملے تو ثابت کرو کہ

د ن : د ا :: جم (ب - ج) : ۴ جب ب جب ج

اور نیز بتاؤ کہ ب ن ج کا رقبہ $\frac{۱}{۲}$ ر^۲ جب ا جم (ب - ج) ہے -

۵۲ - مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود گرائے گئے ہیں جن کے پایئں د، ع، ف ہیں - ثابت کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر جو تین دائروں د ج ع، ع ا ف، ف ب د کو مس کرتا ہے حسب ذیل ہے

ر جب ا جب ب جب ج جم ا جم ب جم ج (جب ا + جب ب + جب ج)

---

۲ ا جب ب جب ج - جب^۲ ب جم^۲ ا + ۲ جم ا جم ب جم ج ÷ جب ب جب ج

(219)

۵۳ ـ اگر کسی نقطہ و سے مثلث اب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، اب پر عمود و د، و ع، و ف کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم ا د ج} + \text{مم ب ع ا} + \text{مم ج ف ب} = ۰$$

۵۴ ـ اگر ب، ج، ب دیے گئے ہوں اور اِن اجزاء کے ساتھ دو مثلث موجود ہوں تو ثابت کرو کہ اِن کے اندرونی دائرے ایک دوسرے کو مس کرینگے اگر

$$ج^{۲}(\text{جم}^{۲}ب + ۲\,\text{جم}\,ب - ۳) + ۲\,ب\,ج\,(۱ - \text{جم}\,ب) + ب^{۲} = ۰$$

۵۵ ـ اگر ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں سے نونقطی دائرہ کے مماس کھینچے جائیں اور ان کے طول $م_۱$، $م_۲$، $م_۳$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{م_۱^{۲}}{ر_۱} + \frac{م_۲^{۲}}{ر_۲} + \frac{م_۳^{۲}}{ر_۳} = ر + ۷ر' \quad \text{اور} \quad \frac{م_۱^{۲} - م_۲^{۲}}{ر_۱ - ر_۲} + \frac{م_۲^{۲} - م_۳^{۲}}{ر_۲ - ر_۳} + \frac{م_۳^{۲} - م_۱^{۲}}{ر_۳ - ر_۱} = ۲ر + ۱۱ر'$$

۵۶ ـ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے راسوں سے نونقطی دائرہ کے مرکز کے فاصلوں کے مربعوں کا حاصل جمع ہے

$$ر'^{۲}\left(\frac{۱۱}{۴} + ۲\,\text{جم}\,ا\,\text{جم}\,ب\,\text{جم}\,ج\right)$$

۵۷ ـ ایک دیے ہوئے دائرہ کے گرد چار متشابہ مثلث بنائے گئے ہیں اور ان کے رقبے ق، $ق_۱$، $ق_۲$، $ق_۳$ ہیں ـ ثابت کرو کہ

(ا) مثلثوں کا ایک زاویہ $۲\,\text{مم}^{-۱}\left(\frac{ق\,ق_۱}{ق_۲\,ق_۳}\right)^{\frac{۱}{۴}}$ ہے،

(ب) $ق^{\frac{۱}{۲}} = ق_۱^{\frac{۱}{۲}} + ق_۲^{\frac{۱}{۲}} + ق_۳^{\frac{۱}{۲}}$

(ج) دائرہ کا نصف قطر $(ق\,ق_۱\,ق_۲\,ق_۳)^{\frac{۱}{۸}}$ ہے ـ

۵۸ ۔ ایک مثلث کے راسوں ا ' ب ' ج سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو مثلث کے مقابل کے ضلعوں سے ایک ہی جہت میں زاویے طہ ' فہ ' پہ بناتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ اِن خطوط سے جو مثلث بنتا ہے اس کے حائط دائرہ کا قطر ہے

$$\text{م} = \frac{\text{جب}(\text{۲ا} + \text{فہ} - \text{پہ})\,\text{جم طہ} + \text{جب}(\text{۲ب} + \text{پہ} - \text{طہ})\,\text{جم فہ} + \text{جب}(\text{۲ج} + \text{طہ} - \text{فہ})\,\text{جم پہ}}{\text{جب}(\text{ا} + \text{فہ} - \text{پہ})\,\text{جب}(\text{ب} + \text{پہ} - \text{طہ})\,\text{جب}(\text{ج} + \text{طہ} - \text{فہ})}$$

۵۹ ۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے محاذی ایک نقطہ و پر زاویے عہ ' بہ ' جہ بنتے ہیں ؛ ثابت کرو کہ

$$(\text{۱})\quad \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{عہ} + \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{بہ} + \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{جہ} = \text{۴}\,\text{جم}\tfrac{1}{4}(\text{بہ} + \text{جہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{4}(\text{جہ} + \text{عہ})\,\text{جم}\tfrac{1}{4}(\text{عہ} + \text{بہ})$$

$$(\text{۲})\quad \text{وا} = \frac{\text{ب ج جب}(\text{عہ} - \text{ا})}{\sqrt{\text{ب ج جب عہ جب}(\text{عہ} - \text{ا}) + \text{ج ا جب بہ جب}(\text{بہ} - \text{ب}) + \text{ا ب جب جہ جب}(\text{جہ} - \text{ج})}}$$

۶۰ ۔ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع ل) کے مستوی میں کسی نقطہ کے فاصلے مثلث کے راسوں سے ف_1 ' ف_2 ' ف_3 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف}_2^2\,\text{ف}_3^2 + \text{ف}_3^2\,\text{ف}_1^2 + \text{ف}_1^2\,\text{ف}_2^2 + \text{ل}^2(\text{ف}_1^2 + \text{ف}_2^2 + \text{ف}_3^2) = \text{ل}^4 + \text{ف}_1^4 + \text{ف}_2^4 + \text{ف}_3^4$$

پس ثابت کرو کہ دو متساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ جن میں سے ہر ایک مثلث کے راس ایک ثابت نقطہ سے دئے ہوئے تین فاصلوں پر واقع ہیں اِن فاصلوں پر بنائے ہوئے متساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے ۔

۶۱ ۔ اگر مثلث اب ج کے اندر کوئی نقطہ پ ہو اور مثلثوں ب پ ج ' ج پ ا ' ا پ ب کے حائط دائروں کے مرکز و_1 ' و_2 ' و_3 اور مثلث $\text{و}_1\,\text{و}_2\,\text{و}_3$ کے حائط دائرہ کا نصف قطر م ہو تو ثابت کرو کہ

۴ غہ جب ط جب فہ جب پہ = لا جب ط + ما جب فہ + ی جب پہ

جہاں پ ا، پ ب، پ ج کے طول لا، ما، ی ہیں اور ط، فہ، پہ، زاویے ب پ ج، ج پ ا، ا پ ب ہیں۔

(220)

۶۲۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب ج ہیں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں اور ر ۱، ر ۲ اُن دائروں کے نصف قطر ہیں جو اِن تین دائروں کو مس کرتے ہوئے کھینچے جا سکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

۱/ر ۱ + ۱/ر ۲ = ۲/ا + ۲/ب + ۲/ج

۶۳۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں ب، ج کے ناصف مقابل کے ضلعوں سے نقطوں ع، ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ ع ف، ب ج کے ساتھ زاویہ

مس ا = (ب − ج) جب ا ÷ [(ا + ب) جم ج + (ا + ج) جم ب]

بناتا ہے۔

۶۴۔ اگر ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو، آ ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ۱ ہو، آ ۱ ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ۲ ہو اور علیٰ ہذا القیاس تو بتاؤ کہ جیسے ن لا انتہا بڑھتا ہے آ ن آ ن-۱، ب ج کو اُس نسبت میں تقسیم کرتا ہے جو زاویوں ج اور ب کے نیمقطری ناپوں کے درمیان ہے۔

۶۵۔ ایک مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر نقطے د، ع، ف لیے گئے ہیں اور د، ع، ف میں سے خطوطِ مستقیم بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ کھینچے گئے ہیں جو علیٰ الترتیب ب ج، ج ا، ا ب سے مساوی المیلان ہیں اور مثلث اَ بَ جَ بناتے ہیں جو ا ب ج کے متشابہ ہے۔ ثابت کرو کہ اَ بَ جَ کے حائط دائرہ کا نصف قطر ہے

(ع ف . جم ا + ف د . جم ب + د ع جم ج) ÷ ۴ جب ا جب ب جب ج

جہاں اَ، بَ، جَ کے میلان علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب کے ساتھ
هٰ، ہٰ، جہ ہیں۔

۶۶۔ اگر ایک مثلث کے حائط دائرہ پر ایک نقطہ پ ہو جس کا خط پائیں مثلث کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے اور اگر پ کو مرکز عمودی سے ملانیوالا خطِ مستقیم خط پائیں کو علی القوائم قطع کرے تو ثابت کرو کہ

پ ا^۲ + پ ب^۲ + پ ج^۲ = ۴ ر^۲ (۱ - ۲ جم ا جم ب جم ج)

۶۷۔ ایک مثلث کے ضلع ب ج میں د ایک نقطہ ہے؛ اگر مثلثوں ا ب د، ا ج د کے اندرونی دائرے ضلع ا د کو ایک ہی نقطہ پر مس کریں تو ثابت کرو کہ ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا نقطہ تماس ضلع ب ج کے ساتھ د ہے؛ لیکن اگر دائروں کے نصف قطر مساوی ہوں تو

ج د : ب د :: قم د + قم ج : قم د + قم ب

۶۸۔ نصف قطر ر کے ایک دائرہ کے اندر کسی نقطہ سے تین سمتی نصف قطر جن کے طول ل۱، ل۲، ل۳ ہیں دائرہ تک کھینچے گئے ہیں اور ان میں سے ہر دو کا درمیانی زاویہ ۲π/۳ ہے۔ ثابت کرو کہ

۳ ر^۲ (ل۲ ل۳ + ل۳ ل۱ + ل۱ ل۲)^۲ = (ل۲^۲ + ل۲ ل۳ + ل۳^۲)(ل۳^۲ + ل۳ ل۱ + ل۱^۲)(ل۱^۲ + ل۱ ل۲ + ل۲^۲)

اور اگر اِس نقطہ کا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ف ہو تو ثابت کرو کہ

(ر^۲ - ف^۲)(ل۲ ل۳ + ل۳ ل۱ + ل۱ ل۲) = ل۱ ل۲ ل۳ (ل۱ + ل۲ + ل۳)

۶۹۔ ایک مثلث کے ضلع ب ج کو مس کرنے والے جانبی دائرہ کے نقاط تماس د، ع۱، ف۱ ہیں اور علیٰ ہذا القیاس مثلثوں د ع۱ ف۱، د ع۲ ف۲، د ع۳ ف۳ کے اندرونی دائرے کھینچے گئے ہیں۔ اگر ان دائروں کے نصف قطر غم۱، غم۲، غم۳ ہوں تو بتاؤ کہ

$\frac{1}{\text{عہ}}:\frac{1}{\text{عنہ}}:\frac{1}{\text{عنہ}}=$ ۱-مس $\frac{1}{۲}$ ا : ۱-مس $\frac{1}{۲}$ ب : ۱-مس $\frac{1}{۲}$ ج

(221) ۷۰ - ایک مثلث ا ب ج میں اَ، بَ، جَ اُن دائروں کے مرکز ہیں جن میں سے ہر ایک، مثلث کے دو ضلعوں اور اس کے اندرونی دائرہ کو مس کرتا ہے - ثابت کرو کہ مثلث اَ بَ جَ کا رقبہ ہے

مس $\frac{1}{۴}$ (π - ا) مس $\frac{1}{۴}$ (π - ب) مس $\frac{1}{۴}$ (π - ج)

× {قم $\frac{1}{۴}$ (π - ا) قم $\frac{1}{۴}$ (π - ب) قم $\frac{1}{۴}$ (π - ج) + ۴} ر^{۲}

۷۱ - ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے وہ تین مماس کھینچے گئے ہیں جو ضلعوں کے متوازی ہیں - اِن مماسوں سے مثلث کے کونوں پر تین مثلث بن جاتے ہیں - ثابت کرو کہ اِن تین مثلثوں کے اندرونی دائروں کے نصف قطر لا، مساوات

س^{۲} لا^{۳} - رس^{۲} لا^{۲} - $\frac{1}{۴}$ ر^{۲} (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} - ۲ ب ج - ۲ ج ا - ۲ ا ب) لا - ر^{۵} = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں -

۷۲ - ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کو ملانیوالے خطِ مستقیم پر مثلث کے راسوں سے عمود وں کے طول ف، ق، ر ہیں، ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ف جب ا}}{\text{قط ب - قط ج}} = \frac{\text{ق جب ب}}{\text{قط ج - قط ا}} = \frac{\text{ر جب ج}}{\text{قط ا - قط ب}}$$

جبکہ ف، ق، ر کی علامتوں سے متعلق ایک قرارداد کر لی جائے -

۷۳ - ایک مساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ لیا گیا ہے اور راسوں سے اِس کے فاصلے عہ، بہ، جہ ہیں - خطوط (بہ، جہ)، (جہ، عہ)، (عہ، بہ) کے اندرونی زاویوں کے ناصف مثلث کے تناظر ضلعوں سے

نقطوں ف، ق، ر پر علی الترتیب ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف ق ر کے رقبہ کو متساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ سے نسبت ہے

۲ عہ بہ جہ : (بہ + جہ) (جہ + عہ) (عہ + بہ)

۷۴۔ مثلث ا ب ج کے مستوی میں کسی نقطہ سے راسوں کے فاصلے ل، م، ن ہیں اور حائط دائرہ کے مرکز سے اس کا فاصلہ ف ہے۔ ثابت کرو کہ

ل۲ جب ۲ ا + م۲ جب ۲ ب + ن۲ جب ۲ ج = ۴ (ر۲ + ف۲) جب ا جب ب جب ج

۷۵۔ اگر ایک مثلث کا مرکز ہندسی ث ہو تو ثابت کرو کہ

مم ث ا ب + مم ث ب ج + مم ث ج ا = ۳ مم سہ

= مم ا ب ث + مم ب ج ث + مم ج ا ث

اور مم ا ث ب + مم ب ث ج + مم ج ث ا + مم سہ = ۰

جہاں مم سہ = مم ا + مم ب + مم ج

نیز اگر مثلث میں ک ایک نقطہ ہو ایسا کہ زاویے ک ا ج، ث ا ب مساوی ہیں مع دو اور متشابہ رشتوں کے تو ثابت کرو کہ

مم ا ک ب + مم ب ک ج + مم ج ک ا + $\frac{۱}{۲}$ مم سہ + $\frac{۳}{۲}$ مس سہ = ۰

۷۶۔ ایک مثلث کے رقبہ کے اندر تین دائروں میں سے ہر دائرہ دیگر دو دائروں کو مس کرتا ہے اور نیز مثلث کے دو ضلعوں کو مس کرتا ہے۔ اگر ایک ضلع پر نقاط تماس کے درمیان فاصلہ عہ ہو اور اسی طرح دیگر دو ضلعوں پر متناظر فاصلے بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو ان دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے بنتا ہے $\frac{۱}{۴}$ (بہ۲ جہ۲ + جہ۲ عہ۲ + عہ۲ بہ۲)$^{\frac{۱}{۲}}$ ہے۔

۷۷۔ اگر ایک ذوارابعۃ الاضلاع کے راسوں سے وتروں د۱، د۲ پر عمود ا، ب، ج، د ہوں تو ثابت کرو کہ وتروں کے درمیانی زاویہ کی جیب

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(ا + ج)(ب + د)}{د_1 د_2}\right\}$$

(222)

۷۸ - اگر اب ج د ایک ذواربعۃ الاضلاع ہو توکسی طریقہ سے ثابت کروکہ وہ خطِ مستقیم جو زاویوں ا اور ج کے ناصفوں کے نقطۂ تقاطع کو زاویوں ب، اور د کے ناصفوں کے نقطۂ تقاطع سے ملاتا ہے اد کے ساتھ حسب ذیل زاویہ بناتا ہے

$$\text{مسا}\left\{\frac{\text{جب ا} - \text{جب د} + \text{جب}(ا + ب)}{1 + \text{جم ا} + \text{جم د} + \text{جم}(ا + ب)}\right\}$$

۷۹ - اب ج د ع ایک مستوی مخمس ہے؛ یہ دیا گیا ہے کہ مثلثوں ع اب، اب ج، ب ج د، ج د ع، د ع ا کے رقبے علی الترتیب ا، ب، ج، د، ع کے مساوی ہیں - ثابت کروکہ مخمس کا رقبہ ا، مساوات

$$ا^2 - (ا + ب + ج + د + ع)ا + (اب + ب ج + ج د + د ع + ع ا) = 0$$

سے معلوم ہو سکتا ہے -

۸۰ - اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع جس کے ضلع ترتیب وار ا، ب، ج، د ہیں ایسا ہو کہ اس کے اندر ایک دائرہ بنایا جا سکتا ہے تو ثابت کرو کہ یہ دائرہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ذواربعۃ الاضلاع کے گرد ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہو، اور اس صورت میں اندرونی دائرہ کے نصف قطر کا مربع ہے

$$\frac{ا\,ب\,ج\,د}{(ا + ج)(ب + د)}$$

۸۱ - ۲ن ضلعوں کا ایک کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا گیا ہے، ان ضلعوں میں سے ن اضلاع ا کے مساوی ہیں اور ن اضلاع ب کے مساوی - ثابت کروکہ دائرہ کا نصف قطر ہے

$$\frac{1}{2}\left(ا^2 + 2اب\,\text{جم}\frac{\pi}{ن} + ب^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{قم}\frac{\pi}{ن}$$

۸۲ - ایک ذوارلبعتہ الاضلاع جس کے ضلع ا ، ب ، ج ، د ہیں ایک دائرہ کے اندر بنایا جا سکتا ہے ؛ اِس کے خارجی زاویوں کی تنصیف کی گئی ہے ؛ ثابت کرو کہ اُس ذو اربعتہ الاضلاع کے وتر جو ان ناصفوں سے بنتا ہے ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور اِس ذوارلبعتہ الاضلاع کا رقبہ ہے

۱/۲ × س^۲ (ا ب + ج د) (ا د + ب ج) / (ا + ج) (ب + د) √(س - ا) (س - ب) (س - ج) (س - د)

جہاں ۲ س = ا + ب + ج + د

۸۳ - ذوارلبعتہ الاضلاع ا ب ج د ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے اور اس کا تیسرا وتر ع ف ہے جو راس ا کے مقابل ہے - اگر ا سے ب ج ، ج د پر عمود ڈالے جائیں اور یہ عمود اُن دائروں سے جو ا د ، ا ب پر ان کو قطر مانکر کھینچے گئے ہوں نقطوں پ ، ق پر ملیں تو

ثابت کرو کہ پ ق جب د = ع ف (جب^۲ ا - جب^۲ د)

۸۴ - ایک دوسرے کے لحاظ سے دو دائروں کی طاقت کی تعریف اُس اضافہ سے کی جاتی ہے جو ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کے مربع کو ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے حاصل جمع پر حاصل ہے - مثلث ا ب ج کے لیے ثابت کرو کہ اندرونی دائرہ اور اُس جانبی دائرہ کی طاقت جو ا کے مقابل ہے ۱/۲ {ا^۲ + (ب - ج)^۲} ہے اور اس سے اس امر کی تصدیق کرو کہ اگر یہ جانبی دائرہ دوسرے جانبی دائرہ کو مس کرے تو مثلث کو متساوی الساقین ہونا چاہیے -

۸۵ - ایک مخمس کے ضلع ، جو ایک دائرہ کے گرد کھینچا گیا ہے ، ترتیب وار ا ، ب ، ج ، د ، ع ہیں - ثابت کرو کہ مخمس کا رقبہ ، مساوات

ل^۴ - ل^۲ س {۱/۴ ∑ ا^۲ (ب + ع - ج - د) - ۱/۴ ∑ ا^۳ + ۱/۲ ∑ ا ج د}

+ (س - ا - ع) (س - ب - د) (س - ج - ع) (س - د - ا) (س - ج - ب) س^۳

= ۰

(223)

کی ایک اصل ہے جہاں ۲ س = ا + ب + ج + د + ع

۸۶ ۔ ایک دائرہ میں جس کا نصف قطر ر ہے ایک منتظم کثیر الاضلاع کھینچا گیا ہے ۔ اِس دائرہ کے محیط پر کسی نقطہ کے فاصلے کثیر الاضلاع کے چار متصلہ راسوں سے ا، ب، ج، د ہیں ۔ ا، ب، ج اور د کے درمیان رشتہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

$$ر^۲ = \frac{(ا ب - ج د)(ب ج - ا د)(ج ا - ب د)}{(ا + ب - ج - د)(ب + ج - د - ا)(ج + ا - ب - د)(ا + ب + ج + د)}$$

۸۷ ۔ ایک محدب مخمس ا ب ج د ع ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے، اس کا گھیرا اور رقبہ علی الترتیب ۲ س اور س ہیں، اور ع اور ب پر کے زاویوں کا مجموعہ عہ ہے، ا اور ج پر کے زاویوں کا مجموعہ بہ، اور و قس علیٰ ہٰذا ۔ ثابت کرو کہ

$$س^۲ (جب ۲ عہ + \dots + جب ۲ صہ) + ۲ س (جب عہ + \dots + جب صہ)^۲ = ۰$$

۸۸ ۔ ا ب ج د ایک محدب ذوارلبعۃ الاضلاع ہے جس کے ضلع ایک دائرے کو مس کرتے ہیں اور راس ایک دوسرے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں ۔ مخمس کے حائط دائرہ کے مماس نقطوں ا، ب، ج، د پر کھینچے گئے ہیں جن سے ایک دوسرا محدب ذوارلبعۃ الاضلاع بنتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اِس آخری ذوارلبعۃ الاضلاع کا رقبہ ہے

$$۲ ر^۲ \frac{(س ش - ۲ ا ب ج د)(ا ب ج د)^{\frac{۳}{۲}} ش}{(ش - ب ج د)(ش - ج د ا)(ش - د ا ب)(ش - ا ب ج)}$$

جہاں دائرہ ا ب ج د کا نصف قطر ر ہے اور ۲ س = ا + ب + ج + د، اور

$$۲ ش = ب ج د + ج د ا + د ا ب + ا ب ج$$

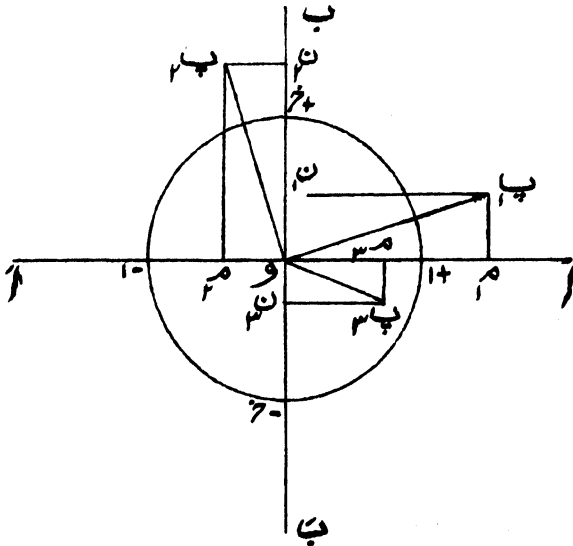
تیرھواں باب

ملتف اعداد

۱۷۰ ــــــ جبر و مقابلہ کی کتابوں میں شکل لا + خ ما کے عددوں پر جنھیں ملتف اعداد کہا جاتا ہے بحث کی جاتی ہے اور جبری اعمال کے معمولی قوانین کا ان پر اطلاق درست ثابت کیا جاتا ہے۔ ہم اس باب میں اُس طریقہ پر غور کرینگے جس میں ایسے ملتف عدد ہندسی طور پر تعبیر کیے جا سکتے ہیں اور جس میں ایسے عددوں کے حاصل جمع اور حاصل ضرب ہندسی طور پر ظاہر کیے جا سکتے ہیں۔ یہ معلوم ہوگا کہ اس سلسلہ میں دائری تفاعل فطرتاً خود بخود پیش ہوتے ہیں، اور فی الواقعی ایسے تفاعلوں کا اِدخال ضروری ہے تاکہ ملتف عددوں کے حاصل ضرب اور حاصل تقسیم اختصاراً بیان ہو سکیں۔

ملتف عدد کی ہندسی تعبیر

۱۷۱ ــــــ ایک مثبت یا منفی حقیقی عدد کو ہندسی طور پر اس طرح تعبیر کرتے ہیں کہ ایک ثابت لا متناہی خط مستقیم ا و ا پر پیمانہ کے مطابق طول و م = ا لا ا کسی معروف نقطہ و سے اس کی ایک سمت یا دوسری سمت میں بموجب اس کے کہ عدد لا مثبت ہے یا منفی ناپتے ہیں؛ تب ہم یہ خیال کر سکتے ہیں کہ عدد لا یا تو م کے محل سے تعبیر ہوتا

ہے یا خطِ مستقیم و م سے۔ اب خالص خیالی عدد خ ما کو تعبیر کرنے کے لیے کسی ثابت مستوی میں جس میں اَ و ا واقع ہے ایک ثابت خطِ مستقیم ب و بَ لو جو ا و اَ پر عمود ہو، پھر بَ و ب پر و سے طول و ن = | ما | ناپو جو و ب یا و بَ کی سمت میں لیا جائے بموجب اس کے کہ ما مثبت ہو یا منفی؛ تب ہم یہ خیال کرینگے کہ خیالی عدد خ ما نقطہ ن سے تعبیر ہوتا ہے یا نیز خطِ مستقیم و ن سے۔ اکائی نصف قطر کا دائرہ خطوطِ مستقیم ا اَ اور ب بَ کو اُن نقطوں پر قطع کریگا جو عددوں ± ا، ± خ کو تعبیر کرتے ہیں۔ ملتف عدد لا + خ ما کو تعبیر کرنے کے لیے مستطیل و م پ ن (225) کی تکمیل کرو، تب ہم یہ خیال کرینگے کہ نقطہ پ یا نیز خطِ مستقیم و پ ملتف عدد لا + خ ما کو تعبیر کرتا ہے۔ اس طرح ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ دو عددوں لا اور خ ما کا حاصل جمع ہندسی طور پر اُس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوتا ہے جس کے دو ضلع خطوطِ مستقیم و م، و ن ہیں جو علی الترتیب لا اور خ ما کو تعبیر کرتے ہیں۔

شکل میں پ$_1$، ملتف عدد لا$_1$ + خ ما$_1$ کو تعبیر کرتا ہے جس میں لا$_1$ اور ما$_1$ دونوں مثبت ہیں؛ پ$_2$، ملتف عدد لا$_2$ + خ ما$_2$ کو جس میں لا$_2$ منفی ہے اور ما$_2$ مثبت؛ پ$_3$، عدد لا$_3$ + خ ما$_3$ کو جس میں لا$_3$ مثبت ہے اور ما$_3$ منفی۔ اَ و ا کو حقیقی محور کہتے ہیں اور بَ و ب کو خیالی محور۔

۱۷۲ ـــــ فرض کرو کہ و پ کا مطلق طول ر سے تعبیر ہوتا ہے اور ط وہ زاویہ ہے جو و پ، و ا کے ساتھ بناتا ہے جبکہ اس کو و ا سے مخالف سمت ساعت ناپا جاتا ہے۔ تب

لا = ر جم ط، ما = ر جب ط، ی = لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط)

جہاں ر = $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$، ط = مس$^{-1}$ $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$

عدد ر = $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ کو جو لازمی طور پر مثبت عدد ہے ملتف عدد لا + خ ما کا **مقیاس** کہتے ہیں اور زاویہ ط کو اس ملتف عدد کی **دلیل** یا **وجہ**۔

(226)

پس خطِ مستقیم و پ جو اس مستوی میں و سے کسی سمت میں ناپا گیا ہو مطلق طول کی اور سمیت کی دو خصوصیتوں کی وجہ سے ایک ملتف عدد کو پوری طرح تعبیر کرنے کے قابل ہے۔ عدد لا + خ ما کو اس مستوی کے کسی اور خطِ مستقیم سے بھی تعبیر کیا جا سکتا ہے جو و پ کے متوازی اور طول میں اس کے مساوی کھینچا گیا ہو کیونکہ ایسا خطِ مستقیم لا + خ ما کے مقیاس اور دلیل دونوں کو تعبیر کرتا ہے۔

۱۷۳ ـــــ فرض کرو کہ کوئی نقطہ پ، اَ سے ابتدا کر کے اور مخالف سمت ساعت حرکت کرتے ہوئے ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جس کا مرکز و اور نصف قطر ر ہے؛ تب اس ملتف عدد کا مقیاس جو پ سے تعبیر ہوتا ہے مستقل اور ر کے مساوی رہتا ہے لیکن دلیل جبری طور پر - π سے شروع کر کے مسلسل

بڑھتی جاتی ہے ۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ نقطہ پ دائرہ میں متعدد
مکمل گردشیں کر چکا ہے، تب ہر دفعہ جب وہ کسی ثابت مقام پ۱
سے گذرتا ہے ملتف عدد لا + خ ما کی وہی قیمت ہوتی ہے، یعنی اس
کی دلیل میں ۲ π کے ضِعف کے اضافہ سے یہ ملتف عدد نہیں بدلتا۔
بہ الفاظ دیگر متغیر

لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط)

جس کو اس کے مقیاس ر اور اس کی دلیل ط کا تفاعل خیال کیا
جا سکتا ہے دلیل کے لحاظ سے دَوری (Periodic) ہے۔

کسی عدد لا + خ ما کے لیے ط کی اُس قیمت کو جو - π اور π
کے درمیان واقع ہوتی ہے **دلیل کی صدر قیمت** کہہ سکتے
ہیں؛ اور ہم بالعموم ایسے عدد کی دلیل کا جب ذکر کرینگے تو اس سے
مراد یہی صدر قیمت ہوگی ۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دلیل ط کی صدر قیمت کا مس ا ما/لا کی صدر
قیمت ہونا ضروری نہیں ہے (دیکھو دفعہ ۳۸)، کیونکہ لا + خ ما کی ایک
دی ہوئی قیمت کے جواب میں جم ط اور جب ط دونوں کی قیمتیں معلوم
ہوتی ہیں اور اس لیے ط کی صرف ایک قیمت - π اور π کے
درمیان ہوتی ہے ۔

اِس مفہوم میں ایک مثبت حقیقی عدد کی دلیل صفر ہے اور ایک مثبت
خیالی عدد کی دلیل ½ π ہے اور ایک منفی خیالی عدد کی دلیل - ½ π، لیکن
منفی حقیقی عدد کی دلیل کی صدر قیمت حسب تعریف بالا مبہم ہے کیونکہ یہ π ہے
یا - π؛ لیکن ہم اس کو π ہی خیال کرینگے ۔ مزدوج اعداد لا + خ ما، لا - خ ما
کے مقیاس تو ایک ہی ہوتے ہیں لیکن اِن کی دلیلیں ط اور - ط ہیں۔
لا + خ ما کے مقیاس کو اکثر مق (لا + خ ما) سے یا |لا + خ ما| سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۱۷۴ ـــــ اس امر کا مشاہدہ کرنا بنیادی اہمیت رکھتا ہے کہ
حقیقی متغیر لا جبکہ لا۱ سے لا۲ تک مسلسل بڑھتا ہے تو وہ صرف قیمتوں کے

(227)

ایک جہت میں سے گذر سکتا ہے، لیکن ملتف متغیر لا + خ ما کی یہ کیفیت نہیں ہے۔ یہ فرض کر کے بھی کہ لا اور ما دونوں مسلسل بڑھتے ہیں لاانتہا طریقے ہیں جن میں ملتف متغیر لا + خ ما قیمت لا۱ + خ ما۱ سے لا۲ + خ ما۲ تک مسلسل بدل سکتا ہے کیونکہ لا۱ سے لا۲ تک لا کا مسلسل اضافہ ما۱ سے ما۲ تک ما کے مسلسل اضافہ کے تابع نہیں ہے۔ یہ امر اس واقعہ میں لازمی طور پر شامل ہے کہ ملتف عدد میں دو الگ الگ اکائیاں پائی جاتی ہیں اور اس واقعہ کی یہ ہندسی تعبیر ہے کہ شکل میں دو نقطے پ۱ اور پ۲ لاانتہا طریقوں سے ایک دوسرے سے ملائے جا سکتے ہیں کیونکہ متغیر کو تعبیر کرنیوالا نقطہ، پ۱ اور پ۲ کو ملانیوالے کسی اختیاری منحنی پر حرکت کر سکتا ہے۔ اگر ایک حقیقی متغیر کو ہمیشہ حقیقی رہتے ہوئے لا۱ سے لا۲ تک بڑھنا ہے تو متغیر کو تعبیر کرنیوالے نقطہ کی حرکت محور لا میں مقید ہو جاتی ہے؛ اگر متغیر پر یہ قید نہ ہو کہ اس کی درمیانی قیمتیں حقیقی ہوں تو اس کو تعبیر کرنیوالا نقطہ کسی اختیاری منحنی کو مرتسم کر سکتا ہے جو محور لا پر کے ان دو نقطوں کو ملا سکتا ہے۔

ہم اس نکتہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ ایک خالص حقیقی یا خالص خیالی عدد لازماً یک بُعدی ہے، لیکن ایک ملتف عدد دو بُعدی ہے اور اس لیے اس کی ہندسی تعبیر کے لیے دو بُعدی فضاء چاہیے۔

ملتف عددوں کو ہندسی طور پر تعبیر کرنیکا طریقہ ارگنڈ (Argand) نے ایک مقالہ میں جو ۱۸۰۶ء میں شائع ہوا تھا دیا تھا لیکن اس سے قبل ۱۷۵۰ء میں کہون (kühn) نے ان کی ہندسی تعبیر دریافت کرنے کی سعی کی تھی۔ تعبیر کے اس طریقہ پر جو نظریہ قائم ہوا ہے اس کی توسیع و ترقی کوشی[1]، گاس[2]، ریمن اور دوسروں نے کی۔ یہ نظریہ تفاعلوں کے موجودہ نظریہ کی بنیاد ہے۔

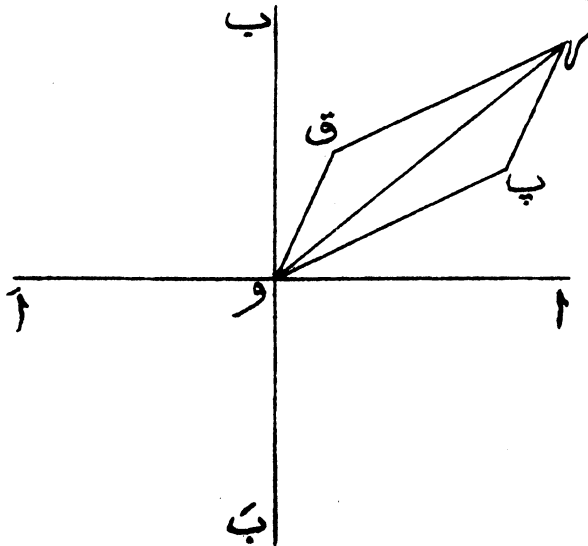
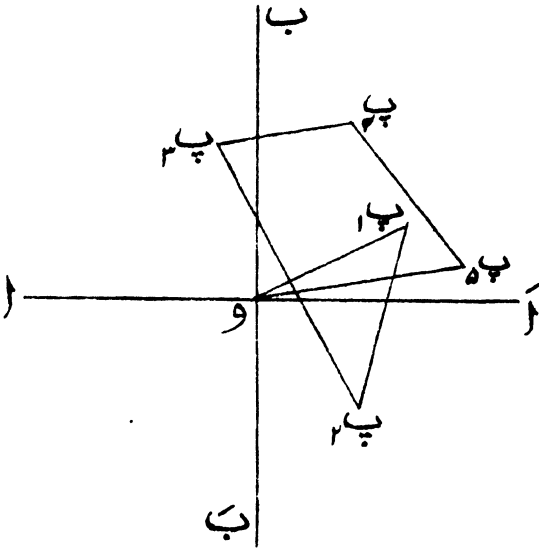
ملتف عددوں کی جمع

۱۷۵ — فرض کرو کہ دو ملتف عددوں لا۱ + خ ما۱، لا۲ + خ ما۲ کو

[1] Cauchy
[2] Gauss

نقطے پ، ق تعبیر کرتے ہیں؛ متوازی الاضلاع و پ ر ق کی تکمیل کرو؛ تب و ر کا ظل کسی ایک محور پر، اس محور پر و پ، پ ر یا و پ، و ق کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے؛ اس لیے نقطہ ر، دو دئے ہوئے ملتف عددوں کے مجموعہ (لا$_1$ + لا$_2$) + خ (ما$_1$ + ما$_2$) کو تعبیر کرتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ دو ملتف عددوں کا حاصل جمع ہندسی طور پر اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ ان ملتف عددوں کو تعبیر کرنیوالے خطوطِ مستقیم کو قانونِ متوازی الاضلاع کی بموجب جمع کیا جائے۔ ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ وہ مساوی اور متوازی خطوطِ مستقیم جن کے طول ایک ہی ہیں اور جو ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں ایک ہی ملتف عدد کو تعبیر کرتے ہیں، مثلاً پ ر جو پ سے و ق کے متوازی اور مساوی کھینچا گیا ہے ملتف عدد لا$_2$ + خ ما$_2$ کو تعبیر کرتا ہے۔ پس ہم جمع کے قاعدے کو یوں بیان کرسکتے ہیں:- و سے خطِ مستقیم و پ کھینچو جو لا$_1$ + خ ما$_1$ کو تعبیر کرے اور پھر پ سے پ ر کھینچو جو لا$_2$ + خ ما$_2$ کو تعبیر کرے؛ و ر کو ملاؤ؛ تب و ر، یا نقطہ ر، حاصل جمع (لا$_1$ + لا$_2$) + خ (ما$_1$ + ما$_2$) کو تعبیر کریگا۔

(228)

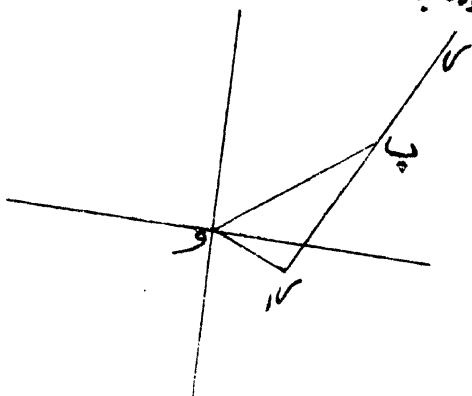
ب
ر
ق
پ
اَ
و
ا
بَ

(229)

۱۷۶ — جمع کا جو طریقہ اوپر بیان کیا گیا ہے اس کی توسیع اعداد کے کسی جٹ کے لیے ہو سکتی ہے۔

دفعہ ماقبل کی دوسری شکل میں و$پ_1$ کھینچو جو $لا_1 + خ ما_1$ کو تعبیر کرے، پھر $پ_1$ سے $پ_1 پ_2$ کھینچو جو $لا_2 + خ ما_2$ کو تعبیر کرے، پھر $پ_2$ سے $پ_2 پ_3$ کھینچو جو $لا_3 + خ ما_3$ کو تعبیر کرے، وقس علیٰ ہذا۔ اس کے بعد و$پ_ن$ کو ملاؤ۔ تب ان عددوں $لا_1 + خ ما_1$، $لا_2 + خ ما_2$، ...، $لا_ن + خ ما_ن$ کا حاصل جمع خطِ مستقیم و$پ_ن$ یا نقطہ $پ_ن$ سے تعبیر ہوگا۔

چونکہ طول و$پ_ن$، طولوں و$پ_1$، $پ_1 پ_2$، ...، $پ_{ن-1} پ_ن$ کے مجموعہ سے بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملتف عددوں کے ایک جٹ کے حاصل جمع کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ کے مساوی یا اس سے کم ہوتا ہے۔

۱۷۷ — $لا_2 + خ ما_2$ کو $لا_1 + خ ما_1$ سے تفریق کرنے کے لئے $پ_1$ سے ایک خط $پ_1 ر_1$ کھینچنا چاہیے جو $-(لا_2 + خ ما_2)$ کو تعبیر کرے؛ یہ خط $پ_1 ر_1$ کے مساوی مگر مخالف

سمت میں ہوگا۔ تب مطلوبہ حاصل تفریق یا فرقِ خط و ر$_1$ سے یا نقطہ ر$_1$ سے تعبیر ہوگا۔

ملتف عددوں کی ضرب

۱۷۸ — دو عددوں لا$_1$ + خ ما$_1$، لا$_2$ + خ ما$_2$ کا حاصل ضرب ہے

(لا$_1$ لا$_2$ − ما$_1$ ما$_2$) + خ (لا$_1$ ما$_2$ + لا$_2$ ما$_1$)

اور اگر ہم لا$_1$ + خ ما$_1$، لا$_2$ + خ ما$_2$ کی بجائے

ر$_1$ (جم ط$_1$ + خ جب ط$_1$)، ر$_2$ (جم ط$_2$ + خ جب ط$_2$)

رکھیں تو اِن کا حاصلِ ضرب لکھا جا سکتا ہے

ر$_1$ ر$_2$ {جم (ط$_1$ + ط$_2$) + خ جب (ط$_1$ + ط$_2$)}

اِس جملہ سے ظاہر ہے کہ دو عددوں کے حاصل ضرب کا مقیاس اِن عددوں کے مقیاسوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے اور حاصل ضرب کی دلیل دلیلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

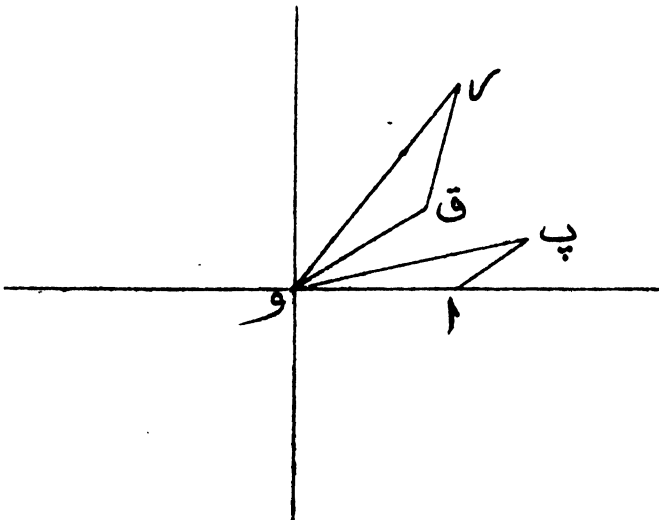
تاہم یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگر لا$_1$ + خ ما$_1$، لا$_2$ + خ ما$_2$ کی دلیلوں کی صدر قیمتیں ط$_1$، ط$_2$ ہوں تو ضروری نہیں کہ حاصل ضرب کی دلیل کی صدر قیمت ط$_1$ + ط$_2$ ہو۔

اب ہم دو عددوں کے حاصل ضرب کے لیے ہندسی عمل حاصل کر سکتے ہیں: فرض کرو کہ ا، پ، ق، تین عددوں +۱، لا$_1$ + خ ما$_1$، لا$_2$ + خ ما$_2$ کو تعبیر کرتے ہیں: اپ کو ملاؤ، وق پر ایک مثلث ق و ر اس طرح بناؤ کہ وہ ا و پ کے متشابہ ہو

اور زاویہ ق و ر = + ط$_1$،

تب زاویہ ر و ا = ط$_1$ + ط$_2$

اور نیز و ر : و ق = و پ : و ا

پس و ر کا طول طولوں و پ اور و ق کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ ر، حاصل ضرب (لا$_1$ + خ ما$_1$) × (لا$_2$ + خ ما$_2$) کو تعبیر کرتا ہے۔

اب اگر ہم ایک تیسرا جزو ضربی لا$_3$ + خ ما$_3$ = ر$_3$ {جم ط$_3$ + خ جب ط$_3$}
شامل کریں تو

(لا$_1$ + خ ما$_1$) (لا$_2$ + خ ما$_2$) (لا$_3$ + خ ما$_3$)

= ر$_1$ ر$_2$ ر$_3$ {جم (ط$_1$ + ط$_2$) + خ جب (ط$_1$ + ط$_2$)} {جم ط$_3$ + خ جب ط$_3$}

= ر$_1$ ر$_2$ ر$_3$ {جم (ط$_1$ + ط$_2$ + ط$_3$) + خ جب (ط$_1$ + ط$_2$ + ط$_3$)}

اسی طرح چار یا زیادہ ملتف عددوں کا حاصل ضرب معلوم ہو سکتا ہے۔

(231) ن ملتف عددوں کی صورت میں ضابطہ حاصل ہوتا ہے

(لا$_1$ + خ ما$_1$) (لا$_2$ + خ ما$_2$) ... (لا$_ن$ + خ ما$_ن$)

= ر$_1$ ر$_2$ ر$_3$ ... ر$_ن$ {جم (ط$_1$ + ط$_2$ + ... + ط$_ن$) + خ جب (ط$_1$ + ط$_2$ + ... + ط$_ن$)}

یا ملتف عددوں کے کسی جٹ کے حاصل ضرب کا[1] مقیاس اِن کے مقیاسوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے اور ان کے حاصل ضرب کی دلیل اِن کی دلیلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ ملتف عددوں کے کسی جٹ کے حاصل ضرب کو ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے مذکورۂ بالا دو عددوں کے حاصل ضرب کے طریقے کی تکرار عمل میں لائی جا سکتی ہے۔

ایک ملتف عدد کو دوسرے سے تقسیم کرنا

۱۷۹ ـــ خارج قسمت (لا$_1$ + خ ما$_1$) ÷ (لا$_2$ + خ ما$_2$)

$$= \frac{1}{\text{ر}_2^2}\left\{\left(\text{لا}_1\,\text{لا}_2 + \text{ما}_1\,\text{ما}_2 - \text{خ}\left(\text{لا}_1\,\text{ما}_2 - \text{لا}_2\,\text{ما}_1\right)\right\}$$

یا

$$= \frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2}\left\{\text{جم}\left(\text{ط}_1 - \text{ط}_2\right) + \text{خ}\ \text{جب}\left(\text{ط}_1 - \text{ط}_2\right)\right\}$$

پس دو عددوں کے خارج قسمت کا مقیاس ان کے مقیاسوں کا خارج قسمت ہوتا ہے اور خارج قسمت کی دلیل ان کی دلیلوں کے فرق کے مساوی ہوتی ہے۔

خارج قسمت کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کے لیے نقطہ ق $(\text{لا}_2 + \text{خ}\,\text{ما}_2)$

پ
ق
ر
و
ا

(282) کو نقطہ ا (۱ + ۱) سے ملاؤ، اور مثلث و ر پ کو اس طور پر بناؤ کہ مثلث و ا ق کے متشابہ ہو اور زاویہ ر و پ کا ناپ − ط_2 ہو۔ تب زاویہ ر و ا $= \text{ط}_1 - \text{ط}_2$ اور و ر $= \frac{\text{وپ}}{\text{وق}}$ اس لیے نقطہ ر حاصل تقسیم یا خارج قسمت کو تعبیر کرتا ہے۔

ملتف عددوں کی قوتیں

۱۸۰ ——— اگر مساوات (۱) میں دائیں جانب کے سب اجزائے ضربی کو لا + خ ما کے مساوی رکھیں تو ضابطہ ملتا ہے

$$(\text{لا} + \text{خ ما})^{\text{ن}} = \text{ر}^{\text{ن}} (\text{جم ن ط} + \text{خ جب ن ط})$$

پس کسی ملتف عدد کی ن ویں قوت کا مقیاس اِس دیے ہوئے عدد کے مقیاس کی ن ویں قوت کے برابر ہے اور اِس کی دلیل دیے ہوئے عدد کی دلیل کی ن گنا ہے۔ عدد ن سے یہاں کوئی مثبت صحیح عدد مراد ہے۔

ملتف عدد کی کسی مثبت قوت کی قیمت ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ پ$_1$ (لا + خ ما) کو ا (+ ۱) سے ملایا گیا ہے:
وپ$_1$ پر مثلث وپ$_1$ پ$_2$ بناؤ جو وا پ$_1$ کے متشابہ ہو، وپ$_2$ پر مثلث وپ$_2$ پ$_3$ بناؤ جو اُسی مثلث کے متشابہ ہو، اور علیٰ ہذا القیاس۔
تب وپ$_1$، وپ$_2$، وپ$_3$، ...، وپ$_{\text{ن}}$ کے طول علی الترتیب ر، ر^2، ر^3، ...، ر$^{\text{ن}}$ ہیں اور زاویے پ$_1$ و ا، پ$_2$ و ا، ... پ$_{\text{ن}}$ و ا علی الترتیب ط، ۲ ط، ... ن ط ہیں۔ پس نقطے پ$_1$، پ$_2$، ... پ$_{\text{ن}}$ علی الترتیب عددوں (لا + خ ما)، (لا + خ ما)^2، ...، (لا + خ ما)$^{\text{ن}}$ کو تعبیر کرتے ہیں۔

مخصوص صورت ر = ۱ میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\text{ن}} = \text{جم ن ط} + \text{خ جب ن ط}$$

اور اگر ق$_1$ سے جم ط + خ جب ط تعبیر ہو تو نقطے ق$_1$، ق$_2$، ... ق$_{\text{ن}}$ جو جم ط × خ جب ط کی مختلف قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں اکائی نصف قطر کے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اور اس طرح کہ کسی دو متصل نقطوں کے

کے درمیان جو قوس ہے اُس کے محاذی مرکز و پر زاویہ ط بنتا ہے۔

۱۸۱۔۔۔۔ قوت نماؤں کے نظریہ کے مطابق اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو جملہ $(\text{لا} + \text{خر ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ سے وہ عدد تعبیر ہوتا ہے جس کی ن ویں قوت لا + خر ما ہے۔ اب چونکہ کسی عدد کے مقیاس کی ن ویں قوت اُس عدد کی ن ویں قوت کا مقیاس ہے اور چونکہ ہر عدد کا مقیاس حقیقی اور مثبت ہوتا ہے اس لیے $(\text{لا} + \text{خر ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کا مقیاس $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}$ ہے جہاں $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}$، مقیاس ر کا حقیقی مثبت ن واں جذر ہے۔ فرض کرو کہ $(\text{لا} + \text{خر ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی ایک قیمت $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\,(\text{جم فہ} + \text{خر جب فہ})$ ہے تو

$$\text{ر}\,(\text{جم فہ} + \text{خر جب فہ})^{\text{ن}} = \text{ر}\,(\text{جم ط} + \text{خر جب ط})$$

یا $$\text{جم ن فہ} + \text{خر جب ن فہ} = \text{جم ط} + \text{خر جب ط} \qquad (238)$$

اس لیے $\text{جم ن فہ} = \text{جم ط}$، $\text{جب ن فہ} = \text{جب ط}$

یا $$\text{ن فہ} = \text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi$$

جہاں س کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے بشمول صفر۔ پس

$$(\text{لا} + \text{خر ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$$

کی ایک قیمت ہے $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left\{\text{جم}\,\frac{\text{ط}+۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} + \text{خر جب}\,\frac{\text{ط}+۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}\right\}$

کیونکہ اس جملہ کی ن ویں قوت لا + خر ما کے مساوی ہے۔ اوپر کے استدلال سے یہ ظاہر ہے کہ $(\text{لا} + \text{خر ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی ہر قیمت مندرجۂ بالا شکل کی ہونی چاہیے۔
اگر س کو قیمتیں ۰، ۱، ۲، ...، ن-۱ دی جائیں تو ان قیمتوں میں سے ہر ایک کے لیے

$$\text{جم}\,\frac{\text{ط}+۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} + \text{خر جب}\,\frac{\text{ط}+۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}$$

کی قیمت مختلف ہوگی کیونکہ س کی دو قیمتوں $\text{س}_۱$، $\text{س}_۲$ کے لیے اس جملہ کی مساوی قیمتیں ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_۱\,\pi}{\text{ن}} = \text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_۲\,\pi}{\text{ن}}$$

اور

$$\text{جب}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_۱\,\pi}{\text{ن}} = \text{جب}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_۲\,\pi}{\text{ن}}$$

یعنی

$$\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_۱\,\pi}{\text{ن}} = ۲\,\text{ک}\,\pi + \frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_۲\,\pi}{\text{ن}}$$

یا

$$\text{س}_۱ - \text{س}_۲ = \text{ن}\,\text{ک}$$

جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ لیکن یہ ناممکن ہے اگر $\text{س}_۱$ اور $\text{س}_۲$ دونوں مختلف اور ن سے کم ہیں۔ اس لیے مذکورہ بالا قیمتیں سب کی سب مختلف ہیں۔

اگر ہم س کو دوسری قیمتیں دیں جو صفر اور ن − ۱ کے درمیان واقع نہ ہوں تو ان سے $(\text{جم}\,\text{ط} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط})^{\frac{۱}{\text{ن}}}$ کی کوئی اور قیمتیں حاصل نہیں ہونگی کیونکہ اگر س کی ایسی کوئی قیمت $\text{س}_۲$ ہو تو صفر اور ن − ۱ کے درمیان ایک عدد $\text{س}_۱$ کا معلوم کرنا ہمیشہ ممکن ہے ایسا کہ $\text{س}_۱ - \text{س}_۲$، ن کا ایک ضعف ہو، اور اس لیے جملہ بالا کی قیمت $\text{س} = \text{س}_۱$ کے لیے وہی ہے جو $\text{س} = \text{س}_۲$ کے لیے ہے۔

پس، ہم دیکھتے ہیں کہ $(\text{لا} + \text{خ}\,\text{ما})^{\frac{۱}{\text{ن}}}$ کی تمام قیمتیں سلسلہ

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left(\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}} + \text{خ}\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)،\ \sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left(\text{جم}\,\frac{\text{ط}+۲\pi}{\text{ن}} + \text{خ}\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}+۲\pi}{\text{ن}}\right)$$

$$\ldots،\ \sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left\{\text{جم}\,\frac{\text{ط}+۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}} + \text{خ}\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}+۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right\}،$$

(284)

سے ملتی ہیں۔ جو ن اعداد پر مشتمل ہے اور جس میں $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}$ حقیقی اور مثبت ہے۔

۱۸۲ — اگر لا + خ ما کی دلیل کی صدر قیمت ط ہو یعنے دلیل کی وہ قیمت جو $-\pi$ اور π کے درمیان واقع ہے تو ہم $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی صدر قیمت کو جملہ

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left(\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)$$

تصور کر سکتے ہیں۔ اب جملوں جم ط + خ جب ط، جم $(\text{ط} + 2\pi)$ + خ جب $(\text{ط} + 2\pi)$، ... کے ن ویں جذروں کی صدر قیمتیں $\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$، $\text{جم}\,\frac{\text{ط}+2\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط}+2\pi}{\text{ن}}$، ... تصور ہو سکتی ہیں۔ اس لیے $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی مختلف قیمتیں ر اور ط کے متناظر جملوں کی صدر قیمتیں ہیں جب کہ دلیل ط کی ن مختلف قیمتیں لیجائیں۔ $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی صدر قیمت سے وہ جملہ مراد ہے جس میں ط کی صدر قیمت لی گئی ہے۔

اگر ا ایک مثبت حقیقی مقدار ہے تو $\text{ا}^{\frac{1}{2}}$ کی دو قیمتیں $\sqrt{\text{ا}}\,(\text{جم}\,0 + \text{خ جب}\,0)$ اور $\sqrt{\text{ا}}\,(\text{جم}\,\pi + \text{خ جب}\,\pi)$ ہیں یعنے $\sqrt{\text{ا}}$ اور $-\sqrt{\text{ا}}$ جہاں ا کا مثبت جذر المربع $\sqrt{\text{ا}}$ ہے،

$(-\text{ا})^{\frac{1}{2}}$ کی قیمتیں جس میں ط = π یہ ہیں $\sqrt{\text{ا}}\,(\text{جم}\,\frac{1}{2}\pi + \text{خ جب}\,\frac{1}{2}\pi)$،

$\sqrt{\text{ا}}\,(\text{جم}\,\frac{3}{2}\pi + \text{خ جب}\,\frac{3}{2}\pi)$

یا $\text{خ}\sqrt{\text{ا}}$، $-\text{خ}\sqrt{\text{ا}}$، $\text{ا}^{\frac{1}{2}}$ کی صدر قیمت $\sqrt{\text{ا}}$ ہے اور $(-\text{ا})^{\frac{1}{2}}$ کی صدر قیمت $\text{خ}\sqrt{\text{ا}}$

۱۸۳ — دفعہ ۱۸۱ کے جملوں میں ر = ۱، ط = ۰ رکھنے سے

ایک کے ن ویں جذر حاصل ہوتے ہیں اور اس لیے یہ جذر ہیں

$$۱،\ \text{جم}\,\frac{۲\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{۲\pi}{\text{ن}}،\ \text{جم}\,\frac{۴\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{۴\pi}{\text{ن}}،\ \ldots$$

$$\ldots،\ \text{جم}\,\frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}$$

اب اگر ہم جذر $\text{جم}\,\frac{۲\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{۲\pi}{\text{ن}}$ کو سہ سے تعبیر کریں تو اوپر کے سب جذر

$$۱،\ \text{سہ}،\ \text{سہ}^{۲}،\ \ldots\ \text{سہ}^{\text{ن}-۱}$$

سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اب چونکہ

$$\text{جم}\,\frac{\text{ط}+۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط}+۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} = \left(\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right) \times \left(\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)$$

اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{۱}{\text{ن}}}$ کی صدر قیمت $\sqrt[\text{ن}]{\text{لا} + \text{خ ما}}$ سے تعبیر ہو تو $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{۱}{\text{ن}}}$ کی تمام قیمتیں سلسلہ

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{لا}+\text{خ ما}}،\ \text{سہ}\sqrt[\text{ن}]{\text{لا}+\text{خ ما}}،\ \text{سہ}^{۲}\sqrt[\text{ن}]{\text{لا}+\text{خ ما}}،\ \ldots،\ \text{سہ}^{\text{ن}-۱}\sqrt[\text{ن}]{\text{لا}+\text{خ ما}}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثالیں

(۱) $(-۱)^{\frac{۱}{۵}}$ اور نیز $(-۱)^{\frac{۱}{۶}}$ کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(۲) $(۱+\sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۴}}$ کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(285)

۱۸۴ ــــــ اب ہم یہ دکھائینگے کہ ایک ملتف عدد کے ن ویں جذروں کو ہندسی طور پر کس طرح تعبیر کیا جا سکتا ہے ؛ اس ہندسی طریقہ سے ن ویں جذر کی ن مختلف قیمتوں کے وجود کا خود بخود ثبوت مل جائیگا۔ عمومیت کو نقصان پہنچائے بغیر ہم مقیاس کو ایک (اکائی) فرض کر سکتے ہیں، اس طرح ہمیں جملہ $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی قیمتیں تعبیر کرنی ہیں ۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ پ، ا سے جس پر ط = ۰، چلتا ہے اور اکائی نصف قطر کا دائرہ مرتسم کرتا ہے، تب پ کے کسی محل میں جس کے لیے زاویہ پ و ا جو و پ سے مرتسم ہوا ہے ط ہے نقطہ پ، جملہ جم ط + خ جب ط کو تعبیر کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک دوسرا نقطہ پ، ا سے اُسی آن چلتا ہے جس آن پ نکلا ہے اور فرض کرو کہ اس کی زاویٔ رفتار ہمیشہ پ کی رفتار کا $\frac{1}{\text{ن}}$ رہتی ہے اور اس لیے زاویہ پ و ا ہمیشہ $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کے مساوی رہتا ہے ۔ تب پ، جم $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ + خ جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کو تعبیر کرتا ہے۔ جب، پ اولاً کسی محل پ۱ پر پہنچتا ہے تو

فرض کرو کہ پ، $پ_۱$ پر پہنچتا ہے، تب زاویہ $پ_۱ و ا$، زاویہ $پ_۱ و ا$ کا ن گنا ہے۔ اس لیے $پ_۱$ اُس عدد کی ن ویں قوت کو تعبیر کرتا ہے جو $پ_۱$ سے تعبیر ہوتا ہے، یا اس کے بالعکس $پ_۱$، (جم $ط_۱$ + خ جب $ط_۱$) کے ن ویں جذر کو تعبیر کرتا ہے۔ اب فرض کرو کہ پ دائرہ کے گرد حرکت کرتا ہے تا آنکہ وہ پھر $پ_۱$ پر پہنچتا ہے اور اس طرح زاویہ $ط_۱ + ۲\pi$ مرتسم کرتا ہے، تب $پ_۱$، $پ_۲$ پر پہنچیگا جہاں $پ_۲ و ا = (ط_۱ + ۲\pi) \backslash ن$۔ پھر اگر پ دوسری مکمل گردش کرے اور $پ_۱$ پر پہنچے تو پ، $پ_۳$ پر ہوگا جہاں $پ_۳ و ا = (ط_۱ + ۴\pi) \backslash ن$ اور علیٰ ہذا القیاس۔ نقطے $پ_۱$، $پ_۲$، ...، $پ_ن$ ایک ایسے منتظم کثیر الاضلاع کے راس ہونگے جو اِس دائرہ کے اندر کھینچا گیا ہو اور جس کے ضلعوں کی تعداد ن ہو۔ جب پ، و کے گرد ن سے زیادہ مکمل گردشیں کرتا ہے تو نقطہ پ، محلوں $پ_۱$، $پ_۲$، $پ_۳$ ... پر مکرر پہنچتا ہے۔ نقطوں $پ_۱$، $پ_۲$، ...، $پ_ن$ میں سے ہر نقطہ، (جم $ط_۱$ + خ جب $ط_۱)^{\frac{۱}{ن}}$ کی ایک قیمت کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ اِن نقطوں میں سے کسی نقطہ سے جو جملہ تعبیر ہوتا ہے اُس کی ن ویں قوت وہ جملہ ہے جو نقطہ $پ_۱$ سے تعبیر ہوتا ہے۔ نقطہ $پ_۱$ اُس قیمت کو تعبیر کرتا ہے جو چھوٹی سے چھوٹی دلیل $ط_۱$ کے لیے ہے۔ پس ہمیں (جم $ط_۱$ + خ جب $ط_۱)^{\frac{۱}{ن}}$ کی ن قیمتیں حاصل ہو چکیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ یہ قیمتیں، جم $\frac{ط_۱ + ۲س\pi}{ن}$ + خ جب $\frac{ط_۱ + ۲س\pi}{ن}$ کی مختلف قیمتیں ہیں جبکہ س = ۰، ۱، ۲، ...، ن - ۱

(236)

۱۸۵ ــــــ کسی عدد لا + خ ما کے ن ویں جذروں کو ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ (۱) ہم ایک زاویہ کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کر سکیں اور (۲) ایک دائرہ میں ن ضلعوں والا ایک منتظم کثیر الاضلاع کھینچ سکیں، اور (۳) مقیاس کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ ہم ایک خطِ مستقیم بنا سکیں جس کا طول ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کے طول کا ن واں جذر ہو۔ اکائی (ایک) کے تمام ن ویں جذر

معلوم کرنے کے لیے صرف یہ ضروری ہے کہ ان ہندسی سوالات میں سے دوسرے کو حل کیا جائے کیونکہ اس صورت میں وہ زاویہ صفر ہے جس کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کرنا ہوتا ہے۔ پس ایک دیے ہوئے دائرہ میں ن ضلعوں والا ایک منتظم کثیر الاضلاع کھینچنے کا سوال اِس سوال کے مماثل ہے کہ مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی اصلوں کی عددی قیمتیں حاصل کی جائیں۔ یہ ہندسی سوال حسب ذیل صورتوں میں ایک طریقہ سے حل ہو سکتا ہے جس میں صرف خطوط مستقیم اور دائروں کی ساخت کا عمل شامل ہے:-

(۱) جبکہ ن، ۲ کی کوئی قوت ہو مثلاً جبکہ ن = ۴، ۸، ۱۶، ۳۲

(۲) جبکہ ن، شکل $۲^{۲^{م}} + ۱$ کا ایک مفرد عدد ہو مثلاً جبکہ ن = ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷

اس کو گاس نے اپنی کتاب "*Disquisitiones arith.*" میں ثابت کیا تھا۔

(۳) جبکہ ن، شکل $۲^{۲^{م}} + ۱$ کے متعدد مفرد عددوں اور ۲ کی کسی قوت کا حاصل ضرب ہو مثلاً جبکہ ن = ۱۵، ۸۵، ۲۵۵

گاس کے مسئلہ کا ثبوت اگر ہم دینے بیٹھیں تو عددوں کے نظریہ میں بہت دور تک ہمیں جانا ہوگا؛ تاہم ہم نے دفعہ ۸۵ مثال (۴) میں مخصوص صورت ن = ۱۷ پر بحث کی ہے جہاں جب $\frac{۲\pi}{۱۷}$ کو ایک ایسی شکل میں جو جذروں پر مشتمل ہے معلوم کیا گیا ہے۔

(237)

ڈیموائر کا مسئلہ

۱۸۶ — م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جم م طہ + خ جب م طہ، (جم طہ + خ جب طہ)^{م} کی ایک قیمت ہے۔

یہ مسئلہ جو ڈیموائر کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے، دفعات ۱۸۰ اور ۱۸۱ میں اِن دو صورتوں م = ن اور م = $\frac{۱}{ن}$ کے لیے ثابت

کیا جا چکا ہے جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہو ۔ ثبوت کی تکمیل کے لیے ہمیں اُن صورتوں پر غور کرنا ہے (۱) جبکہ م = $\frac{ف}{ق}$ ، یعنی جبکہ م ایک مثبت کسر ہو، (۲) جبکہ م ایک مثبت غیر منطق عدد ہو اور آخرالامر (۳) جبکہ م کوئی منفی حقیقی عدد ہو۔ یہ ظاہر ہے کہ $(جم\ ط + خ\ جب\ ط)^{\frac{ف}{ق}}$ $= (جم\ ف\ ط + خ\ جب\ ف\ ط)^{\frac{1}{ق}}$ اور اس کی ایک قیمت $جم\ \frac{ف\ ط}{ق} + خ\ جب\ \frac{ف\ ط}{ق}$ ہے ۔ اس لیے مسئلہ بالا درست ہے جبکہ م ایک مثبت منطق عدد ہو ۔

یہ ذہن نشین رہے کہ $(جم\ ط + خ\ جب\ ط)^{\frac{ف}{ق}}$ کی قیمتیں سب کی سب جملہ

$$جم\ \frac{ف(ط + ۲س\ \pi)}{ق} + خ\ جب\ \frac{ف(ط + ۲س\ \pi)}{ق}$$

سے ملتی ہیں جس میں س = ۰، ۱، ۲، ...، ق-۱ اور $\frac{ف}{ق}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ایک منطق کسر ہو ۔

اگر م ایک منطق عدد نہیں ہے تو اس کی تعریف ہمیشہ نامحدود مختلف طریقوں سے منطق عددوں $م_1$، $م_2$، ...، $م_س$، ... کے ایک مستدق تواتر کی انتہا کے طور پر کی جا سکتی ہے ۔ ایسے مستدق تواتر میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اگر صہ اختیاری طور پر انتخاب کردہ کوئی منطق عدد ہو اتنا چھوٹا جتنا ہم چاہیں تو س ہمیشہ معلوم ہو سکتا ہے ایسا کہ $م_س$ اپنے بعد والوں $م_{س+1}$، $م_{س+2}$، .... میں سے ہر ایک سے مطلق قیمت میں اس قدر فرق رکھے جو صہ سے کم ہو ۔ اگر ر کوئی مثبت حقیقی عدد ہے تو $ر^م$ کی

خاص قیمت کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ مستدق تواتر $ر^{م_۱}$، $ر^{م_۲}$، $ر^{م_۳}$، ...، $ر^{م_س}$، .... کی انتہا ہے جہاں ان میں سے ہر عدد حقیقی اور مثبت ہے اور $ر^{م_س}$ اپنی خاص قیمت رکھتا ہے۔ یہ معلوم[1] ہے کہ یہ تواتر مستدق ہے اور اس کی ایک انتہا ہے جو منطق عددوں کے کسی مخصوص تواتر کے تابع نہیں ہے جو (تواتر) غیر منطق عدد م کی تعریف کے لیے استعمال ہوا ہے۔

اگر ی، ملتف عدد ر (جم ط + خ جب ط) کو تعبیر کرے تو $ی^{م}$ کی ایک قیمت کی تعریف جبکہ م ایک غیر منطق عدد ہو اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ تواتر $ر^{م_۱}$ (جم ط + خ جب ط)^{م_۱}، $ر^{م_۲}$ (جم ط + خ جب ط)^{م_۲}، ...، $ر^{م_س}$ (جم ط + خ جب ط)^{م_س}، .... کی انتہا ہے جس میں $ر^{م_س}$ اپنی خاص قیمت رکھتا ہے اور $م_س$ کی تمام قیمتوں کے جواب میں تناظر قیمتیں (جم ط + خ جب ط)^{م_س} کو دی گئی ہیں۔ اس تعریف کے جواب میں $ی^{م}$ کی ایک قیمت تواتر $ر^{م_۱}$ (جم $م_۱$ ط + خ جب $م_۱$ ط)، $ر^{م_۲}$ (جم $م_۲$ ط + خ جب $م_۲$ ط)، ...، $ر^{م_س}$ (جم $م_س$ ط + خ جب $م_س$ ط)، .... کی انتہا ہے۔ چونکہ $ر^{م_س} \to ر^{م}$ اور جم $م_س$ ط + خ جب $م_س$ ط $\to$ جم م ط + خ جب م ط (اس امر کی وجہ سے کہ جم م ط اور جب م ط، م کے مسلسل تفاعل ہیں) ہم دیکھتے ہیں کہ $ی^{م}$ کی ایک قیمت $ر^{م}$ (جم م ط + خ جب م ط) ہے، اور (جم ط + خ جب ط)^{م} کی ایک قیمت جم م ط + خ جب م ط ہے۔ (238)

[1] اس کے ثبوت کے لیے مصنف کی کتاب Theory of functions of a real variable کا صفحہ ۴۴ دیکھو۔ اس کتاب کے پہلے باب میں غیر منطق عددوں کے نظریہ پر مکمل بحث کی گئی ہے۔

پس ڈیموائر کا مسئلہ ایک مثبت غیر منطق قوت نما کے لیے ثابت ہو چکا۔
(جم طہ + خر جب طہ)^م کی عام قیمتیں ہیں

جم م (طہ + ۲ س π) + خر جب م (طہ + ۲ س π)

جس میں س سے کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد تعبیر ہوتا ہے۔ چونکہ م (س₁-س₂) ہرگز ایک صحیح عدد نہیں ہو سکتا جبکہ م غیر منطق ہو ہم دیکھتے ہیں کہ (جم طہ + خر جب طہ)^م کی قیمتوں کا جٹ نامحدود طور پر بڑا ہے۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ی^م کی تعریف جس کی بموجب اس کی قیمتیں جملہ

ر^م {جم م (طہ + ۲ س π) + خر جب م (طہ + ۲ س π)}

کی قیمتیں ہیں ایسی ہے کہ قوت نماؤں کے وہ قوانین جو حقیقی قوت نماؤں پر اطلاق پذیر ہیں غیر منطق قوت نماؤں کے لیے بھی اُسی طرح درست ہیں۔
اگر م منطق یا غیر منطق منفی عدد ۔ ک ہو تو

(جم طہ + خر جب طہ)^م = ۱ / (جم طہ + خر جب طہ)^ک

اور اس کی ایک قیمت ہمیشہ

۱ / (جم ک طہ + خر جب ک طہ) یا جم ک طہ ۔ خر جب ک طہ

ہے جو جم م طہ + خر جب م طہ کے مساوی ہے۔ اس طرح ڈیموائر کا مسئلہ کسی منفی قوت نما کے لیے درست ہے۔

۱۸۷ــــ مسئلہ

(جم طہ₁ + خ جب طہ₁) (جم طہ₂ + خ جب طہ₂) .... (جم طہₙ + خ جب طہₙ)

= جم (طہ₁ + طہ₂ + ... + طہₙ) + خ جب (طہ₁ + طہ₂ + ... + طہₙ)

سے۔ جو ڈیموائر کے مسئلہ کے ثبوت میں استعمال ہوا ہے دفعہ ۴۹ کے مسئلوں (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) کا ثبوت حاصل ہوتا ہے۔ ہم اس متماثلہ کی دائیں جانب کے جملہ کو اس شکل

جم طہ₁ جم طہ₂ ... جم طہₙ (۱ + خ مس طہ₁) (۱ + خ مس طہ₂) ... (۱ + خ مس طہₙ)

میں لکھ سکتے ہیں۔ پس اِس متماثلہ کی طرفین کے حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جم (طہ₁ + طہ₂ + ... + طہₙ) = جم طہ₁ جم طہ₂ ... جم طہₙ (۱ - م₂ + م₄ - ...)،

جب (طہ₁ + طہ₂ + ... + طہₙ) = جم طہ₁ جم طہ₂ ... جم طہₙ (م₁ - م₃ + م₅ - ...)

جہاں مₛ سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو ن مماسوں میں سے س، س مماسوں کے حاصل ضربوں کا ہے۔ (239)

دفعہ ۵۱ کے مسئلے (۳۹)، (۴۰)، (۴۳) مسئلہ جم ن طہ + خ جب ن طہ = (جم طہ + خ جب طہ)ⁿ سے فوراً حاصل ہوتے ہیں اگر اس مساوات کی بائیں جانب کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلایا جائے اور طرفین کے خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھا جائے۔

اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو (جم طہ + خ جب طہ)ⁿ = جم ن طہ + خ جب ن طہ اور اس لیے نیز (جم طہ - خ جب طہ)ⁿ = جم ن طہ - خ جب ن طہ۔ اِن سے ہمیں ضابطے

حاصل ہوتے ہیں جم ن ط = ½ (جم ط + خ جب ط)^ن + ½ (جم ط − خ جب ط)^ن ،

خ جب ن ط = ½ (جم ط + خ جب ط)^ن − ½ (جم ط − خ جب ط)^ن

ان میں سے پہلی مساوات فی الحقیقت اس واقعہ کا اظہار ہے جس کا ذکر دفعہ ۱۸۱ میں آ چکا ہے کہ

۱ + لا جم ط + لا^۲ جم ۲ ط + ۰۰۰ + لا^ن جم ن ط + ۰۰۰۰

ایک متوالی سلسلہ ہے جس کا رشتہ کا پیمانہ ۱ − ۲ لا جم ط + لا^۲ ہے ۔ جم ن ط کو ع_ن سے تعبیر کرو تو ع_ن − ۲ جم ط × ع_ن-۱ + ع_ن-۲ = ۰ ۔ اِس مساوات کو حل کرنے کے لیے مان لو ع_ن = ا ک^ن جیسا کہ بالعموم ایسی صورتوں میں کیا جاتا ہے تو ک کے لیے ہمیں دو درجی مساوات ک^۲ − ۲ ک جم ط + ۱ = ۰ حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں ک = جم ط ± خ جب ط ہیں ؛

پس ع_ن = ا (جم ط + خ جب ط)^ن + ب (جم ط − خ جب ط)^ن

اُس مساوات کا مکمل حل ہے جو ع_ن میں ہے ۔ ن = ۱ اور ن = ۲ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا = ب = ½ اور اس طرح وہ جملہ حاصل ہوتا ہے جو جم ن ط کے لیے اُوپر دیا گیا ہے ۔ اسی طرح وہ جملہ معلوم ہو سکتا ہے جو جب ن ط کے لیے ہے ۔

اجزائے ضربی

۱۸۸ ـــ اب ہم لا^ن − (ا + خ ب) کو لا کے لحاظ سے ن خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں ۔ یہ جملہ معدوم ہوتا ہے اگر لا = (ا + خ ب)^(۱/ن)

(جم ط$_{۱}$ + خ جب ط$_{۱}$) (جم ط$_{۲}$ + خ جب ط$_{۲}$) .... (جم ط$_{ن}$ + خ جب ط$_{ن}$)

= جم (ط$_{۱}$ + ط$_{۲}$ + ... + ط$_{ن}$) + خ جب (ط$_{۱}$ + ط$_{۲}$ + ... + ط$_{ن}$)

سے. جو ڈیموائر کے مسئلہ کے ثبوت میں استعمال ہوا ہے دفعہ ۴۹ کے مسئلوں (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) کا ثبوت حاصل ہوتا ہے۔ ہم اس متماثلہ کی دائیں جانب کے جملہ کو اس شکل

جم ط$_{۱}$ جم ط$_{۲}$ ... جم ط$_{ن}$ (۱ + خ مس ط$_{۱}$) (۱ + خ مس $\frac{ط}{۲}$) ... (۱ + خ مس ط$_{ن}$)

میں لکھ سکتے ہیں۔ پس اِس متماثلہ کی طرفین کے حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جم (ط$_{۱}$ + ط$_{۲}$ + ... + ط$_{ن}$) = جم ط$_{۱}$ جم ط$_{۲}$ ... جم ط$_{ن}$ (۱ - م$_{۲}$ + م$_{۴}$ - ...)،

جب (ط$_{۱}$ + ط$_{۲}$ + ... + ط$_{ن}$) = جم ط$_{۱}$ جم ط$_{۲}$ ... جم ط$_{ن}$ (م$_{۱}$ - م$_{۳}$ + م$_{۵}$ - ...)

(239) جہاں م$_{س}$ سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو ن مماسوں میں سے س، س مماسوں کے حاصل ضربوں کا ہے۔

دفعہ ۵۱ کے مسئلے (۳۹)، (۴۰)، (۴۳) مسئلہ جم ن ط + خ جب ن ط = (جم ط + خ جب ط)^{ن} سے فوراً حاصل ہوتے ہیں اگر اس مساوات کی بائیں جانب کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلایا جائے اور طرفین کے خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھا جائے۔

اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو (جم ط + خ جب ط)^{ن} = جم ن ط + خ جب ن ط اور اس لیے نیز (جم ط - خ جب ط)^{ن} = جم ن ط - خ جب ن ط۔ اِن سے ہمیں ضابطے

حاصل ہوتے ہیں جم ن ط = ۱/۲ (جم ط + خ جب ط)^ن + ۱/۲ (جم ط - خ جب ط)^ن ،

خ جب ن ط = ۱/۲ (جم ط + خ جب ط)^ن - ۱/۲ (جم ط - خ جب ط)^ن

ان میں سے پہلی مساوات فی الحقیقت اس واقعہ کا اظہار ہے جس کا ذکر دفعہ ۱۸ میں آچکا ہے کہ

۱ + لا جم ط + لا^۲ جم ۲ ط + ... + لا^ن جم ن ط + ...

ایک متوالی سلسلہ ہے جس کا رشتہ کا پیمانہ ۱ - ۲ لا جم ط + لا^۲ ہے۔ جم ن ط کو ع_ن سے تعبیر کرو تو ع_ن - ۲ جم ط × ع_ن-۱ + ع_ن-۲ = ۰ ۔ اِس مساوات کو حل کرنے کے لیے مان لو ع_ن = ا ک^ن جیسا کہ بالعموم ایسی صورتوں میں کیا جاتا ہے تو ک کے لیے ہمیں دو درجی مساوات ک^۲ - ۲ ک جم ط + ۱ = ۰ حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں ک = جم ط ± خ جب ط ہیں،

پس ع_ن = ا (جم ط + خ جب ط)^ن + ب (جم ط - خ جب ط)^ن

اُس مساوات کا مکمل حل ہے جو ع_ن میں ہے۔ ن = ۱ اور ن = ۲ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا = ب = ۱/۲ اور اس طرح وہ جملہ حاصل ہوتا ہے جو جم ن ط کے لیے اوپر دیا گیا ہے۔ اسی طرح وہ جملہ معلوم ہو سکتا ہے جو جب ن ط کے لیے ہے۔

اجزائے ضربی

۱۸۸ـــــ اب ہم لا^ن - (ا + خ ب) کو لا کے لحاظ سے ن خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں۔ یہ جملہ معدوم ہوتا ہے اگر لا = (ا + خ ب)^(۱/ن)

کی قیمتوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو، اگر اس جملہ کی ن قیمتیں ق، ق، ق، ...، ق سے تعبیر ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$لا^{ن} - (ا + خ ب) = (لا - ق_{۱})(لا - ق_{۲}) \ldots (لا - ق_{ن})$$

کیونکہ جب، $لا - ق_{س} = ۰$ تو $لا^{ن} - (ا + خ ب)$ معدوم ہوتا ہے اور اس لیے $لا - ق_{س}$ ایک جزو ضربی بغیر باقی کے ہونا چاہیئے۔ اس طرح ہمیں ن مختلف اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں اور ظاہر ہے کہ ان سے زیادہ اجزائے ضربی نہیں ہو سکتے۔ رکھو ا = رجم ط، ب = رجب ط تو $لا^{ن} - (ا + خ ب)$ کے اجزائے ضربی ہو جاتے ہیں

$$\prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left\{ لا - غہ \left(جم \frac{ط + ۲ س \pi}{ن} + خ جب \frac{ط + ۲ س \pi}{ن} \right) \right\}$$

جسمیں $غہ = \sqrt[ن]{ر} = (ا^{۲} + ب^{۲})^{\frac{۱}{۲ن}}$

اس نتیجہ سے متعدد جملوں کے اجزائے ضربی جو ساتویں باب میں حاصل کیے جا چکے ہیں ماخوذ ہو سکتے ہیں۔

(240)

(۱) فرض کرو ا = ۱، ب = ۰ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$لا^{ن} - ۱ = \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left(لا - جم \frac{۲ س \pi}{ن} - خ جب \frac{۲ س \pi}{ن} \right)،$$

اور چونکہ $\frac{۲ س \pi}{ن} + \frac{۲ (ن - س) \pi}{ن} = ۲ \pi$

اس لیے اگر ن طاق ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = (\text{لا} - ۱) \prod_{\text{س}=۱}^{\text{س}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)} \left(\text{لا} - \text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} - \text{خ جب}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا} - \text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}\right)$$

$$= (\text{لا} - ۱) \prod_{\text{س}=۱}^{\text{س}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)} \left(\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} + ۱\right)$$

اور اگر ن جفت ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = (\text{لا} - ۱)(\text{لا} + ۱) \prod_{\text{س}=۱}^{\text{س}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)} \left(\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} + ۱\right)$$

(۲) فرض کرو ا = -۱، ب = ۰. تو ہمیں ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = (\text{لا} + ۱) \prod_{\text{س}=۰}^{\text{س}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۳)} \left(\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲\,\text{س}+۱)\pi}{\text{ن}} + ۱\right)$$ جبکہ ن طاق ہو؛

اور $$\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = \prod_{\text{س}=۰}^{\text{س}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)} \left(\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲\,\text{س}+۱)\pi}{\text{ن}} + ۱\right)،$$ جبکہ ن جفت ہو۔

$$(۳) \quad \text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ط} + ۱$$

$$= \left(\text{لا}^{\text{ن}} - \text{جم}\,\text{ط} - \text{خ جب}\,\text{ط}\right)\left(\text{لا}^{\text{ن}} - \text{جم}\,\text{ط} + \text{خ جب}\,\text{ط}\right)$$

$$= \prod_{\text{س}=۰}^{\text{س}=\text{ن}-۱} \left(\text{لا} - \text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} - \text{خ جب}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا} - \text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}\right)$$

$$= \prod_{\text{س}=۰}^{\text{س}=\text{ن}-۱} \left(\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} + ۱\right)$$

یا لا کی بجائے $\frac{لا}{ما}$ رکھنے اور طرفین کو $ما^{۲ن}$ سے ضرب دینے سے

$$لا^{۲ن} - ۲ لا^{ن} ما^{ن} جم ط + ما^{۲ن}$$

$$= \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left(لا^{۲} - ۲ لا ما جم \frac{ط + ۲ س \pi}{ن} + ما^{۲} \right)$$

(۴) اِس آخری نتیجہ سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$لا^{ن} + لا^{-ن} - ۲ جم ط = \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left(لا + لا^{-۱} - ۲ جم \frac{ط + ۲ س \pi}{ن} \right)$$

رکھو $لا = جم فہ + خ جب فہ$، تو $لا^{-۱} = جم فہ - خ جب فہ$

اور $لا^{ن} = جم ن فہ + خ جب ن فہ$، $لا^{-ن} = جم ن فہ - خ جب ن فہ$

اس لیے، ط کو ن ط میں بدلنے سے،

$$جم ن فہ - جم ن ط = ۲^{ن-۱} \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left\{ جم فہ - جم \left(ط + \frac{۲ س \pi}{ن} \right) \right\}.$$

(241)

دائرہ کے خواص

۱۸۹ــــ دفعہ ماسبق کے اجزائے ضربی والے ضابطوں کے ذریعہ دائرہ کے بعض مشہور خواص حاصل ہو سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ نصف قطر ا کے ایک دائرہ میں ن ضلعوں والا ایک کثیر الاضلاع $ا_۱ ا_۲ \ldots ا_ن$ کھینچا گیا ہے اور فرض کرو کہ دائرے کے مستوی میں پ کوئی نقطہ ہے

اور اس کا فاصلہ دائرہ کے مرکز و سے ج ہے۔ فرض کرو کہ زاویہ پ و ا کو ط سے تعبیر کیا گیا ہے، تب زاویے پ و $ا_۱$، پ و $ا_۲$ ... علی الترتیب ط + ۲π\ن، ط + ۴π\ن، ... ہیں۔ اس لیے

$$پ ا_۱^۲ \times پ ا_۲^۲ ... پ ا_ن^۲ = \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left\{ ا^۲ - ۲ ا ج جم \left(ط + \frac{۲ س π}{ن} \right) + ج^۲ \right\}$$

پس، ہمیں مسئلہ حاصل ہوتا ہے

$$پ ا_۱^۲ \times پ ا_۲^۲ \times ... \times پ ا_ن^۲ = ا^{۲ن} - ۲ ا^ن ج^ن جم ن ط + ج^{۲ن}$$

جو دائرہ کی ڈیموائر کی خاصیت کے نام سے مشہور ہے۔

اُس صورت میں جبکہ پ محیط پر ہو مسئلہ بالا ہو جاتا ہے

$$پ ا_۱ \times پ ا_۲ \times ... \times پ ا_ن = ۲ ا^ن جب \tfrac{۱}{۲} ن ط$$

اُس صورت میں جبکہ پ، نصف قطر و ا پر ہو ط صفر ہوتا ہے اور مسئلہ ہو جاتا ہے

$$پ ا_۱ \times پ ا_۲ \times ... \times پ ا_ن = ا^ن \sim ج^ن$$

نیز اگر پ، زاویہ $ا_ن$ و $ا_۱$ کے ناصف پر واقع ہو تو ط = $\frac{π}{ن}$ اور مسئلہ ہو جاتا ہے

$$پ ا_۱ \times پ ا_۲ ... پ ا_ن = ا^ن + ج^ن$$

یہ آخری دو صورتیں دائرہ کی کوٹ (Cote) کی خاصیتیں کہلاتی ہیں۔

مثالیں

۱۹۰ —

(۱) $\text{لا}^{\text{م}-۱} \Big/ (۱+\text{لا}^{\text{ن}})$ کو جزوی کسور میں بیان کرو جہاں م ایک صحیح عدد ہے ن سے چھوٹا۔

اگر مساوات $\text{لا}^{\text{ن}}+۱=۰$ کی ایک اصل عہ ہو تو جزو ضربی لا ـ عہ کے جواب میں جزوی کسر ہے $\dfrac{\text{ع}^{\text{م}-۱}}{\text{ن}\,\text{ع}^{\text{ن}-۱}} \times \dfrac{۱}{\text{لا}-\text{ع}}$ یا $\dfrac{۱}{\text{ن}}\,\dfrac{\text{ع}^{\text{م}-\text{ن}}}{\text{لا}-\text{ع}}$، اور اس لیے عہ کی مزدوج قیمتوں کے جواب میں جو دو کسریں ہیں ان کو باہم لینے سے ہمیں کسر حاصل ہوتی ہے

$$\frac{۱}{\text{ن}}\;\frac{۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}(\text{ن}-\text{م})\pi-۲\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}(\text{ن}-\text{م}+۱)\pi}{\text{لا}^۲-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}\pi+۱}$$

$$\text{یا}\quad\frac{۲}{\text{ن}}\;\frac{\text{جم}\,(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}-۱}{\text{ن}}\pi-\text{لا}\,\text{جم}\,(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}}{\text{ن}}\pi}{\text{لا}^۲-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}\pi+۱}\,،$$

اگر ن طاق ہو تو مزید کسر $\dfrac{(-۱)^{\text{ن}-\text{م}}}{\text{ن}\,(\text{لا}+۱)}$ حاصل ہوتی ہے۔ پس اگر ن طاق ہے تو (242)

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}-۱}}{۱+\text{لا}^{\text{ن}}}=\frac{(-۱)^{\text{ن}-\text{م}}}{\text{ن}\,(\text{لا}+۱)}+\frac{۲}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۳)}\frac{\text{جم}\,(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}-۱}{\text{ن}}\pi-\text{لا}\,\text{جم}\,(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}}{\text{ن}}\pi}{\text{لا}^۲-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}\pi+۱}$$

اور اگر ن جفت ہے تو

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}-۱}}{۱+\text{لا}^{\text{ن}}}=\frac{۲}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)}\frac{\text{جم}\,(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}-۱}{\text{ن}}\pi-\text{لا}\,\text{جم}\,(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}}{\text{ن}}\pi}{\text{لا}^۲-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}\pi+۱}$$

(۲) $\dfrac{\text{لا}^{\text{م}-1}}{\text{لا}^{\text{ن}}-1}$ کو جزوی کسروں میں بیان کرو اگر م، ن سے چھوٹا ہو۔

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط}}{\text{لا}^{2\text{ن}} - 2\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + \text{ا}^{2\text{ن}}} = \frac{1}{\text{ن لا}^{\text{ن}-1}} \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \frac{\text{لا} - \text{ا جم}\left(\text{ط} + \frac{2\,\text{ر}\,\pi}{\text{ن}}\right)}{\text{لا}^2 - 2\,\text{لا ا جم}\left(\text{ط} + \frac{2\,\text{ر}\,\pi}{\text{ن}}\right) + \text{ا}^2}$$

کسر $\dfrac{\text{ن}\left(\text{لا}^{2\text{ن}-1} - \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{جم ن ط}\right)}{\text{لا}^{2\text{ن}} - 2\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + \text{ا}^{2\text{ن}}}$ کا نسب نما اجزائے ضربی میں تحلیل ہوسکتا ہے

اور پھر ہر جزو ضربی کے تناظر کسر مثال (۱) کے مطابق معلوم ہوسکتی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ

$$(\text{ا})\quad \frac{\text{ن جب ن ط}}{\text{جب ط}} \times \frac{1}{\text{جم ن ط} - \text{جم ن فہ}} = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \frac{1}{\text{جم ط} - \text{جم}\left(\text{فہ} + 2\,\text{ر}\,\pi \backslash \text{ن}\right)}$$

$$(\text{ب})\quad \frac{\text{ن}^2\,\text{جب ن ط جب ن فہ}}{\text{جب ط}} \times \frac{1}{\left(\text{جم ن ط} - \text{جم ن فہ}\right)^2} = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \frac{\text{جب}\left(\text{فہ} + 2\,\text{ر}\,\pi \backslash \text{ن}\right)}{\left\{\text{جم ط} - \text{جم}\left(\text{فہ} + 2\,\text{ر}\,\pi \backslash \text{ن}\right)\right\}^2}$$

(ا) کی دائیں جانب کا جملہ، جم ط کا ایک جبری تفاعل ہے اور اس لیے مثال (۱) کے مطابق جزوی کسروں میں تحلیل ہوسکتا ہے۔ مساوات (ب)، (ا) کی طرفین کو فہ کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے، یا دوسرے الفاظ میں فہ کو فہ + ھ میں بدل کر مساوات کی طرفین میں ھ کے سروں کو مساوی رکھنے سے۔

(۵) اگر جم ط + جم فہ + جم پہ = ۰، اور جب ط + جب فہ + جب پہ = ۰

تو ثابت کرو کہ جم ۳ ط + جم ۳ فہ + جم ۳ پہ − ۳ جم (ط + فہ + پہ) = ۰،

اور جب ۳ ط + جب ۳ فہ + جب ۳ پہ − ۳ جب (ط + فہ + پہ) = ۰

یہ اُس عام طریقہ کی ایک مثال ہے جو جبری مسئلوں میں حرفوں کی بجائے مختلف قیمتیں رکھ کر مثلثی مسئلوں کو اخذ کرنیکا ہے۔ اگر ا + ب + ج = ۰ تو $ا^۳ + ب^۳ + ج^۳$ = ۳ ا ب ج = ۰؛ فرض کرو ا = جم ط + خ جب ط، ب = جم فہ + خ جب فہ، ج = جم یہ + خ جب یہ تو گویا ہمیں یہ دیا گیا ہے کہ اگر

(جم ط + جم فہ + جم یہ) + خ (جب ط + جب فہ + جب یہ) = ۰،

تو (جم ۳ ط + جم ۳ فہ + جم ۳ یہ) + خ (جب ۳ ط + جب ۳ فہ + جب ۳ یہ)

− ۳ {جم (ط + فہ + یہ) + خ جب (ط + فہ + یہ)} = ۰

اب دونوں مساواتوں میں حقیقی اور خیالی حصوں کو الگ الگ صفر کے مساوی رکھنے سے مسئلہ بالا حاصل ہوجاتا ہے۔

تیرہویں باب پر مثالیں

(243)

۱۔ ثابت کروکہ $\left(\frac{۱ + جب فہ + خ جم فہ}{۱ + جب فہ - خ جم فہ}\right)^{ن}$ = جم ($\frac{۱}{۲}$ ن π − ن فہ) + خ جب ($\frac{۱}{۲}$ ن π − ن فہ)

۲۔ $\{جم ط - جم فہ + خ (جب ط - جب فہ)\}^{ن} + \{جم ط - جم فہ - خ (جب ط - جب فہ)\}^{ن}$

کی قیمت معلوم کرو۔

۳۔ ثابت کروکہ $\frac{(۱ + لا)^{ن} - (۱ - لا)^{ن}}{۲ لا}$

$= ن \left(لا^۲ + س^۲ \frac{π}{ن}\right) \left(لا^۲ + س^۲ \frac{۲ π}{ن}\right) \ldots \left(لا^۲ + س^۲ \frac{ر π}{ن}\right)$

جہاں ر $= \frac{1}{2}$ (ن - ۱) یا $\frac{1}{2}$ ن - ۱ اور ۱ مساوی ہے ایان کے بموجب اس کے کہ ن طاق ہے یا جفت۔

۴ - ثابت کرو کہ

$$۴ \text{ جب } \frac{1}{2}(\text{ب} - \text{ج}) \text{ جب } \frac{1}{2}(\text{ج} - \text{ع}) \text{ جب } \frac{1}{2}(\text{ع} - \text{ب}) \sum \text{جب} (\text{ف ع} + \text{ق ب} + \text{ر ج})$$

$$= \text{جب} \left\{ (\text{ن} + ۱)\text{ع} - \frac{1}{2}(\text{ب} + \text{ج}) \right\} \text{ جب } \frac{1}{2}(\text{ب} - \text{ج}) + \ldots$$

جہاں $\sum$ اُس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جو ف، ق، ر کی تمام ایسی صحیح عددی قیمتوں (بشمول صفر) کے لیے لیا گیا ہے کہ ف + ق + ر = ن

۵ - اگر پ ایک مثبت صحیح عدد ہو اور مساوات $\text{لا}^{\text{پ}} = ۱$ کی اصلیں ع، ب، ج، ... ہوں اور ن، ایک سے بڑی کوئی عددی مقدار ہو تو ثابت کرو کہ $\text{ع}^{\frac{1}{\text{ن}}} + \text{ب}^{\frac{1}{\text{ن}}} + \text{ج}^{\frac{1}{\text{ن}}} + \ldots$ کی حقیقی قیمت صرف مس $\frac{\pi}{\text{ن}}$ \ مس $\frac{\pi}{\text{پ ن}}$ ہے۔

۶ - اگر $(۱ + \text{لا})^{\text{ن}} = \text{ف}_۰ + \text{ف}_۱ \text{ لا} + \text{ف}_۲ \text{ لا}^۲ + \ldots$

تو ثابت کرو کہ $\text{ف}_۰ - \text{ف}_۲ + \text{ف}_۴ - \ldots = ۲^{\frac{\text{ن}}{۲}} \text{ جم } \frac{1}{4} \text{ن} \pi$،

$$\text{ف}_۱ - \text{ف}_۳ + \text{ف}_۵ - \ldots = ۲^{\frac{\text{ن}}{۲}} \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ن} \pi$$

۷ - اگر $\text{لا}_۱$، $\text{لا}_۲$، ...، $\text{لا}_{\text{ن}}$ وہ تناظر اصلیں ہوں جو مساوات $\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲ \text{ لا}^{\text{ن}} \text{ جم ن ط} + ۱ = ۰$ کی اصلوں کے مزدوج جوڑوں سے منتخب کی گئی ہیں اور اگر

$$\text{ف}(\text{ع}) = \sum_{\text{ر}=۱}^{\text{ن}} \text{لا}_{\text{ر}} \text{ جم} \left(\text{ع} + \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف}(\text{ع}_۱) \text{ ف}(\text{ع}_۲) \ldots \text{ف}(\text{ع}_{\text{پ}}) = \left(\frac{1}{2}\text{ن}\right)^{\text{پ}-۱} \left[\text{ف} \left\{ \frac{1}{\text{پ}} (\text{ع}_۱ + \text{ع}_۲ + \ldots + \text{ع}_{\text{پ}}) \right\} \right]^{\text{پ}}$$

۸ ـ اگر عہ، بہ، جہ، ضہ، صہ کوئی پانچ زاویے ہوں ایسے کہ ان کی جیوب التمام کا مجموعہ اور نیز ان کی جیوب کا مجموعہ صفر ہے تو ثابت کرو کہ

$$\sum \text{جم}\,۴\,\text{عہ} = \tfrac{۱}{۲}\sum(\text{جم}\,۲\,\text{عہ})^{۲} - \tfrac{۱}{۲}\sum(\text{جب}\,۲\,\text{عہ})^{۲}\ ،$$

$$\sum \text{جب}\,۴\,\text{عہ} = \sum \text{جب}\,۲\,\text{عہ} \sum \text{جم}\,۲\,\text{عہ}$$

۹ ـ اگر ن مقداروں مس لا، مس ۲ لا، مس $۲^{۲}$ لا، ...، مس $۲^{\text{ن}-۱}$ لا میں سے ایک ایک، دو دو، تین تین، ...، ن ن، کے حاصل ضربوں کے مجموعے $\text{م}_{۱}$، $\text{م}_{۲}$، $\text{م}_{۳}$، ... $\text{م}_{\text{ن}}$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۱ - \text{م}_{۲} + \text{م}_{۴} - \dots = ۲^{\text{ن}}\,\text{جب لا}\,\text{جم}\,(۲^{\text{ن}}-۱)\,\text{لا}\,\text{قم}\,۲^{\text{ن}}\,\text{لا}\ ،$$

$$\text{م}_{۱} - \text{م}_{۳} + \text{م}_{۵} - \dots = ۲^{\text{ن}}\,\text{جب لا}\,\text{جب}\,(۲^{\text{ن}}-۱)\,\text{لا}\,\text{قم}\,۲^{\text{ن}}\,\text{لا}$$

(264) ۱۰ ـ اگر جم(بہ − جہ) + جم(جہ − عہ) + جم(عہ − بہ) = $-\tfrac{۳}{۲}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ن عہ} + \text{جم ن بہ} + \text{جم ن جہ}$$

صفر کے مساوی ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ ن، ۳ کا ضعف ہو؛ اور اگر ن، ۳ کا ضعف ہے تو وہ ۳ جم $\tfrac{۱}{۳}$ ن (عہ + بہ + جہ) کے مساوی ہے۔

۱۱ ـ ثابت کرو کہ لا کی وہ قیمتیں جو مساوات

$$۱ - \text{ن لا} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\lfloor ۳}\text{لا}^{۳} + \dots$$

$$+ (-۱)^{\frac{۱}{۲}\text{ن}(\text{ن}+۱)}\,\text{لا}^{\text{ن}} = ۰$$

کو پورا کرتی ہیں یہ ہیں لا = مس $\frac{(\text{۴ر} + 1)\pi}{\text{۴ن}}$ جس میں ر کوئی صحیح عدد ہے۔

۱۲ - ثابت کرو کہ

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} (-1)^{\text{ر}-1} \frac{\text{جب}^2\, \text{رع}\; \text{جم}^{2\text{ن}-3}\, \text{رع}}{\text{لا}^2 + \text{مس}^2\, \text{رع}} = \frac{(2\text{ن}+1)\,\text{لا}}{(1+\text{لا})^{2\text{ن}+1} - (1-\text{لا})^{2\text{ن}+1}}$$

جس میں $\text{ع} = \frac{\pi}{2\text{ن}+1}$

۱۳ - اگر $\text{ض}_{\text{س}}$ر سے اُن حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہو جو مقداروں

$$\text{مس}^2\, \pi/(2\text{ن}+1)،\ \text{مس}^2\, 2\pi/(2\text{ن}+1)،\ \ldots،\ \text{مس}^2\, \text{ن}\pi/(2\text{ن}+1)$$

میں سے س، س مقداروں کو لینے سے بنتے ہیں جبکہ مقدار $\text{مس}^2\, \text{ر}\pi/(2\text{ن}+1)$ کو خارج کر دیا جائے اور اگر

$$\text{ا}_{\text{ر}} = (-1)^{\text{ر}-1}\, \text{جب}^2\, \text{ر}\pi/(2\text{ن}+1) \times \text{جم}^{2\text{ن}-3}\, \text{ر}\pi/(2\text{ن}+1)$$

تو ثابت کرو کہ $\sum \text{ا}_{\text{ر}} \times \text{ض}_{\text{س}}\text{ر} = 0$ جہاں حاصل جمع ر کی ایک سے ن تک تمام قیمتوں کے لئے لیا گیا ہے اور س کی قیمت ایک سے ن تک کوئی بھی ہے۔

۱۴ - ن ضلعوں والا ایک منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ میں بنایا گیا ہے اور دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے راسوں تک وتر کھینچے گئے ہیں۔ اگر یہ وتر و_1، و_2، ....، $\text{و}_{\text{ن}}$ سے تعبیر ہوں (جس میں ابتدا اُس وتر سے کی گئی ہے جو قریب ترین راس تک کھینچا گیا ہے اور باقی دوسرے ترتیب وار لئے گئے ہیں) تو ثابت کرو کہ مقدار

$و_{1}\,و_{2} + و_{2}\,و_{3} + \cdots + و_{ن-1}\,و_{ن} + و_{ن}\,و_{1}$، اُس نقطہ کے محل پر منحصر نہیں ہے جس سے وتر کھینچے گئے ہیں۔

۱۵۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع کے راس جو ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے $ا_{1}$، $ا_{2}$، ...، $ا_{2ن+1}$ ہیں، اور $ا_{1}$ اور $ا_{2ن+1}$ کے درمیان محیط پر کوئی نقطہ و ہے۔ ثابت کرو کہ طولوں $و ا_{1}$، $و ا_{3}$، ...، $و ا_{2ن+1}$ کا مجموعہ طولوں $و ا_{2}$، $و ا_{4}$، ...، $و ا_{2ن}$ کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۱۶۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع کے مستوی میں پ کوئی نقطہ ہے اور اس نقطہ سے کثیر الاضلاع کے راسوں کے فاصلے $غ_{1}$، $غ_{2}$، ...، $غ_{ن}$ ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\sum_{1}^{ن} \frac{1}{غ^{2}} = \frac{ن}{ر^{2} - ا^{2}} \times \frac{ر^{2ن} - ا^{2ن}}{ر^{2ن} - 2\,ر^{ن}\,ا^{ن}\,جم\,ن\,ط + ا^{2ن}}$$

جہاں دائرہ کا نصف قطر ا ہے اور و سے پ کا فاصلہ ر ہے اور ط وہ زاویہ ہے جو و پ، اُس نصف قطر کے ساتھ بناتا ہے جو کثیر الاضلاع کے کسی راس تک کھینچا گیا ہے۔

۱۷۔ خطوط مستقیم جن کے طول علی الترتیب ۱، ۲، ۳، ...ن کے متناسب ہیں ایک مستقیم الاضلاع شکل بناتے ہیں جس کے خارجی زاویوں میں سے ہر ایک $\frac{2\pi}{ن}$ کے مساوی ہے۔ اگر پہلے اور آخری خطوں کے سِروں کو ملانے سے ایک کثیر الاضلاع بنایا جائے تو ثابت کرو کہ اس کا رقبہ ہے

$$\frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{24}\,جم\,\frac{\pi}{ن} + \frac{1}{ن}\,جم\,\frac{\pi}{ن}\,قم^{2}\,\frac{\pi}{ن}$$

(245) ۱۸۔ منتظم کثیر الاضلاع $ا_{1}\,ا_{2}\,....\,ا_{2م}$ کے ضلعوں کی تعداد ۲م ہے۔ اس کے

حائط دائرہ کے مرکز سے $ا_1 ا_2$، $ا_2 ا_3$، ... $ا_م ا_1$ پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن عمودوں کا حاصلِ ضرب $(\frac{1}{2} و)^{م-1} \overline{م}$ ہے۔

۱۹- اگر $ا_1 ا_2 \dots ا_{2ن}$، $ب_1 ب_2 \dots ب_{2ن}$ دو ہم مرکز اور متشابہاً واقع منتظم کثیر الاضلاع ہوں جن کے ضلعوں کی تعداد ۲ن ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{پ ا_1 \times پ ا_3 \times \dots \times پ ا_{2ن-1}}{پ ا_2 \times پ ا_4 \times \dots \times پ ا_{2ن}} = \frac{پ ب_1 \times پ ب_3 \times \dots \times پ ب_{2ن-1}}{پ ب_2 \times پ ب_4 \times \dots \times پ ب_{2ن}}$$

جہاں اُس ہم مرکز دائرہ پر $پ$ کوئی نقطہ ہے جس کا نصف قطر کثیر الاضلاعوں کے حائط [illegible] کے نصف قطروں کے درمیان وسط تناسب ہے۔

۲۰ - نصف قطر $و$ کے ایک دائرہ کے اندر مرکز سے فاصلہ $ب$ پر ایک نقطہ $و$ لیا گیا ہے اور نقطے $پ_1$، $پ_2$، ...، $پ_ن$ محیط پر لیے گئے ہیں ایسے کہ $پ_1 پ_2$، $پ_2 پ_3$، ...، $پ_ن پ_1$ کے محاذی مرکز $و$ پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$و پ_1 + و پ_2 + \dots + و پ_ن$$

$$= (ا^2 - ب^2)(\overline{و پ_1}^{-1} + \overline{و پ_2}^{-1} + \dots + \overline{و پ_ن}^{-1})$$

۲۱ - ثابت کرو کہ اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو

$$جم\, ن\, ط = 1 + 2ن\, جب \frac{ط}{2}\, جم \frac{ط + \pi}{2} + \frac{ن(ن-1)}{\lfloor 2}\, 2^2\, جب^2 \frac{ط}{2}\, جم \frac{2(ط + \pi)}{2}$$

$$+ \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{\lfloor 3}\, 2^3\, جب^3 \frac{ط}{2}\, جم \frac{3(ط + \pi)}{2} + \dots$$

۲۲ - ثابت کرو کہ ن ضلعوں والے الگ الگ منتظم کثیر الاضلاع جو

نصف قطر ر کے ایک دیے ہوئے دائرہ میں کھینچے جا سکتے ہیں اِن کی تعداد م، صحیح عددوں کی اُس تعداد کا نصف ہے جو ن سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں۔

نیز یہ دِکھاؤ کہ اِن کے ضلعوں کا حاصلِ ضرب $ر^{م}$ ن \ ن - ۲م کے مساوی ہے اگر ن ایک مفرد عدد کی قوت ہو اور $ر^{م}$ کے مساوی ہے اگر ن ایک مفرد عدد کی قوت نہ ہو۔

---

(246)

چودھواں باب

لاتناہی سلسلوں کا نظریہ

۱۹۱ ——— ہم اس باب میں چند مسئلے بیان کرینگے جو لاتناہی سلسلوں کے استدقاق سے متعلق ہیں جبکہ ان کی ارقام حقیقی یا ملتف اعداد ہوں یا متغیرات ۔ ایسے سلسلوں کے نظریہ کی مکمل بحث اس کتاب کے حدود سے باہر ہے، اس لیے ہم اپنی توجہ صرف ان چیزوں تک محدود رکھینگے جو مثلثی سلسلوں کی نوعیت اور ان کی خاصیتوں پر بحث کرنے کے لیے بالکل ضروری ہیں ۔

حقیقی سلسلوں کا استدقاق

۱۹۲ ——— فرض کرو کہ حقیقی عددوں کا کوئی تواتر $\text{ا}_1، \text{ا}_2، \ldots \text{ا}_{\text{ن}} \ldots$ ہے جو کسی مقررہ قانون کی بموجب بنا ہے اور فرض کرو

$$\text{س}_{\text{ن}} = \text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}}$$

اگر $\text{س}_{\text{ن}}$ کی ایک متعین محدود انتہا س ہے جبکہ ن کو نا محدود طور پر بڑھایا جاتا ہے تو لاتناہی سلسلے $\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}} + \ldots$ کو مستدق کہا جاتا ہے اور س کو اس کا انتہائی مجموعہ یا صرف اس کا مجموعہ کہتے ہیں ۔

ہم اس باب میں س$_ن$ کی انتہا کو (جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے) ظاہر کرنے کے لیے ترقیم نہا س$_ن$ استعمال کرینگے جب کبھی یہ انتہا موجود ہو۔

وہ شرط کہ نہا س$_ن$ = س یہ ہے کہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد صہ کے تناظر، خواہ صہ کتنا ہی چھوٹا ہو، ن کی ایک قیمت نَ متعین ہو سکے ایسی کہ س - س$_ن$ کی مطلق قیمت، صہ سے کم رہے تو ن کی ہر قیمت کے لیے جو ن$_{صہ}$ سے بڑی یا اس کے مساوی ہو۔

جب سلسلہ ا$_1$ + ا$_2$ + ... + ا$_ن$ + ...، س کی طرف مستدق ہو تو سلسلہ ا$_{ن+1}$ + ا$_{ن+2}$ + ... مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س - س$_ن$ ہے جس کو ب$_ن$ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ عدد ب$_ن$ کو مستدق سلسلہ ا$_1$ + ا$_2$ + ... + ا$_ن$ + ... کا ن رقموں کے بعد والا باقی کہتے ہیں۔ باقی ب$_1$، ب$_2$، ...، ب$_ن$، ... عددوں کا ایک تواتر بناتے ہیں ایسا کہ نہا ب$_ن$ = ۰، یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ سلسلے کا استدقاق مان لینے کے بعد ہی باقی ب$_ن$ کا کوئی مفہوم ہو سکتا ہے۔ (247)

عدد ا$_{ن+1}$ + ا$_{ن+2}$ + ... + ا$_{ن+م}$ کو ب$_{ن،م}$ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے اور عددوں ب$_{ن،1}$، ب$_{ن،2}$، ب$_{ن،3}$، ... کو ہم ن رقموں کے بعد والے جزوی باقی کہینگے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ یہ جزوی باقی ب$_{ن،م}$، ن اور م کی تمام قیمتوں کے لیے متعین عددوں کے طور پر موجود ہوتے ہیں خواہ دیا ہوا سلسلہ مستدق ہو یا نہ ہو۔

کسی مستدق سلسلہ ا$_1$ + ا$_2$ + ا$_3$ + ... + ا$_ن$ + ... کا انتہائی مجموعہ اکثر $\sum_{1}^{\infty}$ ا سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۱۹۳ ـــــ سلسلہ $ا_1 + ا_2 + ا_3 + \dots + ا_ن + \dots$ ایسا ہو سکتا ہے کہ اعداد $س_ن$ کی کوئی مُعین انتہا نہ ہو جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے۔ حسب ذیل صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں:—

(۱) یہ ہو سکتا ہے کہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد ک کے متناظر خواہ وہ کتنا ہی بڑا ہو ن کی ایک قیمت $ن_ی$ متعین ہو سکے ایسی کہ اعداد $س_{ن_ی}$، $س_{ن_ی+1}$، ....، $س_{ن_ی+م}$، ....
سب کے سب ہم علامت ہوں اور سب کے سب عدداً ک سے بڑے ہوں۔ اس صورت میں $س_ن$، ن کے ساتھ غیر معین طور پر بڑھتا ہے خواہ مثبت سمت میں یا منفی سمت میں؛ اِس صورت میں سلسلہ کو متسع کہتے ہیں۔ اِس اِتساع کے واقعہ کو بعض اوقات نہا $س_ن = \infty$، یا نہا $س_ن = -\infty$ سے تعبیر کرتے ہیں بموجب اس کے کہ $س_ن$ مثبت سمت میں بڑھے یا منفی سمت میں۔

(۲) اگر $س_ن$ مطلق قیمت میں ن کے ساتھ غیر معین طور پر حسب سابق بڑھے مگر $ن_ی$ خواہ کتنا ہی بڑا کیوں نہ لیا جائے $س_{ن_ی}$، $س_{ن_ی+1}$، ...، $س_{ن_ی+م}$، ... میں مثبت اور منفی دونوں رقمیں ہوں تو یہ کہہ سکتے ہیں کہ سلسلہ عدم تعین کے غیر مُعین حدود کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ تاہم اس کو ایسی صورت میں بالعموم متسع کہتے ہیں اور اِتساع کے اِس واقعہ کو نہا $س_ن = \pm\infty$ سے تعبیر کرتے ہیں۔

(۳) یہ ہو سکتا ہے کہ گو $س_ن$ کی کوئی معین انتہا نہ ہو جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے مگر ن کی بڑھتی ہوئی قیمتوں کے ایک تواتر (فرض کرو $ن_۱$، $ن_۲$، ...، $ن_ر$، ....) کا انتخاب کرنا ممکن ہو ایسا کہ $س_ن$ ایک معین انتہا کی طرف مستدق ہو بشرطیکہ ن صرف وہ قیمتیں اختیار کرے جو اس تواتر میں ہیں۔

اس صورت میں سلسلہ کو اہتزازی سلسلہ کہتے ہیں، لیکن بعض اوقات اہتزازی سلسلے متسع کہلاتے ہیں۔ وہ اہتزازی سلسلہ جس میں $س_ن$، ن کی ہر قیمت کے لیے عدداً کسی مستقل مثبت عدد سے کم ہو عدم تعین کے محدود حدود کے درمیان اہتزاز کرنیوالا سلسلہ کہلاتا ہے۔

یہ آسانی کے ساتھ دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر کسی سلسلہ کی رقمیں سب کی سب ایک ہی علامت کی ہوں تو سلسلہ صورت (۱) کے مطابق متسع ہے ورنہ مستدق۔ (248)

سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ... + ن + ...$

اور $\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ... + \frac{۱}{ن} + ...$

دونوں متسع ہیں کیونکہ ہر صورت میں $س_ن$، ن کے ساتھ غیر معین طور پر بڑھتا ہے اور مستقل علامت رکھتا ہے۔

سلسلہ $۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ....$ عدم تعین کے غیر معین حدود کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ کیونکہ $س_ن = -\frac{۱}{۲}ن$ جبکہ ن جفت ہو اور $س_ن = \frac{۱}{۲}(ن + ۱)$ جبکہ ن طاق ہو؛ اس طرح جیسے ن بڑھتا ہے $س_ن$ عددی قیمت میں بڑھتا ہے اور نہا $س_ن = \pm \infty$

سلسلہ $۱ + ۱ - ۲ + ۱ + ۱ - ۲ + ۱ + ۱ - ۲ + ...$ عدم تعین کے

محدود محدود کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ س ن ۱، ۲ یا صفر قیمت اختیار کرتا ہے بموجب اس کے کہ ن کی شکل ۳ ر + ۱، ۳ ر + ۲، یا ۳ ر ہو۔

سلسلہ جب عہ + جب ۲ عہ + ۰۰۰ + جب ن عہ + ۰۰۰۰ جہاں عہ کی کوئی مستقل قیمت ہے جو نہ صفر ہے اور نہ ۲ ‏π کا ضعف ہے عدم تعیین کے محدود انتہاؤں کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ اس صورت میں

$$\text{س}_{\text{ن}} = \text{جب}\,\frac{(\text{ن}+1)\,\text{عہ}}{2}\ \text{جب}\,\frac{\text{ن}\,\text{عہ}}{2}\ \text{قم}\,\frac{\text{عہ}}{2} = \frac{1}{2}\left\{\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{2} - \text{جم}\left(\text{ن}+\frac{1}{2}\right)\text{عہ}\right\}\text{قم}\,\frac{\text{عہ}}{2}$$

پس یہ ظاہر ہے کہ س ن ایک معین انتہا کی طرف مستدق نہیں ہوتا کیونکہ جم (ن + ½) عہ کی کوئی معین انتہا نہیں ہے جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ لیکن س ن، ن کی ہر قیمت کے لیے ½ (۱ + جم $\frac{\text{عہ}}{2}$) قم $\frac{\text{عہ}}{2}$ سے عدداً کم یا اس کے مساوی ہے۔

۱۹۴[1] — سلسلہ ا۱ + ا۲ + ا۳ + ۰۰۰ + ان + ۰۰۰ کے استدقاق کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد عا کے جواب میں خواہ عا کتنا ہی چھوٹا ہو ن کی ایک قیمت ن عا متعین ہو سکے ایسی کہ ن عا رقموں کے بعد جزوی باقی سب کے سب مطلق قیمت میں عا سے کم ہوں۔

یہ دکھانے کے لئے کہ یہ شرط ضروری ہے مان لو کہ سلسلہ مستدق ہے اور اس طرح س کا وجود ہے۔ تب ن کی ایک قیمت ن عا متعین ہو سکتی ہے ایسی کہ

س ـ س ن عا، س ـ س ن عا + ۱، س ـ س ن عا + ۲، ۰۰۰، س ـ س ن عا + م ۰۰۰

سب کے سب مطلق قیمت میں $\frac{1}{2}$ عا سے کم ہیں ۔ اِس سے اِس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ نہا $س_ن = س$ جبکہ عا کی اختیاری قیمتیں حساب میں لیگئی ہوں ۔

اب $ل_{ن_{عا}+1} + ل_{ن_{عا}+2} + \dots + ل_{ن_{عا}+م} = (س - س_{ن_{عا}}) - (س - س_{ن_{عا}+م})$

اور پھر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چونکہ $س - س_{ن_{عا}}$، $س - س_{ن_{عا}+م}$ دونوں عدداً $\frac{1}{2}$ عا سے کم ہیں اس لیے $ل_{ن_{عا}+1} + ل_{ن_{عا}+2} + \dots + ل_{ن_{عا}+م}$ عدداً عا سے کم ہے؛ اور یہ م کی سب قیمتوں ۱، ۲، ۳، ... کے لیے درست ہے ۔

پھر یہ دکھانے کے لیے کہ اوپر کی شرط کافی ہے ہم ایک اصول کی طرف رجوع کرتے ہیں جو استدقاق کے عام اصول کے طور پر مشہور ہے ۔ اِس اصول کے مطابق عددوں کے ایک تواتر $س_1$، $س_2$، ...، $س_ن$، ... کی ایک معین انتہا ہوگی بشرطیکہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد عا کے جواب میں ن کی ایک قیمت $ن_{عا}$ متعین ہو سکے ایسی کہ اعداد (249)

$$س_{ن_{عا}+1} - س_{ن_{عا}}،\ س_{ن_{عا}+2} - س_{ن_{عا}}،\ \dots،\ س_{ن_{عا}+م} - س_{ن_{عا}}،\ \dots$$

سب کے سب مطلق قیمت میں عا سے کم ہوں ۔ پس شرط کے کافی ہونے کے لیے ہمیں صرف یہ دیکھنا ہے کہ آیا $س_{ن_{عا}+م} - س_{ن_{عا}}$، جزوی باقی $ب_{ن_{عا}، م}$ یا $ل_{ن_{عا}+1} + ل_{ن_{عا}+2} + \dots + ل_{ن_{عا}+م}$ کے مساوی ہے ۔

اگر م = ا لیا جائے تو شرط میں یہ بات شامل ہے کہ ن کی

کافی بڑی قیمت لینے سے $ا_{ن+۱}$ اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں؛
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ کے استدقاق کی ضروری شرط یہ ہے کہ
نہا $ا_{ن}$ = ۰ ۔ لیکن یہ شرط بطور خود کافی نہیں ہے ۔

مستدق سلسلہ کے استدقاق کی تیزی ن کی اُس کم سے کم
قیمت سے ناپی جاسکتی ہے جو صہ کی ایک دی ہوئی قیمت کے
تناظر ایسی ہو کہ سب کے سب جزوی باقی $ب_{ن،م}$ مطلق
قیمت میں صہ سے کم ہوں؛ یعنی رقموں کی اُس تعداد سے جن کا
لینا ضروری ہے تاکہ جزوی باقی سب کے سب کسی مقررہ عدد سے
کم ہوں ۔

ہندسی سلسلہ ۱ + لا + $لا^۲$ + ... کی صورت میں جو قیمت $\frac{۱}{۱-لا}$
کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ لا عدداً ایک سے کم ہو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ا_{ن+۱} + \dots + ا_{ن+م} = \frac{لا^{ن}(۱-لا^{م})}{۱-لا}$$

اور لا کو مثبت فرض کرنے سے یہ صہ سے کم ہوگا م کی تمام قیمتوں کے لیے اگر $\frac{لا^{ن}}{۱-لا}$
< صہ ؛ اس صورت میں ن کی مناسب قیمت وہ صحیح عدد ہے جو $\frac{لوک\ صہ + لوک\ (۱-لا)}{لوک\ لا}$
سے عین بڑا ہے ۔ ن کی قیمت بڑھتی ہے جیسے لا بڑھتا ہے، اور اس لیے
اس سلسلہ کے استدقاق کی تیزی گھٹتی ہے جیسے لا بڑھتا ہے؛ لا جب ایک
پر پہنچتا ہے تو ن غیر معین طور پر بڑھتا ہے؛ اس طرح سلسلہ کا استدقاق
غیر معین طور پر سست ہو جاتا ہے ۔ اگر لا = ۱ تو سلسلہ صریحاً ممتنع ہے ۔

۱۹۴ —— اب ہم مستدق سلسلہ $ا_۱ + ا_۲ + \dots + ا_{ن} + \dots$ کی
اُس صورت پر غور کریںگے جس میں مثبت رقمیں غیر معین تعداد میں ہیں اور
نیز منفی رقمیں غیر معین تعداد میں۔ فرض کرو کہ $|ا_{ن}|$ سے $ا_{ن}$ کی عددی قیمت

تعبیر کی گئی ہے، اس طرح |ل_ن|، ل_ن کے مساوی ہے یا -ل_ن کے بموجب اس کے کہ ل_ن مثبت ہے یا منفی - اب سلسلہ

$$|ل_1| + |ل_2| + |ل_3| + \cdots + |ل_ن| + \cdots$$

پر غور کرو۔

اگر یہ آخری سلسلہ مستدق ہے تو اصلی سلسلہ کو مطلقاً مستدق کہتے ہیں لیکن اگر سلسلہ $\sum$ |ل_ن| متسع ہے تو سلسلہ $\sum$ ل_ن کو نیم مستدق یا مشروطاً مستدق یا اتفاقاً مستدق کہتے ہیں۔ (250)

سلسلہ $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ مطلقاً مستدق ہے کیونکہ سلسلہ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$ مستدق ہے؛ لیکن سلسلہ $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ صرف مشروطاً مستدق ہے کیونکہ سلسلہ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ متسع ہے۔

سلسلہ $ل_1 - ل_2 + ل_3 - \cdots$ جس میں ارقام باری باری سے مثبت منفی ہیں ہمیشہ مستدق (مطلقاً یا مشروطاً) ہوگا اگر ہر رقم عدداً رقم مابعد سے بڑی ہو اور نیز نہا ل_ن = ۰ کیونکہ

$$(-1)^ن ب_{ن،م} = (ل_{ن+1} - ل_{ن+2}) + (ل_{ن+3} - ل_{ن+4}) + \cdots$$

$$= ل_{ن+1} - (ل_{ن+2} - ل_{ن+3}) - \cdots$$

اور اس لیے $(-1)^ن ب_{ن،م}$ مثبت ہے اور $ل_{ن+1}$ سے کم ہے یا اس کے مساوی - پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن منتخب ہوسکتا ہے اتنا بڑا کہ $|ب_{ن،م}| < ص$، م کی تمام قیمتوں کے لیے خواہ ص کتنا ہی چھوٹا ہو۔ اس لئے سلسلہ مستدق ہے۔

۱۹۵ ـــــ مشروطاً مستدق سلسلے میں رقموں کی ترتیب کو بدلا جائے

تو بالعموم مجموعہ بدل جائیگا۔ فرض کرو کہ پہلی ف مثبت رقموں کا مجموعہ س$_ف$ ہے اور پہلی ق منفی رقموں کا مجموعہ جن کی علامتیں بدل دی گئی ہیں سَ$_ق$ ہے تب اگر سلسلہ کو دوبارہ مرتب کیا جائے اس طور پر کہ مثبت رقموں کا تواتر نہ بدلے اور نیز منفی رقموں کا تواتر نہ بدلے اور سلسلہ کی پہلی ف + ق رقموں میں سے ف رقمیں مثبت ہوں اور ق رقمیں منفی تو اس طور پر ترتیب یافتہ سلسلہ کا مجموعہ س$_ف$ − سَ$_ق$ کی انتہا ہے جبکہ ف اور ق کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اب چونکہ تواتر س$_ف$، سَ$_ق$ میں سے ہر ایک مثبت رقموں پر مشتمل ہے اس لیے س$_ف$ کی اور سَ$_ق$ کی انتہائیں دونوں محدود اور معین ہیں یا ورنہ لاتمناہی۔ بموجب فرض دونوں محدود اور معین نہیں ہیں کیونکہ دیا ہوا سلسلہ مطلقاً مستدق نہیں ہے، اس لیے س$_ف$، سَ$_ق$ کی انتہاؤں میں سے کم از کم ایک لاتمناہی ہے؛ اگر دونوں انتہائیں لاتمناہی ہیں تو نہا (س$_ف$ − سَ$_ق$) کی قیمت، ف اور ق کی قیمتوں کے دو تواتروں پر منحصر ہوگی۔ اگر س$_ف$، سَ$_ق$ کی انتہاؤں میں سے صرف ایک لاتمناہی ہے تو نہا (س$_ف$ − سَ$_ق$) لاتمناہی ہے اور اس لیے اصلی سلسلہ مستدق نہیں تھا۔ اگر سلسلہ کی اصلی ترتیب $ا_۱ - ا_۲ + ا_۳ - ا_۴ + \ldots$ میں علامتیں باری باری سے مثبت اور منفی ہوں تو ف اور ق نسبتِ تساوی میں غیر معین طور پر بڑے ہو جاتے ہیں، لیکن اگر بالفرض ہم سلسلہ کو ترتیب $ا_۱ + ا_۳ - ا_۲ + ا_۵ + ا_۷ - ا_۴ + \ldots$ میں لکھیں تو ف اور ق نسبت ۲ : ۱ میں غیر معین طور پر بڑے ہو جاتے ہیں، اور س$_{۲ق}$ − سَ$_ق$

اور $\text{س}_\text{ق}$ - $\text{سَ}_\text{ق}$ کی انتہائیں جبکہ ق کو غیر معیّن طور پر بڑھا دیا جائے بالعموم مساوی نہیں ہوتیں۔
مثلاً نیم مستدق سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ پر غور کرو۔ اس کے مجموعہ کو
س سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{س}_{4\text{ن}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{4\text{ن}}$$

$$= \sum_{1}^{\text{ن}} \left(\frac{1}{4\text{ن}-3} + \frac{1}{4\text{ن}-1} - \frac{1}{4\text{ن}-2} - \frac{1}{4\text{ن}} \right)$$

(251)

فرض کرو کہ سلسلہ س میں رقموں کی ترتیب کو بدلا گیا ہے اور اس طرح سلسلہ
$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$ حاصل کیا گیا ہے۔ اس کے مجموعہ کو سَ
سے تعبیر کرو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{سَ}_{3\text{ن}} = \sum_{1}^{\text{ن}} \left(\frac{1}{4\text{ن}-3} + \frac{1}{4\text{ن}-1} - \frac{1}{2\text{ن}} \right)$$

پس

$$\text{سَ}_{3\text{ن}} - \text{س}_{4\text{ن}} = \sum_{1}^{\text{ن}} \left(\frac{1}{4\text{ن}-2} - \frac{1}{4\text{ن}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{1}^{\text{ن}} \left(\frac{1}{2\text{ن}-1} - \frac{1}{2\text{ن}} \right) = \frac{1}{2}\, \text{س}_{2\text{ن}}$$

اس لیے جب ن لا انتہا بڑا ہو تو $\text{سَ} = \frac{3}{2}\,\text{س}$۔ یہ مثال ڈرشلی
(Dirichlet.) نے دی تھی جس نے سب سے اول یہ بتایا کہ نیم مستدق سلسلہ کا
مجموعہ رقموں کی ترتیب پر منحصر ہوتا ہے۔

۱۹۶ ـــــ ریمن (Riemann) نے ثابت کیا ہے کہ نیم مستدق
سلسلہ کی رقموں کو ایسی ترتیب میں مکرر مرتب کیا جا سکتا ہے کہ اس
نئے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ کوئی دی ہوئی قیمت عہ اختیار کر سکے۔

فرض کرو کہ عہ مثبت ہے؛ اول ف مثبت رقمیں لو جہاں ف
ایسا ہے کہ $\text{س}_{\text{ف}-1} < \text{عہ}$ اور $\text{س}_\text{ف} > \text{عہ}$؛ پھر ق منفی رقمیں لو

جہاں قَ ایسا منتخب کیا جائے کہ $س_{ف} - سَ_{ق-1} > عہ$ اور $س_{ف} - سَ_{ق} < عہ$؛
ثانیاً فَ مثبت رقمیں لو ایسی کہ $س_{ف+فَ-1} - سَ_{ق} < عہ$ اور $س_{ف+فَ} - سَ_{ق} > عہ$؛
پھر قَ منفی رقمیں لو ایسی کہ $س_{ف+فَ} - سَ_{ق+قَ} < عہ$ اور $س_{ف+فَ} - سَ_{ق+قَ-1} > عہ$؛
اور علیٰ ہذا القیاس ۔ اس طریقہ پر عمل جاری رکھنے سے ہمیں ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے ایسا کہ اس کا مجموعہ، عہ سے اس قدر فرق رکھتا ہے جو اِس سلسلہ کی آخری رقم سے کم ہے، پس اگر ہم اِس سلسلہ کی رقموں کی تعداد کو لا انتہا بڑا کر دیں تو اس کا مجموعہ عہ کی طرف مستدق ہوگا ۔

یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ رقموں کو ایسی مکرر ترتیب میں رکھا جا سکتا ہے کہ نیا سلسلہ متسع ہو یا یہ کہ وہ اہتزاز کرے ۔

ملتف سلسلوں کا استدقاق

۱۹۷ ——— فرض کرو کہ ملتف عددوں کا ایک تواتری، $ی_1$، $ی_2$، ...، $ی_{ن}$، ... ہے جس میں $ی_{ن}$، $لا_{ن} + خ\, ما_{ن}$ کو تعبیر کرتا ہے جہاں $لا_{ن}$ اور $ما_{ن}$ حقیقی عدد ہیں ۔ فرض کرو

$$س_{ن} = ی_1 + ی_2 + \dots + ی_{ن}،$$

$$سَ_{ن} = لا_1 + لا_2 + لا_3 + \dots + لا_{ن}،$$

$$سً_{ن} = ما_1 + ما_2 + ما_3 + \dots + ما_{ن}$$

اِس طرح $$س_{ن} = سَ_{ن} + خ\, سً_{ن}$$

اگر س کی ایک معین انتہا جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے س ہو جو خود ایک ملتف یا حقیقی عدد ہے تو لا تمناہی سلسلہ

$$ی_۱ + ی_۲ + ی_۳ + \cdots + ی_ن + \cdots$$

کو مستدق کہتے ہیں اور س کو اس کا انتہائی مجموعہ یا صرف مجموعہ۔

وہ شرط کہ س = نہا $س_ن$ یہ ہے کہ $|س - س_ن|$ صفر کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اس طرح اگر

$$س - س_ن = غ_ن (جم طن + خ جب طن)$$

(252) تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے نہا $غ_ن$ = ۰۔ اگر س = س + خ سَ جہاں س اور سَ حقیقی ہیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے س - $س_ن$ = $غ_ن$ جم $ط_ن$، سَ - $سَ_ن$ = $غ_ن$ جب $ط_ن$، تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر نہا $غ_ن$ = ۰ تو نہا (س - $س_ن$) = ۰، نہا (سَ - $سَ_ن$) = ۰، یعنی $س_ن$، $سَ_ن$ علی الترتیب س اور سَ کی طرف مستدق ہوتے ہیں۔ پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ سلسلہ $ی_۱ + ی_۲ + \cdots + ی_ن + \cdots$ کے مستدق ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ دو سلسلے $لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + \cdots$، اور $ما_۱ + ما_۲ + ما_۳ + \cdots$ دونوں مستدق ہونے چاہئیں۔ اِس کے برعکس اگر یہ آخری دو سلسلے مستدق ہیں تو ملتف عددوں کا سلسلہ بھی مستدق ہے، کیونکہ

|(س + خ رَس) - (سن + خ رَسن)| ≥ |س - سن| + |سَ - سَن|

اب اگر نہا سن = س، نہا سَن = سَ تو ہم ن کی ایک قیمت ن صہ منتخب کر سکتے ہیں اتنی بڑی کہ

|س - سن| < ½ صہ، |سَ - سَن| < ½ صہ، بشرطیکہ ن ≥ ن صہ - پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

|(س + خ رَس) - (سن + خ رَسن)| ≥ صہ اگر ن ≥ ن صہ؛ اور چونکہ صہ اختیاری ہے

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے نہا (سن + خ رَسن) = س + خ رَس، اور اس طرح

ملتف عددوں کا سلسلہ مستدق ہے۔ اگر مجموعوں لا، ما میں سے کسی کی

انتہائی قیمت محدود نہ ہو یا ان میں سے کوئی سلسلہ اہتزاز کرے تو سلسلہ ی

مستدق نہیں ہوگا۔

فرض کرو کہ ین = رن (جم طن + خ جب طن)۔ اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ

سلسلہ ی مستدق ہوگا اگر سلسلہ ر جس میں ہر رقم رن تناظر رقم

ین کا مقیاس ہے مستدق ہو۔ دیا ہوا سلسلہ رن (جم طن + خ جب طن)

مستدق ہے بشرطیکہ سلسلوں رن جم طن، رن جب طن میں سے ہر ایک

مستدق ہو۔ اب اعداد رن جم طن، رن جب طن میں سے ہر ایک عددوں ± رن

کے درمیان واقع ہوتا ہے؛ نیز سلسلوں رجم طہ، رجب طہ میں

سے ہر ایک کے لیے عدد سن+م - سن، سلسلہ ر کے تناظر

جزوی باقی سے عدداً کم ہے پس اگر یہ آخری سلسلہ ر مستدق ہے تو

سلسلوں رجم طہ، رجب طہ میں سے ہر ایک مستدق ہے،

اور اس لیے سلسلہ ین مستدق ہے۔

اس کا عکس ضروری نہیں کہ درست ہو، چنانچہ سلسلہ

$\sum$ ن (جم طن + خ جب طن)

مستدق ہوسکتا ہے اور معہذا سلسلہ $\sum$ ن متسع ۔

اگر سلسلہ $\sum$ ن جو مقیاسوں کے مجموعہ سے بنا ہے مستدق ہو تو سلسلہ

$\sum$ ن (جم طن + خ جب طن)

کو **مطلقاً مستدق** کہتے ہیں ۔

مثلاً وہ سلسلہ جس کی عام رقم $ن^{-۲}$(جم ن ط + خ جب ن ط) ہے مطلقاً مستدق ہے کیونکہ سلسلہ $\sum$ $ن^{-۲}$ مستدق ہے؛ لیکن وہ مستدق سلسلہ جس کی عام رقم $ن^{-۱}$(جم ن ط + خ جب ن ط) ہے (جہاں $۲\pi >$ ط > ۰) مطلقاً مستدق نہیں ہے کیونکہ سلسلہ $\sum$ $ن^{-۱}$ متسع ہے ۔

(253)

مسلسل تفاعل

۱۹۸ ــــــ فرض کرو کہ ملتف عدد ی = لا + خ ما کا ایک تفاعل ف(ی) ہے جس کی ایک واحد محدود قیمت ہے ی کی ہر قیمت کے لیئے جو کسی دیئے ہوئے حدود کے درمیان واقع ہے ۔ تب اِس تفاعل کی ایک واحد قیمت ہوگی اُس شکل کے ہر نقطہ کے لیے جو ایک خاص رقبہ کے اندر واقع ہوتی ہے ۔ یہ رقبہ، ی کو تعبیر کرنیوالے مستوی کا کوئی محدود حصہ ہوسکتا ہے یا اس مستوی کا پورا حصہ ۔

کوئی تفاعل نقطہ ی = $ی_۱$ پر **مسلسل** کہلاتا ہے اگر ایک ثبت عدد عا ہمیشہ معلوم کیا جاسکے ایسا کہ ف(ی) ـ ف($ی_۱$) کا

مقیاس کسی مقررہ ثبت عدد صہ سے خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو کم ہوگی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کے لیے ی ۔ ی، کا مقیاس عا سے کم ہے۔ صہ کی ہر قیمت کے لیے عا کی ایک قیمت موجود ہونی چاہیے۔

کوئی تفاعل جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر ہر نقطہ پر اس شرط کو پورا کرے اس رقبہ کے اندر مسلسل کہلاتا ہے۔ رقبہ کا احاطہ ممکن ہے شامل ہو یا ممکن ہے شامل نہ ہو۔

یکساں استدقاق

۱۹۹ ــــــ فرض کرو کہ ی یا لا + خ ما کا ایک تفاعل ف (ی) ہے جو کسی رقبہ میں مسلسل ہے۔ تب اگر

سلسلہ ف، (ی) + ف۲ (ی) + ف۳ (ی) + ... + فن (ی) + ...

مستدق ہو تو ہم اس کے انتہائی مجموعہ کو فا (ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں ۔ فرض کرو کہ مجموعہ

ف، (ی) + ف۲ (ی) + ... + فن (ی)

جہاں ن کوئی مستقل عدد ہے سن (ی) کے مساوی ہے، تب

فن+۱ (ی) + فن+۲ (ی) + ... کے انتہائی مجموعہ کو ن رقموں کے بعد والا باقی کہتے ہیں اور اس کو بن (ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

فا (ی) = سن (ی) + بن (ی)

اب فرض کرو کہ کسی دیے ہوئے مثبت عدد صہ کے جواب میں خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو ن کی ایک قیمت، ی پر غیر منحصر، معلوم کی جاسکتی ہے ایسی کہ ی کی تمام قیمتوں کے لیے جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں ب کا مقیاس صہ سے کم ہے جہاں م ≥ ن تو ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے ی کی اُن تمام قیمتوں کے لیے جو اُس رقبہ میں موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں۔ صحیح عدد ن قیمت میں صہ پر منحصر ہوگا۔

لیکن اگر ی رقبہ کے اندر کسی ثابت قیمت ی کے لا انتہا قریب آئے اور تمام باقیوں ب (ی) کے مقیاس کو صہ سے کم کرنے کے لیے ن کو غیر معین طور پر بڑھتا ہوا فرض کرنا ضروری ہو تو نقطہ ی کے قرب میں سلسلہ یکساں طور پر مستدق نہیں ہوتا اور ہم کہتے ہیں کہ وہ **لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔** (254)

نقطہ ی کو جس کے لیے صہ منتخب ہوسکے ایسا کہ صورت مذکورۂ بالا واقع ہو وہ نقطہ کہتے ہیں جس کے قرب میں استدقاق غیر یکساں ہے یا بعض اوقات اس کو صرف غیر یکساں استدقاق کا نقطہ کہتے ہیں اگر سلسلہ خود اس نقطہ پر مستدق ہو۔ ایسے نقطہ کا احاطہ کرنے والے کسی رقبہ کے لیے یہ ناممکن ہے کہ ن کی کوئی مستقل قیمت مقرر کیجا سکے ایسی کہ اس رقبہ کے اندر ی کی تمام قیمتوں کے لیے ب کے مقیاس کافی طور پر چھوٹی مثبت مقدار صہ سے کم ہوں؛ اور اس لیے یہ سلسلہ یکساں طور پر اِس کل رقبہ میں مستدق نہیں ہوتا۔ اگر ی = ی تو سلسلہ یا مستدق ہوسکتا ہے یا متسع۔

ہم اِس امر کو یوں بیان کرسکتے ہیں :-

فرض کرو کہ جیسے ی کسی ثابت قیمت ی کے نزدیک آتا ہے

ایک مثبت عدد صہ مقرر ہو سکتا ہے ایسا کہ سلسلہ ف$_1$(ی) + ف$_2$(ی) + ف$_م$(ی) + ... کی رقموں کی وہ تعداد ن (جن کا لینا ضروری ہے تاکہ |اب$_م$(ی)| < صہ جہاں م ≥ ن) ی - ی$_1$ کے مقیاس پر منحصر ہو اس طور پر کہ ن مسلسل بڑھتا ہے جیسے مق |ی - ی$_1$| گھٹتا ہے اور لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے جبکہ مق (ی - ی$_1$) لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ ی$_1$ کے قرب میں غیر یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

ایسے کسی نقطہ کے قرب میں سلسلہ کے استدقاق کی شرح لا انتہا تیزی سے متغیر ہوتی ہے اور جب مق |ی - ی$_1$| کو لا انتہا گھٹایا جاتا ہے تو سلسلہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کوئی مستدق عددی سلسلہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق نہیں ہو سکتا؛ مثلاً جب ی = ی$_1$ تو سلسلہ ف$_1$(ی$_1$) + ف$_2$(ی$_1$) + ... کا استدقاق، اگر سلسلہ مستدق ہے تو، لا انتہا سست نہیں ہے؛ صرف اُس صورت میں جبکہ ی متغیر ہو اس طور پر کہ مق |ی - ی$_1$| لا انتہا گھٹے سلسلہ

ف$_1$(ی) + ف$_2$(ی) + ...

لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔ پس یہ کہنے کی بجائے کہ کوئی سلسلہ ایک نقطہ پر غیر یکساں طور پر مستدق ہے یہ کہنا زیادہ صحیح ہے کہ سلسلہ اُس نقطہ کے قریب غیر یکساں طور پر مستدق ہے۔ رقموں کی وہ تعداد ن جن کا لینا ضروری ہے تاکہ باقی ب$_م$(ی) کے مقیاس کافی طور پر چھوٹے عدد صہ سے کم ہو سکیں بڑھتی ہے جیسے ی قیمت ی$_1$ کے نزدیک آتا ہے اور لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے جب مق |ی - ی| مسلسل

گھٹتا جاتا ہے، اور پھر اگر سلسلہ نقطہ ی پر مستدق ہے تو رقموں کی یہ تعداد جا تک ایک محدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔ پس یہ عدد ن خود ایسے نقطہ کے قرب میں غیر مسلسل ہے۔

(255) اگر کسی رقبہ ا میں اس کے ہر نقطہ پر ہمیں حاصل ہو

$$|ف_۱(ی)| \leqslant ا_۱'، |ف_۲(ی)| \leqslant ا_۲'، \ldots، |ف_ن(ی)| \leqslant ا_ن'\ldots$$

جہاں $ا_۱'، ا_۲'، \ldots، ا_ن'\ldots$ مستقل مثبت عدد ہیں ایسے کہ سلسلہ $ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + \ldots ا_ن + \ldots$ مستدق ہے تو سلسلہ

$$ف_۱(ی) + ف_۲(ی) + \ldots\ldots$$

رقبہ ا میں یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔ اس مسئلہ سے یکساں استدقاق کی ایک جانچ ملتی ہے جو خاص خاص صورتوں پر استعمال کرنے میں بڑے کام آتی ہے؛ اس کو ویرسٹراس کی جانچ کہتے ہیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر صہ کوئی اختیاری طور پر منتخب کردہ مثبت عدد ہو تو $ن_{صہ}$ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $ا_{ن+۱}' + ا_{ن+۲}' + \ldots + ا_{ن+م}'$ م کی ہر قیمت کے لیے صہ سے کم ہو جہاں $ن \geqslant ن_{صہ}$۔ نیز ی کی ہر قیمت کے لیے

$$\left| ف_{ن+۱}(ی) + ف_{ن+۲}(ی) + \ldots + ف_{ن+م}(ی) \right|$$

کا مقیاس، $ا_{ن+۱}' + ا_{ن+۲}' + \ldots + ا_{ن+م}'$ سے بڑا نہیں ہے اور اس لیے صہ سے کم ہے۔ چونکہ م کی ہر قیمت کے لیے یہ درست ہے ہم دیکھتے ہیں کہ ملتف سلسلہ مستدق ہے اور ی کی ہر قیمت کے لیے $|ب_ن(ی)| < صہ$،

بشرطیکہ ن ≥ نِ صہ - اس لیے سلسلہ رقبہ ا میں یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے -

نوٹ :- بعض مصنفین سلسلہ کو ایک دیے ہوئے رقبہ میں یکساں مستدق اُس وقت کہتے ہیں جبکہ ایک عدد ن معلوم ہوسکے ایسا کہ ی کی تمام قیمتوں کے لیے باقی بن کا مقیاس صہ سے کم ہو - لیکن ہماری تعریف جو اس کتاب میں دی گئی ہے اِس تعریف سے زیادہ سخت ہے؛ ایسے سلسلوں کا بنانا ممکن ہے جو ہماری تعریف کی بموجب یکساں طور پر مستدق نہ ہوتے ہوں لیکن اُس تعریف کی بموجب ہوں جو دیگر مصنفین بیان کرتے ہیں-

۲۰۰ ——— اگر تفاعلات ف۱ (ی)، ف۲ (ی)، ... مسلسل ہوں ی کی تمام قیمتوں کے لیے جو ایک دیے ہوئے رقبہ ا میں موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں تو تفاعل فا (ی) جو مستدق سلسلہ ∑ ف (ی) کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے ایک مسلسل تفاعل ہے ی کی تمام قیمتوں کے لیے جو اِس رقبہ ا میں موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں بشرطیکہ سلسلہ ∑ ف (ی) پورے رقبہ ا میں یکساں طور پر مستدق ہو -

کیونکہ ہمیں حاصل ہوتا ہے فا (ی) = سن + بن جہاں ن ثبت صحیح عدد ہے ایسا کہ ی کی زیر بحث تمام قیمتوں کے لیے بن کا مقیاس صہ سے کم ہے - فرض کرو کہ ی میں مف ی کا اضافہ کر دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ اِس اضافہ کے تمناظر فا (ی)، سن، اور بن میں اضافے علی الترتیب مف فا (ی)، مف سن، مف بن ہیں - تب چونکہ بموجب فرض بن اور بن + مف بن کے مقیاس دونوں صہ سے کم ہیں اس لیے مف بن کا مقیاس ۲ صہ سے کم ہے -

نیز چونکہ سن، ی کا ایک مسلسل تفاعل ہے اس لیے اگر مف ی کا
مقیاس کافی چھوٹا ہو تو مف سن کا مقیاس صہ سے کم ہوگا؛ پس
اگر مق مف ی ایک خاص قیمت سے کم ہو تو مف سن + مف بن کا
یا مف فا (ی) کا مقیاس ۳ صہ سے کم ہے کیونکہ مف سن + مف بن (256)
کا مقیاس مف سن اور مف بن کے مقیاسوں کے مجموعہ سے بڑا
نہیں ہے۔ اب ۳ صہ کو ہم اتنا چھوٹا لے سکتے ہیں جتنا چاہیں، اس لیے
مف ی کو کافی چھوٹا لینے سے مق مف فا (ی) کو اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا
ہے جتنا ہم چاہیں؛ اِس کے وہی معنے ہیں کہ تفاعل فا (ی) مسلسل ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس ثبوت کے لیے یکساں استدقاق کی وہ کم
سخت تعریف کافی ہے جو دفعہ ۱۹۹ کے نوٹ میں دی گئی ہے۔

۲۰۱ ——— اگر ی کی قیمت ی۱ کے لیے اس کے قرب میں سلسلہ کا
استدقاق غیر یکساں ہو تو یہ ضروری نہیں ہے کہ سلسلہ کا مجموعہ مسلسل ہو؛
اس صورت میں دفعہ ماسبق کا استدلال ناکام رہتا ہے۔ تفاعل فن (ی)
کی انتہائی قیمت جبکہ ی = ی۱، فن (ی۱) ہے لیکن اس سے یہ مستنبط نہیں ہوتا کہ
جیسے ی، ی۱ کی طرف مستدق ہوتا ہے $\sum^{\infty}$ {فن (ی) - فن (ی۱)} صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔
ہم مجموعہ $\sum^{\infty}$ {فن (ی) - فن (ی۱)} کو فا (ن، ی - ی۱) سے
تعبیر کر سکتے ہیں جو ن اور ی - ی۱ کا تفاعل ہے۔ اب جبکہ ی کو پہلے
ی۱ کے مساوی بنایا جاتا ہے اور پھر ن کو لاتناہی بنایا جاتا ہے تو
فا (ن، ی - ی۱) کی انتہائی قیمت صفر ہے، لیکن اگر ن کو پہلے لاتناہی
بنایا جائے اور بعد میں ی - ی۱ کو صفر تو فا (ن، ی - ی۱) کی انتہائی قیمت کا

صفر ہونا ضروری نہیں ہے۔

اِس واقعہ کی تمثیل کے لیے اسٹوکس (Stokes) حقیقی سلسلہ

$$\frac{\text{۱} + \text{۵}\,\text{لا}}{\text{۲}(\text{۱}+\text{لا})} + \cdots + \frac{\text{لا}(\text{لا}+\text{۲})\,\text{ن}^{\text{۲}} + \text{لا}(\text{۴}-\text{لا})\,\text{ن} + \text{۱} - \text{لا}}{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})\{(\text{ن}-\text{۱})\text{لا}+\text{۱}\}(\text{ن}\,\text{لا}+\text{۱})} + \cdots$$

پر غور کرتا ہے۔ اگر لا = ۰ تو یہ سلسلہ ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۱}\times\text{۲}} + \cdots + \frac{\text{۱}}{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})} + \cdots$$

اب سلسلہ بالا کی عام رقم ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})} + \frac{\text{۲}\,\text{لا}}{\{(\text{ن}-\text{۱})\text{لا}+\text{۱}\}(\text{ن}\,\text{لا}+\text{۱})}$$

یا

$$\left\{\frac{\text{۱}}{\text{ن}} + \frac{\text{۲}}{(\text{ن}-\text{۱})\text{لا}+\text{۱}}\right\} - \left\{\frac{\text{۱}}{\text{ن}+\text{۱}} + \frac{\text{۲}}{\text{ن}\,\text{لا}+\text{۱}}\right\}$$

اس لیے سلسلہ کا مجموعہ ۳ ہے خواہ لا کوئی قیمت سوائے صفر کے اختیار کرے۔

سلسلہ $\frac{\text{۱}}{\text{۱}\times\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}\times\text{۳}} + \cdots$ کا مجموعہ ایک ہے اور اس لیے دیے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ، لا کی قیمت صفر کے قرب میں غیر مسلسل ہے۔

ن رقموں کے بعد باقی $\frac{\text{۱}}{\text{ن}+\text{۱}} + \frac{\text{۲}}{\text{ن}\,\text{لا}+\text{۱}}$ ہے؛ اِس کو صہ کے مساوی رکھنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ن} = \frac{\left\{\text{لا}+\text{۲}-\text{صہ}(\text{لا}+\text{۱}) + \sqrt{\{\text{صہ}(\text{لا}+\text{۱})-(\text{لا}+\text{۲})\}^{\text{۲}} - \text{۴}\,\text{صہ}\,\text{لا}(\text{صہ}-\text{۳})}\right\}}{\text{۲}\,\text{صہ}\,\text{لا}}$$

جو لا انتہا بڑھتا ہے جیسے لا، لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔ اس لیے دیا ہوا سلسلہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے جبکہ لا، لا انتہا چھوٹا ہو۔ سلسلہ کے مجموعہ میں عدم تسلسل کی یہی وجہ ہے۔

(257) سلسلوں کے یکساں اور غیر یکساں استدقاق کے درمیان امتیاز کا انکشاف بالعموم سیڈیل (Siedel)

سے منسوب کیا جاتا ہے جس نے اپنا مضمون "Note über eine Eigenschaft" بیویرین اکاڈیمی کے "Transactions" بابتہ ۱۸۴۸ء میں شایع کیا تھا۔ لیکن یہ نظریہ اس سے قبل اسٹوکس نے ایک مقالہ[1] "On the Critical Values of the sums" میں شایع کیا تھا جس کو اُس نے کیمبرج فلاسفیکل سوسائٹی کے روبرو ۶ دسمبر ۱۸۴۷ء کو پڑھا تھا۔ اگرچہ اِس نظریہ کو سیڈیل نے اسٹوکس کی بہ نسبت بعض باتوں میں زیادہ مکمل طور پر بیان کیا ہے تاہم اسٹوکس کو اس امر میں سبقت حاصل ہے کہ اُس نے اُن تفاعلوں کے عدم تسلسل کی اصلی وجہ دریافت کی جو لامتناہی سلسلوں سے تعبیر ہوتے ہیں[2]۔ اس مضمون میں حال میں جو ترقی ہوئی ہے اُس میں یکساں اور غیر یکساں استدقاق کے درمیانی امتیاز کو بہت اہمیت حاصل ہے۔

سیڈیل نے اِس امر کو حسب ذیل مسئلہ میں مختصر کر دیا ہے :۔ اگر ایک مستدق سلسلہ دیا جائے جس کی واحد ارقام متغیری کے مسلسل تفاعل ہیں اور جو ی کے ایک غیر مسلسل تفاعل کو تعبیر کرتا ہے تو ایک نقطہ کے عین قرب میں جہاں تفاعل غیر مسلسل ہے ی کی قیمتیں مقرر کی جا سکتی ہیں ایسی کہ اِن کے لیے سلسلہ اِتنی سست رفتار سے مستدق ہو جتنی ہم چاہیں۔

سلسلہ ہندسیہ

۲۰۲ ـــــ سلسلہ ہندسیہ $۱ + ی + ی^۲ + \cdots + ی^{ن-۱}$ پر غور کرو جہاں $ی = لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط)$ ۔ اس سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{۱ - ی^ن}{۱ - ی} \quad یا \quad \frac{۱ - ر^ن (جم ن ط + خ جب ن ط)}{۱ - ر (جم ط + خ جب ط)}$$

رکھو $\quad ۱ - ر جم ط = غہ جم فہ ، \quad ر جب ط = غہ جب فہ$

---

[1] دیکھو Stoke's "Collected Works" Vol. I.

[2] اس انکشاف کی تاریخ کے لیے دیکھو "Reiff's "Geschichte . . . .

تو $\text{غہ} = +\sqrt{\text{۱} - \text{۲ ر جم طہ} + \text{ر}^{\text{۲}}}$

پس مجموعہ ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{غہ}}(\text{جم فہ} + \text{خ جب فہ}) - \frac{\text{ر}^{\text{ن}}}{\text{غہ}}\left\{\text{جم (ن طہ + فہ)} + \text{خ جب (ن طہ + فہ)}\right\} \text{؛}$$

اور ن کو جب لا انتہا بڑا کر دیا جاتا ہے تو اس مجموعہ کی دوسری رقم کا مقیاس لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے اگر ر < ۱ ؛ لیکن اگر ر > ۱ تو یہ لامتناہی ہو جاتا ہے

پس یہ لامتناہی سلسلہ

$$\text{۱} + \text{ی} + \text{ی}^{\text{۲}} + \ldots + \text{ی}^{\text{ن}-\text{۱}} + \ldots$$

مستدق ہوتا ہے اگر ی کا مقیاس ایک سے کم ہو اور تب اس کا مجموعہ ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{غہ}}(\text{جم فہ} + \text{خ جب فہ}) = \frac{\text{۱} - \text{ر جم طہ} + \text{خ ر جب طہ}}{\text{۱} - \text{۲ ر جم طہ} + \text{ر}^{\text{۲}}}$$

اگر ی کا مقیاس ایک سے بڑا ہو تو سلسلہ متسع ہوگا؛ اور اگر مق ی ایک ہو تو بھی سلسلہ مستدق نہیں ہوگا کیونکہ دو سلسلوں کے جم ن طہ اور کے جب ن طہ کے مجموعے جو دفعہ ۲۷ میں معلوم کیے جا چکے ہیں ایک معین انتہا پر نہیں پہنچتے جبکہ ن کو لا انتہا بڑا کر دیا جاتا ہے۔

سلسلہ اور اس کے مجموعہ کے حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{۱} - \text{ر جم طہ}}{\text{۱} - \text{۲ ر جم طہ} + \text{ر}^{\text{۲}}} = \text{۱} + \text{ر جم طہ} + \text{ر}^{\text{۲}}\text{ جم ۲ طہ} + \ldots + \text{ر}^{\text{ن}}\text{ جم ن طہ} + \ldots\text{،}$$

$$\frac{\text{ر جب طہ}}{\text{۱} - \text{۲ ر جم طہ} + \text{ر}^{\text{۲}}} = \text{ر جب طہ} + \text{ر}^{\text{۲}}\text{ جب ۲ طہ} + \ldots + \text{ر}^{\text{ن}}\text{ جب ن طہ} + \ldots\text{؛}$$

یہ سلسلے ر کی تمام قیمتوں کے لیے جو ±۱ کے درمیان واقع ہوں درست ہیں سوائے ر = ۱ اور ر = -۱ کے جن کے لیے یہ سلسلے مستدق نہیں ہیں۔ اس کا مشاہدہ کرنے کے لیے ابتدائی سلسلہ میں صرف ی کی بجائے -ی

(258)

رکھنے کی ضرورت ہے۔

سلسلہ ہندسیہ، ی کی تمام قیمتوں کے لیے یکساں طور پر مستدق ہے اگر ی کا مقیاس ≽ ۱ - ضہ سے. جہاں ضہ کوئی مستقل ثبت عدد ہے خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔ کیونکہ پہلی ن رقموں کے بعد باقی $\frac{ی^ن}{۱ - ی}$ ہے اور اس کا مقیاس $\frac{(۱ - ضہ)^ن}{ضہ}$ سے کم ہے؛ تب سلسلہ ایسا ہوگا کہ ی کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کا مقیاس ≽ ۱ - ضہ سے

$$|ب_ن(ی)| \leqslant صہ$$

اگر $\frac{(۱ - ضہ)^ن}{ضہ} < صہ$، یا اگر ن $> \frac{لوک\ ضہ + لوک\ صہ}{لوک\ (۱ - ضہ)}$

پس چونکہ ن کا منتخب کرنا ممکن ہے اس طرح کہ ی کی تمام قیمتوں کے لیے (جن کے مقیاس ≽ ۱ - ضہ سے) ن رقموں کے بعد والے باقی صہ سے کم ہوں اور چونکہ ن کی اس سے تمام بڑی قیمتوں کے لیے یہ درست ہے اس لیے ایسی تمام قیمتوں کے لیے سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

اس طرح یہ ثابت ہو چکا کہ سلسلہ ہندسیہ کسی ایسے دائرہ سے محدود رقبہ میں یکساں طور پر مستدق ہے جو اکائی نصف قطر والے (مرکز مبدا پر) دائرہ کے اندر واقع ہو اور اس کا ہم مرکز ہو۔

صعودی صحیح قوتوں کے سلسلے

۲۰۳ —— اب ہم اس عام قوتی سلسلہ

$$ا_. + ا_۱ی + ا_۲ی^۲ + \dots + ا_نی^ن + \dots$$

پر غور کرینگے جہاں ا۰، ا۱، ا۲ .... مختلف عدد ہیں جو مختلف متغیری پر منحصر نہیں ہیں۔ فرض کرو کہ ی کا مقیاس ر سے تعبیر ہوتا ہے اور ا۰، ا۱، ا۲ .... کے مقیاس عہ۰، عہ۱، عہ۲ .... سے مقیاسوں کا سلسلہ ہے

عہ۰ + عہ۱ ر + عہ۲ ر^{2} + ... + عہن ر^{ن} + ...

(256) اگر یہ سلسلہ مستدق ہو تو ی کا مندرجہ بالا سلسلہ مطلقاً مستدق ہوگا۔ اگر مقیاسوں کا سلسلہ ر کی کسی قیمت کے لیے مستدق ہوتا ہو تو ر کی اس سے چھوٹی قیمتوں کے لیے وہ مستدق ہوگا؛ اور اگر وہ ر کی کسی قیمت کے لیے متسع ہو تو ر کی اس سے بڑی قیمتوں کے لیے بھی وہ متسع ہوگا۔ سلسلہ عہ۰ + عہ۱ ر + عہ۲ ر^{2} + ... سے متعلق تین صورتیں پیدا ہوسکتی ہیں:-

(۱) یہ سلسلہ، صفر سے مختلف ر کی بعض قیمتوں کے لیے مستدق ہوسکتا ہے اور باقی دوسری قیمتوں کے لیے متسع؛ تب ایک مثبت عدد غہ موجود ہوتا ہے ایسا کہ یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے جبکہ ر < غہ اور متسع ہوتا ہے جبکہ ر > غہ ۔ جب، ر = غہ تو سلسلہ مستدق ہوسکتا ہے یا متسع ۔

(۲) یہ سلسلہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہوسکتا ہے؛ اس امر کو غہ = ∞ سے ظاہر کرنا سہولت بخش ہے۔

(۳) یہ سلسلہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ر = ۰ کے متسع ہوسکتا ہے؛ اس کو غہ = ۰ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

کسی دی ہوئی صورت میں عدد غہ معلوم کرنے کے لیے ہم عہن$^{1/ن}$ کی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔ یہ ہوسکتا ہے کہ عہن$^{1/ن}$ ایک معین انتہا ا کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے؛ ایسی صورت میں اگر صہ کوئی اختیاری طور پر منتخب کردہ مثبت عدد ہو اتنا چھوٹا جتنا ہم چاہیں تو عہن$^{1/ن}$، ن کی تمام قیمتوں کے لیے (مع ایسی قیمتوں کی ایک محدود تعداد کے

استثنا کے) ا + صہ اور ا - صہ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ زیادہ عام صورت میں یہ ہو سکتا ہے کہ ایک ثبت عدد ا موجود ہو ایسا کہ ن کی تمام قیمتوں کے لیے (سوائے ایک محدود جٹ کے) عن$^{\frac{1}{ن}}$، ا + صہ سے کم رہو اور نیز ایسا ہو کہ ن کی قیمتوں کی لاتناہی تعداد کے لیے ا + صہ اور ا - صہ کے درمیان واقع رہو۔ ہر صورت میں عدد غہ = $\frac{1}{ا}$ ۔ اس کو دیکھنے کے لیے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے اگر ر < $\frac{1}{ا}$ اور متسع ہوتا ہے اگر ر > $\frac{1}{ا}$ ۔ کیونکہ ن کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ایک محدود جٹ کے عن رن < (ا + صہ)^{ن} ر^{ن} جہاں صہ اختیاری ہے؛ اگر ر < $\frac{1}{ا}$ تو ہم صہ کو منتخب کر سکتے ہیں ایسا کہ (ا + صہ) ر < ۱۔ تب سلسلہ کی تمام رقمیں (سوائے ان کے ایک محدود جٹ کے) اُس سلسلہ ہندسیہ کی متناظر رقموں سے کم ہونگی جس کی نسبت مشترک (ا + صہ) ر ایک سے کم ہے؛ اس لیے سلسلہ مستدق ہے۔ اگر ر > $\frac{1}{ا}$ تو صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ (ا - صہ) ر > ۱، اور اس طرح ن کی قیمتوں کی لاتناہی تعداد کے لیے

عن رن > (ا - صہ)^{ن} ر^{ن} > ۱؛ اس لیے سلسلہ متسع ہے۔

اگر عن$^{\frac{1}{ن}}$ کی انتہا صفر کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو ر کی ہر قیمت کے لیے سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ کیونکہ اس صورت میں عن رن < صہ^{ن} رن جہاں صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ صہ ر < ۱، اور (266) یہ ن کی ہر قیمت کے لئے (سوائے ایسی قیمتوں کے ایک محدود جٹ کے) درست ہے۔ پس سلسلہ کی ہر رقم سوائے ان کی ایک محدود تعداد کے ایک مستدق سلسلہ ہندسیہ کی متناظر رقم سے کم ہے اور اس لیے سلسلہ مستدق

ہے۔ اس صورت میں غ = ∞ ۔

اگر $غ_ن^{1/ن}$ غیر معین طور پر بڑی قیمتیں رکھے یعنی اگر کوئی ایسا عدد موجود نہ ہو جو تمام عددوں $ص_ن^{1/ن}$ سے بڑا ہو تو سلسلہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے الاّ ر = ۰ متسع ہوتا ہے۔ اس صورت میں غ = ۰ ۔ کیونکہ اگر ر کو کوئی قیمت سوائے صفر کے دی جائے تو سلسلہ کی اُن رقموں کی تعداد لا انتہا ہوتی ہے جن میں سے ہر ایک اکائی سے بڑی ہے اور اس لیے سلسلہ متسع ہے۔

۲۰۴ —— دفعہ ماسبق میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ ایک عدد غ موجود ہوتا ہے (جو ممکن ہے صفر ہو یا غیر واجب قیمت ∞ اختیار کرے) ایسا کہ سلسلہ $ع_۰ + ع_۱ ر + ع_۲ ر^۲ + ...$ مستدق ہوتا ہے ر کی ہر قیمت کے لیے جو غ سے چھوٹی ہو، اور متسع ہوتا ہے ر کی ہر قیمت کے لیے جو غ سے بڑی ہو۔

نقطہ ی = ۰ کو مرکز مانکر اس کے گرد نصف قطر غ کا ایک دائرہ کھینچو۔ اِس دائرہ کو سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + ...$ کے **استدقاق کا دائرہ** کہتے ہیں اور اس کے نصف قطر کو سلسلہ کے **استدقاق کا نصف قطر** کہتے ہیں۔

استدقاق کا نصف قطر محدود ہو سکتا ہے یا صفر یا لامتناہی۔

یہ ثابت کیا جائیگا کہ سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + ...$ کسی نقطہ ی کیلئے جو استدقاق کے دائرہ کے اندر واقع ہو مطلقاً مستدق ہوتا ہے، اور کسی نقطہ ی کے لیے جو اس دائرہ کے باہر واقع ہو متسع ہوتا ہے۔ لیکن کسی ایسے

نقطہ کے لیے جو استدقاق کے دائرہ کے محیط پر واقع ہو سلسلہ کے استدقاق سے متعلق کوئی ٹھیک عام بیان نہیں دیا جا سکتا۔

اب یہ امر کہ سلسلہ مطلقاً مستدق ہے اگر مق ی < غہ اس واقعہ سے منتج ہوتا ہے کہ ایسی صورت میں مقیاسوں کا سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ اور یہ امر کہ سلسلہ تسع ہے اگر مق ی کی قیمت ر > غہ اس واقعہ سے منتج ہوتا ہے کہ استدقاق کی ضروری شرط نہا | لن ین | = ۰ پوری نہیں ہوتی۔ کیونکہ

| لن ین | = (ر/غہ)^ن عن غہ^ن ، اور ن کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لیے

عن غہ^ن > (۱ ـ غہ صہ)^ن ؛ اس لئے اگر صہ منتخب کیا جائے ایسا کہ

ر (۱/غہ ـ صہ) > ۱

تو ہم دیکھتے ہیں کہ | لن ین | > ۱ ، ن کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لئے۔

(261)

۲۰۵ ــــــ اب یہ دکھایا جائیگا کہ سلسلہ ل۰ + ل۱ ی + ل۲ ی^۲ + ... کسی دائرہ میں جس کا نصف قطر استدقاق کے نصف قطر سے کم ہو اور جس کا مرکز ی = ۰ ہو یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر غہ ـ ک ہے اور فرض کرو کہ غہ۱ ایک ثابت عدد ہے غہ اور غہ ـ ک کے درمیان۔ فرض کرو غہ ـ ک = غہ۱ ـ صہ۔

باقی لن ین + لن+۱ ین+۱ + ... کے انتہائی مجموعہ کا مقیاس سلسلہ

عن رن + عن+۱ رن+۱ + ...

یا عن غہ۱^ن (ر/غہ۱)^ن + عن+۱ غہ۱^ن+۱ (ر/غہ۱)^ن+۱ + ...

کے انتہائی مجموعہ سے متجاوز نہیں ہوتا۔ لیکن اعداد $عن\ غہ_۱^{ن}$، $عن_{+۱}\ غہ_۱^{ن+۱}$، ... سب کے سب کسی ثابت عدد ک سے کم ہیں کیونکہ سلسلہ متدق ہے جبکہ $ر = غہ$؛ اس لیے سلسلہ کا مجموعہ $ک \left\{ \left(\frac{ر}{غہ_۱}\right)^{ن} + \left(\frac{ر}{غہ_۱}\right)^{ن+۱} + \dots \right\}$ سے یا $ک \left(\frac{ر}{غہ_۱}\right)^{ن} \left(۱ - \frac{ر}{غہ_۱}\right)^{-۱}$ سے کم ہے، اور یہ $ک \left(۱ - \frac{ھ}{غہ_۱}\right)^{ن} \frac{غہ_۱}{ھ}$ سے کم ہے۔ اگر صہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ایک مثبت عدد ہو تو ن کی ایک قیمت $ن_۱$ متعین ہوسکتی ہے ایسی کہ $ن \geqslant ن_۱$ کے لیے $ک \left(۱ - \frac{ھ}{غہ_۱}\right)^{ن} \frac{غہ_۱}{ھ} < صہ$۔ اس لیے سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \dots$ کے باقی $ب_ن (ی)$ کا مقیاس صہ سے کم ہے $ن \geqslant ن_۱$ کے لیے اور ی کی تمام قیمتوں کے لیے ایسی کہ $مق\ ی \leqslant غہ - ک$؛ اس لیے سلسلہ کا استدقاق نصف قطر غہ ـ ک کے دائرہ میں یکساں ہے۔[1] یہ درست ہے خواہ کتنا ہی چھوٹا عدد ک (> ۰) لیا جائے، لیکن یہ دعویٰ کرنا غیر صحیح ہوگا کہ استدقاق کے دائرہ میں استدقاق بالضرور یکساں ہوتا ہے۔[2]

سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \dots$ کے مجموعہ کو ی کی اُن قیمتوں کے لیے جن کے مقیاس استدقاق کے نصف قطر سے کم ہیں فا (ی) سے تعبیر کریں تو دفعہ ۲۰۰ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فا (ی)، استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوعہ تمام نقطوں کے لیے ی کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اگر استدقاق کا نصف قطر لامتناہی ہو تو مستوی کے تمام محدود نقطوں کے لیے فا (ی) مسلسل ہوتا ہے۔

سلسلوں $1 + ی + ی^2 + ی^3 + \dots$

اور $1 + \frac{ی}{1} + \frac{ی^2}{2} + \frac{ی^3}{3} + \dots$

کے استدقاق کا نصف قطر ایک ہے۔ ان کے مجموعوں کے تفاعل فا(ی) اکائی نصف قطر کے دائرہ کے اندر ی کے مسلسل تفاعل ہیں۔

سلسلہ $1 + \frac{ی}{\underline{|1}} + \frac{ی^2}{\underline{|2}} + \frac{ی^3}{\underline{|3}} + \dots + \frac{ی^ن}{\underline{|ن}} + \dots$

کے استدقاق کا نصف قطر لاتناہی ہے؛ مجموعہ کا تفاعل فا(ی)، ی کی تمام محدود قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

سلسلہ $1 + \underline{|1}\,ی + \underline{|2}\,ی^2 + \dots + \underline{|ن}\,ی^ن + \dots$

کے استدقاق کا نصف قطر صفر ہے۔

(262) ۲۰۶ — استدقاق کے دائرہ کے محیط پر سلسلہ کا استدقاق ابتک زیر بحث نہیں آیا ہے۔ یہ مسئلہ کے عام ہونے پر اثر نہیں پڑیگا اگر ہم استدقاق کے نصف قطر کو ایک فرض کریں۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ $ا_0 + ا_1 ی + ا_2 ی^2 + \dots$ جبکہ تمام سر حقیقی ہوں استدقاق کے دائرہ پر سب نقطوں کے لیے مستدق ہوتا ہے سوائے نقطہ ی = ۱ کے اگر سر سب کے سب مثبت ہوں اور سوائے نقطہ ی = -۱ اگر سر باری باری سے مثبت اور منفی ہوں بشرطیکہ ہر دو صورتوں میں سر $ا_0$، $ا_1$، $ا_2$ ... مطلق مقدار کے لحاظ سے نزولی ترتیب میں ہوں اور بشرطیکہ $ا_ن$ کی انتہا جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے صفر ہو۔

فرض کرو کہ $س_ن = ا_0 + ا_1 ی + ا_2 ی^2 + \dots + ا_{ن-1} ی^{ن-1}$

اور فرض کرو کہ سر سب کے سب مثبت ہیں، تب

$$س_ن(۱-ی) = ا_۰ - ا_{ن-۱}\,ی^ن - ی\{(ا_۰-ا_۱)+(ا_۱-ا_۲)ی+(ا_۲-ا_۳)ی^۲+\dots+(ا_{ن-۲}-ا_{ن-۱})ی^{ن-۲}\}؛$$

اب چونکہ سلسلہ $(ا_۰-ا_۱)+(ا_۱-ا_۲)+(ا_۲-ا_۳)+\dots$

مستدق ہے (دیکھو دفعہ ۱۹۴، نوٹ) اس لیے یہ دو سلسلے

$$(ا_۰-ا_۱)+(ا_۱-ا_۲)\,جم\,ط+(ا_۲-ا_۳)\,جم\,۲ط+\dots$$

$$(ا_۰-ا_۱)+(ا_۱-ا_۲)\,جب\,ط+(ا_۲-ا_۳)\,جب\,۲ط+\dots$$

بھی مستدق ہیں کیونکہ یہ سب جیوب اور جیوب التمام ± ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہیں، پس

سلسلہ $(ا_۰-ا_۱)+(ا_۱-ا_۲)ی+(ا_۲-ا_۳)ی^۲+\dots$

مستدق ہے اگر مق ی = ۱ - چونکہ $|ا_{ن-۱}\,ی^ن|$ کی انتہا صفر ہے جبکہ ن لامتناہی ہو اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ نہا $س_ن(۱-ی)$ محدود ہے جبکہ مق ی = ۱،

پس نہا $س_ن$ محدود ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ ی = ۱-

اگر سلسلہ کی رقمیں متبادلاً مثبت اور منفی ہیں تو ی کو ‎-ی میں بدلنے سے یہ صورت متذکرہ صدر صورت میں تحویل ہو جاتی ہے۔

لیکن جبکہ ی = ۱ یا متبادلہ علامتوں کے سروں کی صورت میں

جبکہ ی = -۱ سلسلہ کا مستدق ہونا متعین نہیں ہوا، اس کا انحصار سلسلہ کی نوعیت پر ہوتا ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ سلسلہ استدقاق کے دائرہ پر صرف نیم مستدق ہو۔

اگر سلسلہ کے سر ملتف ہوں تو ہم ایسے سلسلہ کو دو سلسلوں میں توڑ سکتے ہیں جن میں سے ایک میں سر حقیقی ہوں اور دوسرے میں خیالی۔ پھر ان دو سلسلوں پر الگ الگ غور کیا جا سکتا ہے۔

(263)

$$\text{سلسلہ}\quad ۱ + \frac{ی}{۱} + \frac{ی^{۲}}{۲} + \frac{ی^{۳}}{۳} + \dots$$

مستدق ہے جبکہ مق ی = ۱ سوائے اُس صورت کے جبکہ ی = ۱، پس یہ دو سلسلے

$\frac{۱}{ن}$ جم ن ط، $\frac{۱}{ن}$ جب ن ط دونوں مستدق ہیں سوائے اس کے کہ پہلا سلسلہ متسع ہوتا ہے جبکہ ط صفر ہو یا π کا جفت ضعف۔

۲۰۷ ——— فرض کرو کہ فا (لا)، لا کا وہ مسلسل تفاعل ہے جو سلسلہ $ا_{۰} + ا_{۱} لا + ا_{۲} لا^{۲} + \dots$ کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جس کے سر حقیقی ہیں اور جو لا کی ایک سے چھوٹی حقیقی قیمتوں کے لئے مستدق ہے۔ ہم مان لیتے ہیں کہ یہ سلسلہ متسع ہوتا ہے جبکہ لا > ۱ لیکن یہ کہ سلسلہ $ا_{۰} + ا_{۱} + ا_{۲} + \dots$ جو لا = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے مستدق ہے۔

اب ہم یہ بتائینگے کہ سلسلہ $ا_{۰} + ا_{۱} + ا_{۲} + \dots$ کا مجموعہ فا (لا) کی انتہا ہے جبکہ لا ایک سے چھوٹی قیمتوں سے بڑھ کر انتہائی قیمت ایک تک پہنچتا ہے۔ پس مسلسل تفاعل فا (لا) جو لا = ۱ کے لیے فا (۱) =

$\underset{لا=۱}{\text{نہا}}$ فا (لا) سے تعبیر ہوتا ہے سلسلہ $ا_{۰} + ا_{۱} + ا_{۲} لا^{۲} + \dots$ کے مجموعہ کو

تعبیر کرتا ہے جبکہ لا = ۱۔ یہ مسئلہ آبیل[1] نے بیان کیا تھا۔

فرض کرو کہ $\text{س}_{\text{ن}} = \text{ا}_۰ + \text{ا}_۱ + \text{ا}_۲ + \dots \text{ا}_{\text{ن}}$ تو $\text{س} = \text{ا}$ اور اس مسئلہ کی بموجب جو دفعہ ۲۰۹ میں ثابت کیا جائیگا چونکہ سلسلے

$$\text{ا}_۰ + \text{ا}_۱\,\text{لا} + \text{ا}_۲\,\text{لا}^۲ + \dots\dots + \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \dots\dots،$$

$$۱ + \text{لا} + \text{لا}^۲ + \dots\dots + \text{لا}^{\text{ن}} + \dots\dots$$

دونوں مطلقاً مستدق ہیں جبکہ لا < ۱، اس لیے ان کا حاصل ضرب

$$\text{س}_۰ + \text{س}_۱\,\text{لا} + \text{س}_۲\,\text{لا}^۲ + \dots + \text{س}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \dots\dots$$

مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ فا (لا) \ (۱ - لا) ہے جو اوپر کے دو سلسلوں کے انتہائی مجموعوں کا حاصلِ ضرب ہے۔ نہا $\text{س}_{\text{ن}}$ کو س سے تعبیر کرو تو عدد ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $\text{س}_{\text{ن}}$، $\text{س}_{\text{ن}+۱}$، $\text{س}_{\text{ن}+۲}$ .... سب کے سب س + صہ اور س - صہ کے درمیان واقع ہوں جہاں صہ اختیاری طور پر منتخبہ مثبت عدد ہے۔

ن کی ایسی کسی قیمت کے لیے $\text{س}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{س}_{\text{ن}+۱}\,\text{لا}^{\text{ن}+۱} + \dots$ کا مجموعہ

$$(\text{س} + \text{صہ})\,\text{لا}^{\text{ن}} \backslash (۱ - \text{لا}) \quad \text{اور} \quad (\text{س} - \text{صہ})\,\text{لا}^{\text{ن}} \backslash (۱ - \text{لا})$$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اس لیے فا (لا)

$$(\text{س} + \text{صہ})\,\text{لا}^{\text{ن}} + (۱ - \text{لا})\,(\text{س}_۰ + \text{س}_۱\,\text{لا} + \dots\dots + \text{س}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱})$$

---

[1] دیکھو Crelle's journal, Vol; I

اور $(س - صہ)\,لا^{ن} + (۱ - لا)(س + س_{۱}\,لا + \dots + س_{ن-۱}\,لا^{ن-۱})$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$|فا(لا) - س| < صہ + |س|(۱ - لا^{ن}) + (۱ - لا)(|س| + |س_{۱}| + \dots + |س_{ن-۱}|)$$

صہ کے جواب میں عدد ن مقرر ہو جانے کے بعد ہم لا کی ایک قیمت (فرض کرو $لا_{۱}$) منتخب کر سکتے ہیں ایسی کہ $|فا(لا) - س|$ عدد ۲ صہ سے چھوٹا ہو کیونکہ $۱ > لا \geq لا_{۱}$ اور ۱ - لا اور $۱ - لا^{ن}$ اِتنے چھوٹے لیے جا سکتے

(264)

ہیں جتنے ہم چاہیں اگر لا کا مناسب انتخاب کیا جائے۔ اب چونکہ ۲ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فا(لا) کی انتہا لا = ۱ کے لئے س ہے۔

اگر $ا_{۰}$، $ا_{۱}$، $ا_{۲}$ .... ملتف عدد ہوں تو ہم سلسلہ کو دو حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں ایک حقیقی اور دوسرا خیالی۔ تب مسئلہ کا اطلاق ہر حصہ پر الگ الگ ہوتا ہے اور اس لیے وہ پورے سلسلہ کے لیے دُرست ہے۔

ثانیاً فرض کرو کہ فا(ی) وہ مسلسل تفاعل ہے جو سلسلہ $ا_{۰} + ا_{۱}ی + ا_{۲}ی^{۲}$ + ... کے مجموعہ کو جبکہ مق ی < ۱ تعبیر کرتا ہے جہاں ملتف عدد ر(جم طہ + خ جب طہ) ہے۔ یہ سلسلہ اِن دو حصوں

$$ا_{۰} + ا_{۱}\,ر\,جم\,طہ + ا_{۲}\,ر^{۲}\,جم\,۲\,طہ + \dots ،$$

$$خ(ا_{۱}\,ر\,جب\,طہ + ا_{۲}\,ر^{۲}\,جب\,۲\,طہ + \dots)،$$

میں تقسیم ہوسکتا ہے اور مسئلہ بالا اِن دو سلسلوں میں سے ہر ایک کے لیے درست ہے۔ اس لیے اگر سلسلہ $\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{ی} + \text{ا}_2\,\text{ی}^2 + \dots$ مستدق ہو جبکہ ی = جم ط + خ جب ط تو اس کا مجموعہ، ر = ۱ کے لیے فا (ی) کی انتہا ہے جبکہ ط کی قیمت کو مستقل رکھا جائے۔ تب وہ تفاعل جو اِس سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے استدقاق کے دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ پر مسلسل ہے بلحاظ ان نقاط کے جو اِس نقطہ میں سے گذرنیوالے استدقاق کے دائرہ کے نصف قطر پر ہیں۔

اِس دفعہ کی تحقیق کی ضرورت واضح کرنے کے لیے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر سلسلہ

$$\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \dots$$

کی رقموں کی ترتیب کو بدل دیا جائے تو اوپر کا مسئلہ نئے سلسلہ کے لیے درست نہ ہوگا۔ مثلاً اِن دو حقیقی سلسلوں

$$\text{لا} - \tfrac{1}{2}\text{لا}^2 + \tfrac{1}{3}\text{لا}^3 - \tfrac{1}{4}\text{لا}^4 + \dots \text{، اور } \text{لا} + \tfrac{1}{3}\text{لا}^3 - \tfrac{1}{2}\text{لا}^2 + \tfrac{1}{5}\text{لا}^5 + \tfrac{1}{7}\text{لا}^7 - \tfrac{1}{4}\text{لا}^4 + \dots$$

پر غور کرو۔ جب تک کہ لا ایک سے چھوٹا رہتا ہے یہ سلسلے مطلقاً مستدق ہوتے ہیں اور اِن کا مجموعہ ایک ہی ہوتا ہے، لیکن جب، لا = ۱ تو اِن سلسلوں کے مجموعے مساوی نہیں ہوتے جیسا کہ دفعہ ۱۹۵ میں دکھایا جاچکا ہے۔ پہلے سلسلہ کا مجموعہ لا کی قیمت لا = ۱ تک مسلسل ہے لیکن دوسرے سلسلہ کا مجموعہ ایسا نہیں ہے۔

۲۰۸ ——— ی کی قوتوں کے دو الگ الگ سلسلے

$$\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{ی} + \text{ا}_2\,\text{ی}^2 + \dots \text{،}$$

$$\text{ب}_0 + \text{ب}_1\,\text{ی} + \text{ب}_2\,\text{ی}^2 + \dots$$

نہیں ہو سکتے ایسے کہ دونوں، نصف قطر ک (> ۰) کے دائرہ میں موقوعہ تمام نقطوں کے لیے ایک ہی قیمت فا (ی) کی طرف مستدق ہوں - چونکہ وہ ی = ۰ کے لیے ایک ہی قیمت کی طرف مستدق ہوتے ہیں اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہیے ا۰ = ب۰ اور اس طرح یہ سلسلے ا۱ ی + ا۲ ی۲ + ...، ب۱ ی + ب۲ ی۲ +... ایک ہی قیمت کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ مق ی ≥ ک - یہ ناممکن ہے تا وقتیکہ یہ دو سلسلے

$$ا_۱ + ا_۲ ی + ا_۳ ی^۲ + \ldots ، ب_۱ + ب_۲ ی + ب_۳ ی^۲ + \ldots$$

دونوں مستدق نہ ہوں اور مق ی ≥ ک کے لیے ان کے انتہائی مجموعے ایک ہی نہ ہوں - اِن دو سلسلوں کے استدقاق کے نصف قطروں میں سے ہر ایک ≤ ک اور ان کے مجموعہ تفاعل (Sum functions) دونوں ان کے استدقاق کے دائروں کے اندر مسلسل ہیں - چونکہ اِن کے مجموعہ تفاعل نصف قطر ک کے دائرہ کے اندر ی کی ہر قیمت کے لیے سوائے ی = ۰ کے مماثل ہیں اس لیے اِن تفاعلوں کے تسلسل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ مماثل ہیں جبکہ ی = ۰ اور اس لیے ا۱ = ب۱ - اِسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اِن دو سلسلوں کے متناظر سر سب کے سب مساوی ہیں اور اس لیے یہ سلسلے مماثل ہیں - (265)

دو سلسلوں کے حاصل ضرب کا استدقاق

۲۰۹ —— فرض کرو کہ دو مطلقاً مستدق سلسلوں

$$ا_1 + ا_2 + ا_3 + \cdots + ا_ن + \cdots،$$

$$ب_1 + ب_2 + ب_3 + \cdots + ب_ن + \cdots$$

کے انتہائی مجموعے س، سَ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ

$$ا_1ب_1 + (ا_1ب_2 + ا_2ب_1) + \cdots + (ا_1ب_ن + ا_2ب_{ن-1} + \cdots + ا_نب_1) + \cdots$$

جو دیے ہوئے سلسلوں کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوا ہے مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س سَ ہے۔

اس حاصل ضربی سلسلے کی ن رقموں کے مجموعہ کو $س_ن$ سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ا اور ب کے مقیاس علی الترتیب عہ اور بہ ہیں۔ اب چونکہ سلسلے س، سَ مطلقاً مستدق ہیں، اس لیے مقیاسوں کے سلسلے مستدق ہیں؛ ان کے مجموعوں کو م، مَ سے تعبیر کرو اور فرض کرو

$$ث_ن = عہ_1 بہ_1 + (عہ_1 بہ_2 + عہ_2 بہ_1) + \cdots + (عہ_1 بہ_ن + عہ_2 بہ_{ن-1} + \cdots + عہ_ن بہ_1)$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے $س_ن سَ_ن - س_ن = ا_2 ب_ن + ا_3 ب_{ن-1} + \cdots + ا_ن ب_ن$

اس لیے $مق(س_ن سَ_ن - س_ن) \leqslant عہ_2 بہ_ن + عہ_3 بہ_{ن-1} + \cdots + عہ_ن بہ_ن$

$$\leqslant م_ن مَ_ن - ث_ن$$

اب $ث_ن < م_ن مَ_ن < ث_{2ن}$ کیونکہ $ث_{2ن}$ میں حاصل ضرب $م_ن مَ_ن$ کی بہ نسبت زیادہ رقمیں ہیں اور $ث_ن$ میں م مَ کی بہ نسبت کم رقمیں ہیں؛ پس $ث_ن$ کی انتہا جبکہ ن کو لا انتہا بڑھایا جاتا ہے محدود ہے، اور چونکہ $ث_ن$، $ث_{2ن}$ کی

انتہائیں ایک ہی ہونی چاہئیں اس لیے ان میں سے ہر ایک م م کے مساوی ہے؛ اس طرح مق (س سؔ - س) کی انتہا صفر ہے یا س = س سؔ -

زیادہ عام طور پر یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اس مسئلہ کی صحت کے لیے یہ کافی ہے کہ سلسلوں ا + ا + ...، ب + ب + ... میں سے صرف ایک مطلقاً مستدق ہو اور دوسرا مشروطاً مستدق - اگر یہ دو سلسلے صرف مشروطاً مستدق ہوں تو حاصل ضربی سلسلہ ا ب + (ا ب + ا ب) + ... کا مستدق ہونا ضروری نہیں ہے لیکن اس کے مستدق ہونے کی صورت میں یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اس کا مجموعہ دیے ہوئے دو سلسلوں کے مجموعوں کا حاصل ضرب ہے[1] -

دوہرے سلسلوں کا استدقاق

(266)

۲۱۰ ——— فرض کرو کہ مثبت حقیقی عددوں ع کے ایک دوہرے توالی

$$ع_{1،1}، ع_{1،2}، ع_{1،3}، \ldots، ع_{1،س}، \ldots$$

$$ع_{2،1}، ع_{2،2}، ع_{2،3}، \ldots، ع_{2،س}، \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$ع_{ر،1}، ع_{ر،2}، ع_{ر،3}، \ldots، ع_{ر،س}، \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

پر ہم غور کرتے ہیں -

---

[1] ان نتیجوں کے ثبوت کے لیے دیکھو مصنف کی کتاب Theory of functions of a real variable صفحات ۵۰۰، ۵۰۱ -

مان لو کہ جب ہر صف کے عددوں کو باہم جمع کیا جاتا ہے تو ان کے مجموعہ کی ایک معین انتہا ہے؛ فرض کرو کہ پہلی، دوسری، ...، رویں، ... صفوں کے لیے اس انتہائی مجموعہ کی قیمتیں $س_۱$، $س_۲$، ...، $س_ر$، ... ہیں۔ نیز یہ مان لو کہ سلسلہ $س_۱ + س_۲ + \cdots + س_ر + \cdots$ مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ $س$ ہے۔ یہ ثابت کیا جائیگا کہ سلسلہ

$$ع_{۱،س} + ع_{۲،س} + \cdots + ع_{ر،س} + \cdots\cdot$$

جو کسی ایک ستون کے عددوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے مستدق ہے اور اگر اس کا انتہائی مجموعہ $م_س$ سے تعبیر ہو تو سلسلہ

$$م_۱ + م_۲ + م_۳ + \cdots\cdot$$

مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ $س$ ہے۔

یہ بات کہ $ع_{۱،س} + ع_{۲،س} + \cdots + ع_{ر،س} + \cdots\cdot$ مستدق ہے اس واقعہ سے منتج ہوتی ہے کہ اِس سلسلہ کی ہر رقم مستدق سلسلہ $س_۱ + س_۲ + \cdots\cdot + س_ر + \cdots$ کی متناظر رقم سے چھوٹی ہے۔ ایک مثبت عدد $پ$ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $ر$ اعداد

$$م_۱ - \sum_{ن=۱}^{ن=پ} ع_{ن،۱}،\ م_۲ - \sum_{ن=۱}^{ن=پ} ع_{ن،۲}،\ \ldots،\ م_ر - \sum_{ن=۱}^{ن=پ} ع_{ن،ر}$$

سب کے سب $\frac{صہ}{ر}$ سے چھوٹے ہوں۔ اس لیے

$$م_۱ + م_۲ + \cdots + م_ر < صہ + س_۱ + س_۲ + \cdots + س_پ \text{ یا } < صہ + س$$

اور چونکہ یہ $ر$ کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے سلسلہ $م_۱ + م_۲ + \cdots\cdot$

مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ $\leqslant$ س، کیونکہ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے - نیز عدد صحیح ق منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ ر اعداد

$$س_۱ - \sum_{ن=۱}^{ن=ق} ع_{۱،ن}،\ س_۲ - \sum_{ن=۱}^{ن=ق} ع_{۲،ن}، \ldots، س_ر - \sum_{ن=۱}^{ن=ق} ع_{ر،ن}$$

سب کے سب $\frac{صہ}{ر}$ سے چھوٹے ہوں - اِس لیے سلسلہ $م_۱ + م_۲ + \ldots$ کا انتہائی مجموعہ $س_۱ + س_۲ + \ldots + س_ر - صہ$ سے بڑا ہے؛ اور چونکہ یہ ر کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے یہ انتہائی مجموعہ $\geqslant$ س - صہ - اب چونکہ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے اسلئے سلسلہ $م_۱ + م_۲ + \ldots$ کا انتہائی مجموعہ $\geqslant$ س، لیکن یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ یہ انتہائی مجموعہ $\leqslant$ س - پس یہ انتہائی مجموعہ س کے مساوی ہے -

اگر مثبت اعداد $ع_{ر،س}$ ایسے ہوں کہ سلسلوں $ع_{ر،۱} + ع_{ر،۲} + \ldots$ میں سے ہر سلسلہ ایک عدد $س_ر$ کی طرف مستدق ہو اور اس طور پر کہ سلسلہ $س_۱ + س_۲ + \ldots$ مستدق ہو تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد $ع_{ر،س}$ مثبت عددوں کے ایک مستدق دوہرے سلسلہ کی رقمیں ہیں اور اس سلسلہ کا مجموعہ س ہے - اِس ثابت شدہ مسئلہ کی بموجب اِس دوہرے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ وہی ہوگا خواہ عمل جمع پہلے س کے لحاظ سے اور پھر ر کے لحاظ سے ہو یا اِس ترتیب کے بالعکس - اس طرح

$$\sum_{ر=۱}^{ر=\infty} \sum_{س=۱}^{س=\infty} ع_{ر،س} = \sum_{س=۱}^{س=\infty} \sum_{ر=۱}^{ر=\infty} ع_{ر،س} = س$$

(267)

اگر عددوں $ع_{ر،س}$ پر ایک ہی علامت کے ہونے کی قید نہ ہو اور اگر اعداد

$|ع_{ر،س}|$ ایک مستدق دوہرے سلسلے کی رقمیں ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد $ع_{ر،س}$ ایک **مطلقاً مستدق دوہرے سلسلے** کی رقمیں ہیں۔

اگر وہ دوہرا سلسلہ جس کی رقمیں $ع_{ر،س}$ ہیں مطلقاً مستدق ہو تو

$$\sum_{ر=1}^{ر=\infty}\sum_{س=1}^{س=\infty} ع_{ر،س} = \sum_{س=1}^{س=\infty}\sum_{ر=1}^{ر=\infty} ع_{ر،س}$$

کیونکہ فرض کرو $ع_{ر،س} = ب_{ر،س} - ج_{ر،س}$ جہاں $ج_{ر،س} = 0$ جبکہ $ع_{ر،س}$ مثبت ہوتا ہے اور $ب_{ر،س} = 0$ جبکہ $ع_{ر،س}$ منفی ہوتا ہے۔ پس دیے ہوئے سلسلہ کو دو سلسلوں کا فرق خیال کر سکتے ہیں جن کی رقمیں مثبت اعداد $ب_{ر،س}$ اور $ج_{ر،س}$ ہیں۔ اب چونکہ وہ سلسلہ جس کی عام رقم $ب_{ر،س} + ج_{ر،س}$ ہے مستدق ہے اسلئے وہ دو سلسلے جنکی عام رقمیں $ب_{ر،س}$ اور $ج_{ر،س}$ ہیں دونوں مستدق ہیں اور ان کے مجموعے کسی ایک ترتیب میں لئے جا سکتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس سلسلہ کا مجموعہ جسکی عام رقم $ع_{ر،س}$ ہے کسی ایک ترتیب میں حاصل جمع کو متاثر کئے بغیر لیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ $$\sum_{ر=1}^{ر=\infty}\sum_{س=1}^{س=\infty} ع_{ر،س} = \sum_{س=1}^{س=\infty}\sum_{ر=1}^{ر=\infty} ع_{ر،س}$$

اس وقت بھی درست ہے جبکہ اعداد $ع_{ر،س}$ مختلف ہوں اگر مقیاسوں $|ع_{ر،س}|$ کا سلسلہ مطلقاً مستدق ہو۔ کیونکہ اگر $ع_{ر،س} = ج_{ر،س} + خ ض_{ر،س}$ تو وہ سلسلے

جن کی عام رقمیں $ج_{ر،س}$، $ض_{ر،س}$ ہیں دونوں مطلقاً مستدق ہیں اور اس لیے مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے ۔

اِس عام مسئلہ کو شکل ذیل میں بھی بیان کیا جا سکتا ہے :-

اگر $ا_1 + ا_2 + ا_3 + ا_4 + \dots$ حقیقی یا ملتف عددوں کا ایک مستدق سلسلہ ہو اور اگر ہر رقم $ا_ر$ کو ایک مطلقاً مستدق سلسلہ

$$ا_{ر،1} + ا_{ر،2} + ا_{ر،3} + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے بیان کیا جائے تو دیے ہوئے سلسلہ کی بجائے، اس کے انتہائی مجموعہ کو بدلے بغیر، سلسلہ

$$\sum_{پ=1}^{پ=\infty} ا_{پ،1} + \sum_{پ=1}^{پ=\infty} ا_{پ،2} + \dots$$

رکھا جا سکتا ہے بشرطیکہ سلسلہ (268)

$$س_1 + س_2 + س_3 + \dots$$

مستدق ہو جہاں $س_ر$ سے

$$|ا_{ر،1}| + |ا_{ر،2}| + |ا_{ر،3}| + \dots$$

کا انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے ۔

اس مسئلہ کی ایک اہم صورت جس سے ہم بعد میں استفادہ کرینگے حسب ذیل ہے :-

اگر $ا_0 + ا_1 ی + ا_2 ی^2 + \dots$ ایک مستدق سلسلہ ہو جس کا انتہائی مجموعہ فا(ی)

ہے اور اگر $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$ . . . حسب ذیل مطلقاً مستدق سلسلوں

$$ب_{۰،۰} + ب_{۰،۱} ما + ب_{۰،۲} ما^۲ + ب_{۰،۳} ما^۳ + \dots$$

$$ب_{۱،۰} + ب_{۱،۱} ما + ب_{۱،۲} ما^۲ + ب_{۱،۳} ما^۳ + \dots$$

$$ب_{۲،۰} + ب_{۲،۱} ما + ب_{۲،۲} ما^۲ + ب_{۲،۳} ما^۳ + \dots$$

— — — — — — — — — — — — — —

کے انتہائی مجموعے ہوں تب اگر سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ (ی) + ا_۲ (ی)^۲ + \dots$ مستدق ہو جہاں $ا_ر$ سے سلسلہ $|ب_{ر،۰}| + |ب_{ر،۱} ما| + |ب_{ر،۲} ما^۲| + \dots$ کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے تو سلسلہ

$$(ب_{۰،۰} + ب_{۱،۰} ی + ب_{۲،۰} ی^۲ + \dots) + (ب_{۰،۱} + ب_{۱،۱} ی + ب_{۲،۱} ی^۲ + \dots) ما$$

$$+ (ب_{۰،۲} + ب_{۱،۲} ی + ب_{۲،۲} ی^۲ + \dots) ما^۲ + \dots$$

جو دیے ہوئے سلسلہ میں $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$ . . . کی بجائے اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور جس کی رقموں کو ما کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا گیا ہے مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ فا (ما، ی) ہے۔ جو وہی ہے جو دیے ہوئے سلسلہ کا ہے۔

مسئلہ ثنائی

۲۱۱ ـــــ سلسلہ

$$۱ + م ی + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} ی^۲ + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{\lfloor ۳} ی^۳ + \dots$$

جس میں ی کی قوتیں صحیح اعداد ہیں اور جس کو ی کی صعودی قوتوں میں

ترتیب دیا گیا ہے ایک بہت اہم سلسلہ ہے۔

اُس خاص صورت میں جبکہ م مثبت صحیح عدد ہو یہ سلسلہ محدود ہوتا ہے اور اس کا مجموعہ $(\text{۱}+\text{ی})^{\text{م}}$ ہوتا ہے۔ اس کا ثبوت جو بالعموم دیا جاتا ہے ی کی ملتف قیمت پر بھی اطلاق پذیر ہے۔

ہم فرض کرینگے کہ ی ایک ملتف عدد ہے لیکن اپنی توجہ صرف اُس صورت تک محدود رکھینگے جس میں م حقیقی ہو۔ اس صورت میں $\dfrac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+\text{۱}}}=\dfrac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{ن}-\text{م}}$ جس کی انتہائی قیمت ایک ہے۔ اس لیے اس سلسلے کے استدقاق کا نصف قطر ایک ہے۔ اکائی نصف قطر کے اِس دائرہ کے اندر کسی نقطہ ی پر یہ سلسلہ مطلقاً مستدق ہے اور اکائی سے کم نصف قطر والے کسی دائرہ میں یکساں طور پر مستدق ہے۔ (269)

سلسلہ کے انتہائی مجموعہ کو ف (م) سے تعبیر کرنے اور دفعہ ۲۰۹ کا مسئلہ استعمال کرنے سے استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوعہ نقطوں کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{م}_{\text{۱}})\times\text{ف}(\text{م}_{\text{۲}})=\text{ف}(\text{م}_{\text{۱}}+\text{م}_{\text{۲}})$$

اور اس لیے $\text{ف}(\text{م}_{\text{۱}})\,\text{ف}(\text{م}_{\text{۲}})\,\text{ف}(\text{م}_{\text{۳}})\dots\text{ف}(\text{م}_{\text{ق}})=\text{ف}(\text{م}_{\text{۱}}+\text{م}_{\text{۲}}+\dots+\text{م}_{\text{ق}})$

اول فرض کرو کہ م مختصر ترین شکل میں ایک مثبت کسر $\dfrac{\text{پ}}{\text{ق}}$ ہے۔

رکھو $\text{م}_{\text{۱}}=\text{م}_{\text{۲}}=\dots=\text{م}_{\text{ق}}=\dfrac{\text{پ}}{\text{ق}}$ تو

$$\left[\text{ف}\left(\dfrac{\text{پ}}{\text{ق}}\right)\right]^{\text{ق}}=\text{ف}(\text{پ})$$

اس لیے ف ($\frac{ی}{ق}$)، ف (پ) کا ق واں جذر ہے یعنی $(۱+ی)^{پ}$ کا۔

فرض کرو کہ

$$۱ + ر جم ط = ہ جم فہ، \quad ر جب ط = ہ جب فہ$$

تب $\quad (۱+ی)^{پ} = ہ^{پ} \, (جم \, پ \, فہ + خ \, جب \, پ \, فہ)$

اور اس کے ق ویں جذروں کی قیمتیں ہیں

$$ہ^{\frac{پ}{ق}} \left\{ جم \frac{پ \, فہ + ۲ \, س \, \pi}{ق} + خ \, جب \frac{پ \, فہ + ۲ \, س \, \pi}{ق} \right\}$$

جہاں س کی قیمتیں ۰، ۱، ۲، ...، ق-۱ ہیں - نیز

$$ہ = + \sqrt{۱ + ۲ \, ر \, جم \, ط + ر^{۲}}$$

اور ہم فہ کو مس$^{-۱}$ $\frac{ر \, جب \, ط}{۱ + ر \, جم \, ط}$ کی وہ قیمت فرض کر سکتے ہیں جو حادہ ہے (مثبت یا منفی)؛ ایسی قیمت موجود ہوتی ہے کیونکہ جم فہ استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوعہ تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ $ہ^{\frac{پ}{ق}} \left\{ جم \frac{پ \, فہ + ۲ \, س \, \pi}{ق} + خ \, جب \frac{پ \, فہ + ۲ \, س \, \pi}{ق} \right\}$

کی ایک قیمت ف ($\frac{ی}{ق}$) ہے اور س کی ہمیشہ وہی قیمت ہونی چاہیے کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ استدقاق کے دائرہ کے اندر تمام نقطوں کے لیے ف ($\frac{ی}{ق}$) ایک مسلسل تفاعل ہے۔

س کی یہ قیمت معلوم کرنے کے لیے رکھو فہ = ۰، تب ف ($\frac{ی}{ق}$) حقیقی ہے

اور اس لیے

$$ق_{\frac{\text{پ}}{ا}} \left\{ \text{جم} \frac{۲ \text{س} \pi}{ق} + \text{خ} \text{جب} \frac{۲ \text{س} \pi}{ق} \right\}$$

کی ایک حقیقی قیمت کے مساوی ہونا چاہیے اور اس لیے س = ۰ یا س = $\frac{۱}{۲}$ ق اگر ق جفت ہے۔ اگر ر کافی طور پر چھوٹا ہے تو ف $\left(\frac{\text{پ}}{ق}\right)$ یقیناً مثبت ہے؛ اس لیے س، $\frac{۱}{۲}$ ق کے مساوی نہیں ہو سکتا اور اس لیے صفر ہونا چاہیے۔

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ سلسلہ کا مجموعہ جبکہ م ایک مثبت منطق عدد $\frac{\text{پ}}{ق}$ ہو (۱ + ی)$^{\frac{\text{پ}}{ق}}$ کی خاص قیمت ہے یعنی

$$(۱ + ۲ \text{ر} \text{جم} \text{طہ} + \text{ر}^۲)^{\frac{\text{پ}}{۲ق}} \left(\text{جم} \frac{\text{پ} \text{فہ}}{ق} + \text{خ} \text{جب} \frac{\text{پ} \text{فہ}}{ق} \right)$$

جس میں جملہ (۱ + ۲ ر جم طہ + ر^۲)$^{\frac{\text{پ}}{۲ق}}$ اپنی حقیقی قیمت رکھتا ہے اور فہ، (270)

مس$^{-۱}$ $\frac{\text{ر} \text{جب} \text{طہ}}{۱ + \text{ر} \text{جم} \text{طہ}}$ کی عددی طور پر کم سے کم قیمت ہے جہاں ی = ر (جم طہ + خ جب طہ)۔

ثانیاً فرض کرو کہ م ایک مثبت غیر منطق عدد ہے؛ ہم اس کو مثبت منطق عددوں م$_۱$، م$_۲$، ... م$_\text{ر}$، ... کے ایک تواتر کی انتہا سمجھینگے۔ تب یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ف (م)، تواتر ف (م$_۱$)، ف (م$_۲$)، ... ف (م$_\text{ر}$)، ... کی انتہا ہے، یا ف (م) = نہا ف (م$_\text{ر}$)۔ استدقاق کے دائرہ کے اندر کسی نقطہ ی کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{م}_\text{ر}) = ۱ + \text{م}_\text{ر}\,\text{ی} + \frac{\text{م}_\text{ر}(\text{م}_\text{ر}-۱)}{\lfloor ۲} \text{ی}^۲ + \cdots + \frac{\text{م}_\text{ر}(\text{م}_\text{ر}-۱)\cdots(\text{م}_\text{ر}-\text{ن}+۲)}{\lfloor \text{ن}-۱} \text{ی}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_\text{ن}(\text{ی})$$

جہاں $|\text{ب}_\text{ن}(\text{ی})|$ مستدق سلسلہ

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)\cdots(\text{ن}+\text{ن}-۱)}{\lfloor \text{ن}} |\text{ی}|^{\text{ن}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)\cdots(\text{ن}+\text{ن})}{\lfloor \text{ن}+۱} |\text{ی}|^{\text{ن}+۱} + \cdots$$

کے انتہائی مجموعہ سے کم ہے جس میں ن ایک ثبت صحیح عدد ہے جو $\text{م}_۱$، $\text{م}_۲$، ...، $\text{م}_\text{ر}$ .... میں سے ہر ایک سے بڑا ہے۔ ن کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے $|\text{ب}_\text{ن}(\text{ی})| < \text{صہ}$، تمام اعداد $\text{م}_\text{ر}$ کے لیے جہاں صہ اختیاری ثبت عدد ہے۔ یہ واضح ہے کہ محدود سلسلہ

$$۱ + \text{م}_\text{ر}\,\text{ی} + \frac{\text{م}_\text{ر}(\text{م}_\text{ر}-۱)}{\lfloor ۲} \text{ی}^۲ + \cdots + \frac{\text{م}_\text{ر}(\text{م}_\text{ر}-۱)\cdots(\text{م}_\text{ر}-\text{ن}+۲)}{\lfloor \text{ن}-۱} \text{ی}^{\text{ن}-۱}$$

کے مجموعہ کی انتہا جبکہ $\text{م}_\text{ر}$، م کی طرف مستدق ہو یہ ہے

$$۱ + \text{م}\,\text{ی} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{\lfloor ۲} \text{ی}^۲ + \cdots + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)\cdots(\text{م}-\text{ن}+۲)}{\lfloor \text{ن}-۱} \text{ی}^{\text{ن}-۱}$$

اور اس لیے یہ $\text{ف}(\text{م}_\text{ر}) - \text{ب}_\text{ن}(\text{ی})$ کی انتہا ہے۔ غیر منطق قوت کی تعریف جو دفعہ ۱۸۶ میں دی گئی ہے اس کی بموجب $(۱+\text{ی})^{\text{م}_\text{ر}}$ کی خاص قیمت کی انتہا $(۱+\text{ی})^{\text{م}}$ ہے۔ چونکہ $|\text{ب}_\text{ن}(\text{ی})| < \text{صہ}$ تمام اعداد $\text{م}_۱$، $\text{م}_۲$، ...، $\text{م}_\text{ر}$ .. کے لئے اسلئے نہا $|\text{ب}_\text{ن}(\text{ی})|$ جسکی

ایک مُعیّن قیمت ہونی چاہیے $\leqslant$ صہ ہے۔
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{۱} + \text{م ی} + \frac{\text{م(م-۱)}}{\underline{|\text{۲}}}\text{ی}^{\text{۲}} + \dots + \frac{\text{م(م-۱)}\dots\text{(م-ن+۲)}}{\underline{|\text{ن-۱}}}\text{ی}^{\text{ن-۱}}$$

$(\text{۱}+\text{ی})^{\text{م}}$ کی خاص قیمت سے بقدر ایک ایسے عدد کے مختلف ہے جس کا مقیاس ن کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لیے صہ سے بڑا نہیں ہے۔ اس لیے ثابت ہوا کہ ثنائی سلسلہ م کی ثبت غیر منطق قیمت کے لیے مستدق ہے اور $(\text{۱}+\text{ی})^{\text{م}}$ کی صدر قیمت کے مساوی ہے۔

(271)

آخر میں فرض کرو کہ م ایک منفی عدد $-\text{م}_{\text{۱}}$ ہے۔ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے $\text{ف(م)}\,\text{ف(م}_{\text{۱}}\text{)} = \text{ف(۰)} = \text{۱}$، اس لیے $\text{ف(م)} = \frac{\text{۱}}{\text{ف(م}_{\text{۱}}\text{)}}$،
یا ف(م)، $(\text{۱}+\text{ی})^{\text{م}_{\text{۱}}}$ کی صدر قیمت کا مقلوب ہے یا $(\text{۱}+\text{ی})^{\text{م}}$ کی صدر قیمت ہے۔

ہم اس پورے نتیجہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں:—

سلسلہ $\text{۱} + \text{م ی} + \frac{\text{م(م-۱)}}{\underline{|\text{۲}}}\text{ی}^{\text{۲}} + \dots + \frac{\text{م(م-۱)}\dots\text{(م-ن+۱)}}{\underline{|\text{ن}}}\text{ی}^{\text{ن}}$

کا مجموعہ ی کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کا مقیاس ایک سے کم ہے، $(\text{۱}+\text{ی})^{\text{م}}$ کی صدر قیمت کے مساوی ہے جو یہ ہے

$$(\text{۱} + \text{۲ ر جم طہ} + \text{ر}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{م}}\,(\text{جم م فہ} + \text{خ جب م فہ})$$

جبکہ م کوئی حقیقی عدد ہو۔ جملہ بالا میں ی کا مقیاس ر ہے اور

اس کی دلیل طہ ہے، اور فہس ت ا $\frac{\text{رجب طہ}}{\text{ا + رجم طہ}}$ کی وہ قیمت ہے
جو ± $\frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

یہ نتیجہ کوشی نے حاصل کیا تھا اور اسکی کتاب "Analyse Algébrique"
میں ملیگا۔

۲۱۲ —— اب صرف اُس صورت پر غور کرنا باقی رہگیا ہے جب کہ
ہق ی = ا،

سلسلہ ا + م + $\frac{\text{م (م - ۱)}}{\lfloor ۲}$ + $\frac{\text{م (م - ۱) (م - ۲)}}{\lfloor ۳}$ + ...

کی رقموں کو $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$ ... سے تعبیر کریں تو $\frac{ا_{ن+۱}}{ا_ن}$ = (م - ن) \ (ن + ۱)،
اگر ن > م تو یہ نسبت منفی ہے اور اس لیے ایک خاص رقم کے بعد اِس سلسلہ
کی رقمیں باری باری سے مثبت اور منفی ہیں۔ یہ سلسلہ دفعہ ۱۹۴ کی رو سے
مستدق ہے اگر بلحاظ مقدار اس کی رقمیں گھٹتی جائیں اور آخرالامر لاانتہا
چھوٹی ہو جائیں۔ یہ بات اُس وقت ہوگی جبکہ ن - م < ن + ۱ یعنے جبکہ
م > -۱، پس سلسلہ نیم مستدق ہوتا ہے اگر م > -۱؛ لیکن اگر م < -۱
تو وہ متسع ہوتا ہے کیونکہ رقموں کی مطلق مقداریں غیر معین طور پر بڑھتی ہیں۔
یہ ثابت کرنے کے لیے کہ جب، م > -۱ تو $ا_ن$ کی مطلق مقدار
غیر معین طور پر گھٹتی ہے جیسے ن غیر معین طور پر بڑھتا ہے مثبت عدد م + ۱
کی بجائے س لکھو اور | $ا_ن$ | کے لیے جو جملہ ہے اُس میں اجزائے ضربی
کی کسی خاص تعداد کے حاصل ضرب کو ک سے تعبیر کرو۔ تب اگر

س سے عین بڑا صحیح عدد ر ہو تو حاصل ہوتا ہے

$$|\text{اِن}| = \text{ک}\left(\text{۱} - \frac{\text{س}}{\text{ر}}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{س}}{\text{ر}+\text{۱}}\right)\cdots\left(\text{۱} - \frac{\text{س}}{\text{ن}}\right)$$

$$< \text{ک}\left[\left(\text{۱} + \frac{\text{س}}{\text{ر}}\right)\left(\text{۱} + \frac{\text{س}}{\text{ر}+\text{۱}}\right)\cdots\left(\text{۱} + \frac{\text{س}}{\text{ن}}\right)\right]^{-\text{۱}}$$

$$< \text{ک}\left[\text{۱} + \text{س}\left(\frac{\text{۱}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{ر}+\text{۱}} + \cdots + \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)\right]^{-\text{۱}}$$

سلسلہ $\frac{\text{۱}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{ر}+\text{۱}} + \frac{\text{۱}}{\text{ر}+\text{۲}} + \cdots$ کی پہلی ر رقموں کا مجموعہ $> \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ اور ان کے بعد ۲ ر رقموں کا مجموعہ بھی $> \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$، اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے ن کی کافی طور پر بڑی قیمت کے جواب میں سلسلہ کا مجموعہ $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ کے کسی مقررہ ضعف سے بڑا ہوتا ہے اور اس لئے سلسلہ کا مجموعہ ن کے ساتھ لاانتہا بڑھتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $|\text{اِن}|$ لاانتہا گھٹتا ہے جیسے ن لاانتہا بڑھتا ہے۔ جب م = -۱ تو ثنائی سلسلہ کی رقمیں متبادلاً +۱ اور -۱ ہیں اور اس لئے سلسلہ مستدق نہیں ہوتا۔

دفعہ ۲۰۶ کے مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ

$$\text{۱} + \text{م ی} + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{۱})}{|\underline{\text{۲}}}\,\text{ی}^{\text{۲}} + \cdots$$

مستدق ہوتا ہے جبکہ مق ی = ۱ بشرطیکہ م > -۱ اور ی ≠ -۱

(272)

جب ی = -۱ تو سلسلہ کی تمام رقمیں ایک خاص رقم کے بعد ایک ہی علامت کی ہوتی ہیں؛ پس معلومہ جانچ

$$\text{نہا}_{\text{ن}}\left(\text{۱} + \frac{\text{اِن}}{\text{اِن}_{-\text{۱}}}\right) > \text{۱}$$

لگانے سے سلسلہ مستدق ہوگا اگر

$$\text{نہا}_{\text{ن}}\left\{\text{۱} - (\text{ن}-\text{م}-\text{۱})\big\backslash\text{ن}\right\} > \text{۱}،$$

یا اگر م > ۰

دفعہ ۲۰۷ میں مذکورہ مسئلہ کی بموجب جب سلسلہ

$$۱ + م ی + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} ی^۲ + \ldots$$

استدقاق کے دائرہ پر مستدق ہوتا ہو تو اس کا مجموعہ جملہ

$$(۱ + ۲ ر جم طہ + ر^۲)^{\frac{۱}{۲} م} (جم م فہ + خ جب م فہ)$$

کی قیمت ہے اس نقطہ پر ۔ ہم پورے نتیجہ کو اِس طرح بیان کرسکتے ہیں:-

سلسلہ $۱ + م ی + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} ی^۲ + \ldots + \frac{م(م-۱)\ldots(م-ن+۱)}{\lfloor ۲} ی^ن + \ldots$

ی کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہوتا ہے جبکہ مق ی = ۱ بشرطیکہ م مثبت ہو؛ نیز مستدق ہوتا ہے اگر م صفر اور -۱ کے درمیان ہو ی کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ی = -۱ کے اور اِس صورت میں ی کی دلیل π ہے۔ یہ سلسلہ متسع ہوتا ہے جبکہ م = -۱ اور جبکہ م > ۱ ی کی تمام قیمتوں کے لیے جن کے لیے سلسلہ مستدق ہوتا ہے اس کا مجموعہ

$$(۲ + ۲ . جم طہ)^{\frac{۱}{۲} م} (جم \tfrac{۱}{۲} م طہ + خ جب \tfrac{۱}{۲} م طہ)$$ ہے

جہاں طہ کی قیمت ±π کے درمیان واقع ہے ۔

ابیل (Abel) نے ایک مقالہ میں جو (Crelle's journal v d.i) میں شایع ہوا تھا م کی ملتف قیمتوں کے لیے مسئلہ ثنائی کی عام صورت پر بحث کی ہے۔

ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۲۱۳ ——— عام شکل میں مسئلہ ثنائی کا ایک اہم اطلاق (جم ط + خ جب ط)^م کا پھیلاؤ ہے جس کی خاص قیمت ڈیموائر کے مسئلہ کی رو سے جم م ط + خ جب م ط ہے اگر ط ½± π کے درمیان واقع ہو - (جم ط + خ جب ط)^م کو شکل جم^م ط × (۱ + خ مس ط)^م میں لکھنے سے

$$\text{جم م ط} + \text{خ جب م ط} = \text{جم}^{\text{م}}\,\text{ط}\ \Big[\Big\{ ۱ - \frac{\text{م (م} - ۱)}{\lfloor ۲}\ \text{مس}^{۲}\,\text{ط} + \ldots \Big\}$$

$$+ \text{خ} \Big\{ \text{م مس ط} - \frac{\text{م (م} - ۱)(\text{م} - ۲)}{\lfloor ۳}\ \text{مس}^{۳}\,\text{ط} + \ldots \Big\}\Big]$$

بشرطیکہ سلسلہ مستدق ہو؛ یہ شرط پوری ہو گی اگر ط حدود ± ¼π کے درمیان واقع ہو خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو، اور نیز یہ شرط پوری ہو گی اگر ط = ± ¼π بشرطیکہ م > -۱،

(278)

(۱) فرض کرو کہ م مثبت ہے، تب

$$\text{جم م ط} = \text{جم}^{\text{م}}\,\text{ط} \Big\{ ۱ - \frac{\text{م (م} - ۱)}{\lfloor ۲}\ \text{مس}^{۲}\,\text{ط}$$

$$+ \frac{\text{م(م} - ۱)(\text{م} - ۲)(\text{م} - ۳)}{\lfloor ۴}\ \text{مس}^{۴}\,\text{ط} - \ldots \Big\}$$

(۱) ......

$$\text{جب م ط} = \text{جم}^{\text{م}}\,\text{ط} \Big\{ \text{م مس ط} - \frac{\text{م(م} - ۱)(\text{م} - ۲)}{\lfloor ۳}\ \text{مس}^{۳}\,\text{ط} + \ldots \Big\}$$

(۲) ......

م کی تمام قیمتوں کے لیے بشرطیکہ ط، ¼± π کے درمیان واقع ہو، اور نیز یہ سلسلے درست ہیں ط = ± ¼π کے لیے بھی — دفعہ ۱۵ میں

جو ضابطے حاصل کئے گئے تھے وہ مثبت صحیح عدد م کی صورت کے لیے سمجھے اور اس صورت میں استدقاق کی شرط نہیں ہے۔ مندرجہ بالا نتیجے اِن ضابطوں کی توسیعات ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ م منفی ہے، تب م کو ـ م میں بدلنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم م ط جم}^{م}\text{ط} = ۱ - \frac{م(م+۱)}{|\underline{۲}}\text{مس}^{۲}\text{ط} + \frac{م(م+۱)(م+۲)(م+۳)}{|\underline{۴}}\text{مس}^{۴}\text{ط} + \cdots \quad (۳)$$

$$\text{جب م ط جم}^{م}\text{ط} = \text{م مس ط} - \frac{م(م+۱)(م+۲)}{|\underline{۳}}\text{مس}^{۳}\text{ط} + \cdots \quad (۴)$$

جو م کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے درست ہیں بشرطیکہ ط، $\pm \frac{1}{4}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔ یہ نتیجے ط $= \pm \frac{1}{4}\pi$ کے لیے صرف اُس صورت میں درست ہیں جبکہ م، ۱ اور صفر کے درمیان واقع ہو۔

۲۱۴ ـــــــ دفعہ ماسبق کے ضابطے (۱) اور (۲) اُس صورت میں جبکہ م ایک مثبت صحیح عدد ہو ساتویں باب میں جم م فہ اور جب م فہ کے جملوں کو جب فہ کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں حاصل کرنے میں استعمال ہو چکے ہیں۔ اب ہم اسی طرح کے جملے معلوم کرینگے جبکہ م مثبت صحیح عدد نہ ہو۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جب، م ایک جفت مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جم م فہ} = ۱ - \frac{م^{۲}}{|\underline{۲}}\text{جب}^{۲}\text{فہ} + \frac{م^{۲}(م^{۲}-۲^{۲})}{|\underline{۴}}\text{جب}^{۴}\text{فہ}$$

$$- \frac{م^{۲}(م^{۲}-۲^{۲})(م^{۲}-۴^{۲})}{|\underline{۶}}\text{جب}^{۶}\text{فہ} + \cdots \quad (۵)$$

اور جب م ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جب م فہ} = \text{م جب فہ} - \frac{\text{م}(\text{م}^2 - 1^2)}{\lfloor 3} \text{جب}^3 \text{فہ}$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}^2 - 1^2)(\text{م}^2 - 3^2)}{\lfloor 5} \text{جب}^5 \text{فہ} - \ldots \text{،} \ldots\ldots (6)$$

(274) یہ جملے اِس طرح حاصل کیے گئے تھے کہ جم م فہ اور جب م فہ کے لیے جو جملے جم فہ اور جب فہ کی قوتوں میں تھے ان میں جم فہ کی قوتوں کی بجائے ا ۔ جب^2 فہ کی قوتیں درج کی گئی تھیں اور پھر اِن قوتوں کو (جو مثبت صحیح عدد تھے) مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا کر نتیجہ کو جب فہ کی قوتوں میں ترتیب دیا گیا تھا ۔ یہی سلسلے حاصل ہونگے جبکہ م کوئی مثبت صحیح عدد ہو بلا لحاظ جفت یا طاق ہونے کے بشرطیکہ جم فہ مثبت ہو اور یہ اس وقت مثبت ہوگا جبکہ فہ، $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہو ۔ اب ا ۔ جم^2 فہ کی قوتیں ضرور نہیں کہ صحیح اعداد ہی ہوں لیکن مسئلہ ثنائی بریں ہم اطلاق پذیر ہوگا کیونکہ تمام سلسلے مستدق ہونگے ۔ چونکہ جب^2 فہ کی قوتوں کے تمام سلسلے مستدق ہوتے ہیں اور چونکہ جم م فہ، جب م فہ کے اصلی جملوں میں سے ہر جملہ میں رقموں کی صرف ایک محدود تعداد شامل ہوتی ہے اس لیے پھیلاؤں کے نتیجے کو جب^2 فہ کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں مرتب کیا جا سکتا ہے ۔ اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر م کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلوں (۵) اور (۶) میں سے ہر ایک درست ہے بشرطیکہ فہ، $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہو؛ پہلا سلسلہ رقموں کی محدود تعداد پر مشتمل نہیں ہوتا جب تک کہ م جفت نہ ہو، اور دوسرا سلسلہ جب تک کہ م طاق نہ ہو ۔

فرض کرو کہ سلسلہ

$$1 + \text{م}(\text{خ جب فہ}) + \frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}(\text{خ جب فہ})^2 + \frac{\text{م}^2(\text{م}^2 - 1^2)}{\lfloor 3}(\text{خ جب فہ})^3 + \ldots\ldots$$

کا انتہائی مجموعہ ف (م) سے تعبیر ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ، سلسلہ (۶) کو خ سے ضرب دیکر سلسلہ (۵) میں جمع کرنے سے حاصل ہوا ہے۔ جب، م مثبت صحیح عدد ہو تو ف (م) = جم م فہ + خ جب م فہ اگر فہ، $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہے۔ اب جبکہ $م_1$، $م_2$ صحیح اعداد ہوں تو

$$ف(م_1) \times ف(م_2) = (جم\, م_1 فہ + خ\, جب\, م_1 فہ)(جم\, م_2 فہ + خ\, جب\, م_2 فہ)$$

$$= جم(م_1 + م_2) فہ + خ\, جب(م_1 + م_2) فہ$$

$$= ف(م_1 + م_2)$$

اِن دو سلسلوں $ف(م_1)$، $ف(م_2)$ کا حاصل ضرب ایک ہی شکل کا ہوگا خواہ $م_1$، $م_2$ کچھ ہی ہوں۔ پس دفعہ ۲۰۹ کا مسئلہ استعمال کرکے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ مساوات

$$ف(م_1) \times ف(م_2) = ف(م_1 + م_2)$$

$م_1$ اور $م_2$ کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے کیونکہ سلسلے مطلقاً مستدق ہیں۔ لہٰذا

$$ف(م_1) ف(م_2) ف(م_3) \ldots ف(م_ق) = ف(م_1 + م_2 + م_3 + \cdots + م_ق)$$

اب فرض کرو کہ $م_1 = م_2 = \ldots = م_ق = \frac{پ}{ق}$ جہاں پ اور ق مثبت صحیح عدد ہیں تب

$$\left\{ف\left(\frac{پ}{ق}\right)\right\}^{ق} = ف(پ)$$

(275) پس $\{ف(پ)\}^{\frac{1}{ق}}$ کی ایک قیمت $ف\left(\frac{پ}{ق}\right)$ ہے اور اس لیے اس کی شکل ہے

$$جم \frac{پ\, فہ + ۲ س \pi}{ق} + خ\, جب \frac{پ\, فہ + ۲ س \pi}{ق}$$

جہاں س کوئی صحیح عدد ہے۔ اب جبکہ فہ = ۰ تو ف $\left(\frac{پ}{ق}\right)$ = ۱،
اس لیے چونکہ مجموعہ ف $\left(\frac{پ}{ق}\right)$ مسلسل بدلتا ہے جیسے فہ، $-\frac{1}{2}\pi$ سے
$+\frac{1}{2}\pi$ تک بڑھتا ہے ہمیں حاصل ہونا چاہیئے س = ۰۔ اگر فہ اِن حدود کے
درمیان واقع ہے، پس اس صورت میں

$$ف\left(\frac{پ}{ق}\right) = جم \frac{پ}{ق} فہ + خ جب \frac{پ}{ق} فہ$$ میں

ثانیاً فرض کرو کہ م ایک مثبت غیر منطق عدد ہے جو منطق اعداد $م_۱، م_۲، م_۳$ ....
کے ایک تواتر کی انتہا ہے۔ تب

$$ف(م_س) = ۱ + م_س (خ جب فہ) + \frac{م_س^۲}{\lfloor ۲}(خ جب فہ)^۲ + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{م_س(م_س^۲-۱^۲)\ldots\ldots(م_س^۲ - \overline{۲ر-۳}^۲)}{\lfloor ۲ر-۱}(خ جب فہ)^{۲ر-۱}$$

$$+ \frac{م_س^۲(م_س^۲-۲^۲)\ldots\ldots(م_س^۲ - \overline{۲ر-۲}^۲)}{\lfloor ۲ر}(خ جب فہ)^{۲ر} + ب$$

جہاں |ب| ، اس مستدق سلسلہ

$$\frac{ن(ن^۲+۱^۲)\ldots(ن^۲ + \overline{۲ر-۱}^۲)}{\lfloor ۲ر+۱}\left|جب فہ\right|^{۲ر+۱}$$

$$+ \frac{ن(ن^۲+۲^۲)\ldots(ن^۲ + \overline{۲ر}^۲)}{\lfloor ۲ر+۲}\left|جب فہ\right|^{۲ر+۲} + \ldots\ldots$$

کے انتہائی مجموعہ کے مقیاس سے کم ہے۔ ن ایک مثبت عدد ہے جو تمام اعداد م، م، ... سے بڑا ہے۔ فہ کی ہر مقررہ قیمت کے جواب میں ر منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ |ب| < صہ، م کی تمام قیمتوں م، م، م، ... کے لیے جہاں صہ کوئی اختیاری مثبت عدد ہے۔

ف (م) کی انتہا یعنی جم م فہ + خر جب م فہ کی انتہا جبکہ س کو لاانتہا بڑھا دیا جائے جم م فہ + خر جب م فہ ہے تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$۱ + م\,(خر جب فہ) + \frac{م^2}{\lfloor۲}(خر جب فہ)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{م\,(م^2-۱^2)\ldots(م^2-\overline{۲ر-۳}^2)}{\lfloor۲ر-۱}(خر جب فہ)^{۲ر-۱}$$

$$+ \frac{م^2(م^2-۲^2)\ \ldots\ (م^2-\overline{۲ر-۲}^2)}{\lfloor۲ر}(خر جب فہ)^{۲ر}$$

اور جم م فہ + خر جب م فہ میں بقدر اُس عدد کے فرق ہے جس کا مقیاس صہ سے تجاوز نہیں کرتا۔ اب چونکہ صہ اختیاری ہے یہ ثابت ہو چکا کہ $\pm \frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان فہ کی ہر قیمت کے لیے لامتناہی سلسلہ، جم م فہ + خر جب م فہ کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ (276)

آخرالامر فرض کرو کہ م منطق یا غیر منطق منفی عدد ۔ م ہے۔ تب چونکہ ف (م) ف (م) = ف (۰) = ۱، اس لیے

جم م فہ + خ جب م فہ = ۱ / (جم م فہ + خ جب م فہ) = ف (م)

پس اس طرح یہ ثابت ہو چکا کہ یہ دو سلسلے

جم م فہ = ۱ − (م^۲ / ۲!) جب^۲ فہ + (م^۲ (م^۲ − ۲^۲) / ۴!) جب^۴ فہ − ....، ... (۵)

جب م فہ = م جب فہ − (م (م^۲ − ۱^۲) / ۳!) جب^۳ فہ

+ (م (م^۲ − ۱^۲)(م^۲ − ۳^۲) / ۵!) جب^۵ فہ − ...، ... (۶)

درست ہیں فہ کی تمام قیمتوں کے لیے جو ± ½ π کے درمیان واقع ہوں خواہ م کوئی حقیقی عدد ہو۔

یہ دو سلسلے مطلقاً مستدق ہوتے ہیں جبکہ فہ = ± ½ π کیونکہ اِن میں سے پہلے سلسلہ کی عام رقم کی مطلق قیمت کو اِر سے تعبیر کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

اِر / اِر+۱ = (۲ر + ۱)(۲ر + ۲) / ((۲ر)^۲ − م^۲) = (۱ + ۳/۲ر + ۱/۲ر^۲)(۱ − م^۲/۴ر^۲)^{−۱}

اس لیے نہا ر (اِر / اِر+۱ − ۱) = ۳/۲

اور اس طرح معلومہ جانچ کی بموجب سلسلہ مستدق ہے۔ اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ (۶) مستدق ہے۔ دفعہ ۲۰۷ میں بیان کردہ آبیل کے مسئلہ کی بموجب سلسلے (۵) اور (۶)، قیمتوں جم ½ م π، ± جب ½ م π کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ فہ = ± ½ π ۔

اسی طرح کے ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ دو سلسلے

$$\text{جتم م فہ} \backslash \text{جتم فہ} = 1 - \frac{\text{م}^2 - 1^2}{\underline{|2}}\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \frac{(\text{م}^2-1^2)(\text{م}^2-3^2)}{\underline{|4}}\,\text{جب}^4\,\text{فہ} - \dots, \dots \quad (7)$$

$$\text{جب م فہ} \backslash \text{جتم فہ} = \text{م جب فہ} - \frac{\text{م}(\text{م}^2-2^2)}{\underline{|3}}\,\text{جب}^3\,\text{فہ}$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}^2-2^2)(\text{م}^2-4^2)}{\underline{|5}}\,\text{جب}^5\,\text{فہ} - \dots, \dots \quad (8)$$

درست ہیں م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے بشرطیکہ فہ، $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔

سلسلے (۷) اور (۸) درست نہیں جبکہ فہ $= \pm \frac{1}{2}\pi$ ۔

سلسلہ (۷) صرف اس وقت مختتم ہوتا ہے جبکہ م ایک طاق صحیح عدد ہو اور سلسلہ (۸) صرف اس وقت جبکہ م ایک جفت صحیح عدد ہو۔ (277)

۲۱۵ ——— اگر ہم جتم م فہ + خ جب م فہ کے لیے وہ سلسلہ لیں جو (۵) اور (۶) سے حاصل ہوتا ہے اور ی = خ جب فہ رکھیں تو چونکہ $(\text{جتم فہ} + \text{خ جب فہ})^{\text{م}} = (\sqrt{1+\text{ی}^2} + \text{ی})^{\text{م}}$ ہمیں یہ پھیلاؤ ملتا ہے

$$(\sqrt{1+\text{ی}^2} + \text{ی})^{\text{م}} = 1 + \text{م ی} + \frac{\text{م}^2}{\underline{|2}}\text{ی}^2 + \frac{\text{م}(\text{م}^2-1^2)}{\underline{|3}}\text{ی}^3 + \frac{\text{م}^2(\text{م}^2-2^2)}{\underline{|4}}\text{ی}^4$$

$$+ \dots + \frac{\text{م}(\text{م}^2-1^2)\dots(\text{م}^2-\overline{2\text{س}-3}^2)}{\underline{|2\text{س}-1}}\text{ی}^{2\text{س}-1}$$

$$+ \frac{\text{م}^2(\text{م}^2-2^2)\dots(\text{م}^2-\overline{2\text{س}-2}^2)}{\underline{|2\text{س}}}\text{ی}^{2\text{س}} + \dots$$

اسی طرح (۷) اور (۸) سے

$$\left(\sqrt{1+ی^2}+ی\right)^م = 1 + م\,ی + \frac{م^2-1^2}{\lfloor 2}\,ی^2 + \frac{م(م^2-2^2)}{\lfloor 3}\,ی^3 + \cdots$$

$$+ \frac{م(م^2-2^2)\cdots(م^2-\overline{2س-2}^2)}{\lfloor 2س-1}\,ی^{2س-1}$$

$$+ \frac{(م^2-1^2)(م^2-3^2)\cdots(م^2-\overline{2س-1}^2)}{\lfloor 2س}\,ی^{2س} + \cdots$$

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ یہ پھیلاؤ درست ہیں م کی تمام قیمتوں کے لیے بشرطیکہ ی کا مقیاس ایک سے کم ہو۔ بعض مصنفین اِن پھیلاؤں کو بلاواسطہ راست حاصل کرتے ہیں اور پھر سلسلوں (۵)، (۶)، (۷)، اور (۸) کو اخذ کرتے ہیں۔ لیکن اِن سلسلوں کو ابتدائی طریقوں سے دریافت کرنا آسان نہیں ہے الّا آنکہ $\sqrt{1+ی^2}$ ی کا مقیاس ایک سے کم ہو، ہمیں اس قید کے ساتھ جم م فہ، جب م فہ کے لیے یہ سلسلے حاصل ہونگے صرف اس وقت جبکہ فہ، $\pm \frac{1}{4}\pi$ کے درمیان واقع ہو اور یہی قید سلسلوں (۱) اور (۲) کے لیے لازم ہے۔ تاہم تسلسل کے اصول کو استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اوپر کے پھیلاؤ، اِن سلسلوں کے استدقاق کی وسعت $|ی|<1$ میں درست ہیں۔

۲۱۶ ـــــــ اگر سلسلوں (۵) اور (۶) میں فہ کی بجائے $\frac{1}{2}\pi -$ فہ

رکھا جائے تو ہمیں ذیل کے سلسلے حاصل ہوتے ہیں جو فہ کی صفر اور π کے درمیان قیمتوں کے لیے درست ہیں :-

جم م (π/۲ - فہ) = ۱ - (م^۲/ا۲) جم^۲ فہ + (م^۲(م^۲-۲^۲)/ا۴) جم^۴ فہ - ... (۹)

جب م (π/۲ - فہ) = م جم فہ - (م(م^۲-۱^۲)/ا۳) جم^۳ فہ + ...، ... (۱۰)

اب ہم جم م فہ اور جب م فہ کے لیے سلسلے معلوم کرسکتے ہیں جبکہ فہ کی کوئی قیمت ہو[1]۔ اگر فہ = ر π + فہ، جہاں فہ، ± ½ π کے درمیان ہے اور ر ایک صحیح عدد ہے تو (278)

جم م فہ = جم م ر π جم م فہ - جب م ر π جب م فہ

نیز جب فہ = (-۱)^ر جب فہ - پس اگر فہ، (ر ± ½) π کے درمیان واقع ہو

تو جم م فہ = جم م ر π (۱ - (م^۲/ا۲) جب^۲ فہ + ...)

- جب (م-۱) ر π {م جب فہ - (م(م^۲-۱^۲)/ا۳) جب^۳ فہ + ...}

(۱۱) ....

اسی طرح

جب م فہ = جب م ر π (۱ - (م^۲/ا۲) جب^۲ فہ + ...)

+ جم (م-۱) ر π {م جب فہ - (م(م^۲-۱^۲)/ا۳) جب^۳ فہ + ...}، ....(۱۲)

---

[1] ضابطوں (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۱۴) کو ڈی ۔ ایف ۔ گرگیوری نے Cambridge Mathematical Journal vol. IV میں شائع کیا تھا۔

اسی طریقہ پر (۹) اور (۱۰) سے حسب ذیل سلسلے حاصل ہونگے :-

$$\text{جم م فہ} = \text{جم م}\,(\text{۲ر}+\text{۱})\frac{\pi}{\text{۲}}\left\{\text{۱} - \frac{\text{م}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}}\,\text{جم}^{\text{۲}}\,\text{فہ} + \cdots\right\}$$

$$+\,\text{جم}\,(\text{م}-\text{۱})(\text{۲ر}+\text{۱})\frac{\pi}{\text{۲}}\left\{\text{م جم فہ} - \frac{\text{م}(\text{م}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})}{\lfloor\text{۳}}\,\text{جم}^{\text{۳}}\,\text{فہ} + \cdots\right\} \quad (\text{۱۳})$$

$$\text{جب م فہ} = \text{جب م}\,(\text{۲ر}+\text{۱})\frac{\pi}{\text{۲}}\left\{\text{۱} - \frac{\text{م}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}}\,\text{جم}^{\text{۲}}\,\text{فہ} + \cdots\right\}$$

$$+\,\text{جب}\,(\text{م}-\text{۱})(\text{۲ر}+\text{۱})\frac{\pi}{\text{۲}}\left\{\text{م جم فہ} - \frac{\text{م}(\text{م}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})}{\lfloor\text{۳}}\,\text{جم}^{\text{۳}}\,\text{فہ} + \cdots\right\} \quad (\text{۱۴})$$

جہاں فہ، ر π اور (ر+۱) π کے درمیان واقع ہے۔

۲۱۷ ــــــ کچھ مفید سلسلے، (۵) اور (۶)، (۷) اور (۸) سے م کو مخصوص قیمتیں دینے سے اخذ کیے جا سکتے ہیں[1]۔ فرض کرو فہ = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi$ تب (۵) اور (۶) میں م کی بجائے لا لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}\,\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi\,\text{لا} = \text{۱} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۲}^{\text{۲}})}{\lfloor\text{۴}} - \cdots,\ \cdots \quad (\text{۱۵})$$

$$\text{جب}\,\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi\,\text{لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})}{\lfloor\text{۳}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})}{\lfloor\text{۵}} - \cdots,\ \cdots \quad (\text{۱۶})$$

نیز (۵) اور (۸) میں م = ۲ لا، فہ = $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\pi$ فرض کرنے سے حاصل ہوتا ہے

---

[1] اس دفعہ کے سلسلے شیل باک (Shellbach) نے حاصل کیے تھے، دیکھو "Crelle's Journal vol. XLVIII" ان پر گلیشر (Glaisher) نے بھی Messenger of Mathematics, vols. II & vII میں بحث کی ہے (۱۵) اور (۱۶) کے مماثل سلسلے ایم۔ ڈیوڈ نے "Bulletin de la Soc. Math. de France, vol. xi" میں دیے ہیں۔

$$\text{جم}\ \tfrac{1}{3}\pi\,\text{لا} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{\underline{|2}} + \frac{\text{لا}^2(\text{لا}^2-1^2)}{\underline{|4}} - \frac{\text{لا}^2(\text{لا}^2-1^2)(\text{لا}^2-2^2)}{\underline{|6}} + \cdots \quad (17)$$

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left\{\text{لا} - \frac{\text{لا}(\text{لا}^2-1^2)}{\underline{|3}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}^2-1^2)(\text{لا}^2-2^2)}{\underline{|5}} - \cdots\right\} \quad (18)$$

(279) π کی قوتوں کے لیے مختلف سلسلے حاصل کیے جا سکتے ہیں اس کے لیے جم $\tfrac{1}{2}\pi$ لا، جب $\tfrac{1}{2}\pi$ لا، ... کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جائے اور لا کی قوتوں کے سروں کو اوپر کے سلسلوں سے تناظر قوت کے سروں کے مساوی رکھا جائے؛ مثلاً (۱۶) سے لا^3 کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\times\frac{1\times 3}{2\times 4}\left(1+\frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{7}\times\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)$$

$$+ \cdots\cdots$$

کسی زاویہ کے دائری ناپ کا پھیلاؤ اس کی جیب کی قوتوں میں

۲۱۸ ـــــ اگر پھیلاؤں (۵) اور (۶) میں جو جم م فہ، جب م فہ کے لیے جب فہ کی قوتوں میں ہیں ہم ان سلسلوں کو م کی صعودی قوتوں کے سلسلوں کے طور پر مرتب کریں جو ہم دفعہ ۲۱۰ کی رو سے کر سکتے ہیں کیونکہ سلسلے

$$1 + \frac{\text{م}^2}{\underline{|2}}\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \frac{\text{م}^2(\text{م}^2+2)}{\underline{|4}}\,\text{جب}^4\,\text{فہ} + \cdots,$$

$$\text{م جب فہ} + \frac{\text{م}(\text{م}^2+1^2)}{\underline{|3}}\,\text{جب}^3\,\text{فہ} + \cdots$$

مستدق ہیں تو، ہم م کی مختلف قوتوں کے سروں کو، جم م فہ، جب م فہ کے پھیلاؤں کے (جو فہ کی قوتوں میں ہوں) تمناظر سروں کے مساوی رکھ سکتے ہیں؛ مثلاً (۲) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{فہ} = \text{جب فہ} + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{جب}^{۳}\text{فہ}}{۳} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\times\frac{\text{جب}^{۵}\text{فہ}}{۵} + \cdots$$

$$+ \frac{۱\times۳\times۵\times\cdots(۲ر-۱)}{۲\times۴\times۶\cdots۲ر}\,\frac{\text{جب}^{۲ر+۱}\text{فہ}}{۲ر+۱} + \cdots ، \cdots \quad (۱۹)$$

اور (۵) سے

$$\text{فہ}^{۲} = \text{جب}^{۲}\text{فہ} + \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{جب}^{۴}\text{فہ}}{۲} + \frac{۲\times۴}{۳\times۵}\,\frac{\text{جب}^{۶}\text{فہ}}{۳} + \cdots$$

$$+ \frac{۲\times۴\cdots(۲ر-۲)}{۳\times۵\cdots(۲ر-۱)}\,\frac{\text{جب}^{۲ر}\text{فہ}}{ر} + \cdots ، \cdots \quad (۲۰)$$

یہ درست ہیں $\pm \frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان فہ کی قیمتوں کے لیے یا جبکہ فہ $= \pm \frac{۱}{۲}\pi$ ۔ ہم اِن کو شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{جب}^{-۱}\text{لا} = \text{لا} + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\,\frac{\text{لا}^{۵}}{۵} + \cdots ، \cdots \quad (۱۹)$$

$$(\text{جب}^{-۱}\text{لا})^{۲} = \text{لا}^{۲} + \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{لا}^{۴}}{۲} + \frac{۲\times۴}{۳\times۵}\,\frac{\text{لا}^{۶}}{۳} + \cdots ، \cdots \quad (۲۰)$$

جہاں $\text{جب}^{-۱}\text{لا}$ دونوں مساواتوں میں وہ مثبت یا منفی حادہ زاویہ ہے جس کی جیب ا کے مساوی ہے۔

سلسلہ (۱۹) کو نیوٹن نے دریافت کیا تھا؛ طریقِ ثبوت کوشی کا ہے۔

(280) ۲۱۹ ـــــــ سلسلہ (۲۰) میں لا کو لا + ھ میں بدلنے اور مساوات کی جانبین میں ھ کے سروں کو مساوی رکھنے سے (یہ عمل لا کے لحاظ سے تفرق کرنے کے مماثل ہے جو دفعات ۲۱۰ اور ۲۰۸ کے مسئلوں کو استعمال کرنے سے جائز قرار دیا جا سکتا ہے) سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب}^{-1}\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = \text{لا} + \frac{2}{3}\text{لا}^3 + \frac{4\times 2}{5\times 3}\text{لا}^5 + \ldots, \ldots \quad (۲۱)$$

یا لا کی بجائے جب فہ رکھنے سے

$$\frac{\text{فہ}}{\text{جب فہ جم فہ}} = 1 + \frac{2}{3}\text{جب}^2\text{فہ} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\text{جب}^4\text{فہ} + \ldots, \ldots \quad (۲۲)$$

یا ۲ فہ = طہ لکھنے سے

$$\frac{\text{طہ}}{\text{جب طہ}} = 1 + \frac{1}{3}(1-\text{جم طہ}) + \frac{2\times 1}{5\times 4}(1-\text{جم طہ})^2 + \ldots$$

جس کو لکھ سکتے ہیں

$$\text{طہ قم طہ} = 1 + \frac{1}{3}\text{سہم طہ} + \frac{2\times 1}{5\times 3}\text{سہم}^2\text{طہ} + \ldots, \ldots \quad (۲۳)$$

نیز (۲۲) میں مس فہ = ما رکھنے سے سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس}^{-1}\text{ما} = \frac{\text{ما}}{\text{ما}^2+1}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\text{ما}^2}{\text{ما}^2+1} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\,\frac{\text{ما}^4}{(\text{ما}^2+1)^2} + \ldots\right\} \ldots \quad (۲۴)$$

جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کو ضعفی زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام میں بیان کرنا

۲۲۰ ــــــ اب ہم یہ دکھائینگے کہ شکل جمᵐ طہ جبⁿ طہ کے جملے کس طرح آسانی کے ساتھ طہ کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام میں بیان کیے جا سکتے ہیں۔ ہم اول تو اُس صورت تک اپنی توجہ محدود رکھینگے جس میں م اور ن مثبت صحیح اعداد ہوں۔ فرض کرو کہ ی = جم طہ + خ جب طہ، تب یⁱ⁻¹ = جم طہ - خ جب طہ؛ پس ۲ جم طہ = ی + یⁱ⁻¹ اور ۲ خ جب طہ = ی - یⁱ⁻¹، اور

(۲ جم طہ)ᵐ (۲ خ جب طہ)ⁿ = (ی + یⁱ⁻¹)ᵐ (ی - یⁱ⁻¹)ⁿ

اگر ہم بائیں طرف کے جملہ کو ی اور یⁱ⁻¹ کی قوتوں میں پھیلائیں تو نتیجہ کو ایک ایسے سلسلہ میں مرتب کیا جا سکتا ہے جس کی رقمیں اِن دو شکلوں ک (یʳ + یⁱ⁻ʳ)، ک (یʳ - یⁱ⁻ʳ) میں سے ایک کے مانند ہونگی جہاں ک ایک ضارب ہے جو م، ن اور ر پر منحصر ہے۔

اب یʳ = جم رطہ + خ جب رطہ اور یⁱ⁻ʳ = جم رطہ - خ جب رطہ بموجب مسئلہ ڈیموائر۔ اس لیے

ک (یʳ + یⁱ⁻ʳ) = ۲ک جم رطہ،

ک (یʳ - یⁱ⁻ʳ) = ۲ خ ک جب رطہ

اس طرح ہمیں جتم^م طہ جیب^ن طہ کے لیے مطلوبہ جملہ، طہ کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں حاصل ہو چکا۔

(281)

مثال

جیب^۵ طہ جتم^۶ طہ کو طہ کے ضعفوں کے سلسلہ میں بیان کرو۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے

(۲ خ جیب طہ)^۵ (۲ جتم طہ)^۶ = (ی − ی̄^۱)^۵ (ی + ی̄^۱)^۶ = (ی^۲ − ی̄^۲)^۵ (ی + ی̄^۱)

یا = (ی^{۱۰} − ۵ی^۶ + ۱۰ی^۲ − ۱۰ی̄^۲ + ۵ی̄^۶ − ی̄^{۱۰}) (ی + ی̄^۱)

یا = ی^{۱۱} + ی^۹ − ۵ی^۷ − ۵ی^۵ + ۱۰ی^۳ + ۱۰ی − ۱۰ی̄^۱ − ۱۰ی̄^۳
+ ۵ی̄^۵ + ۵ی̄^۷ − ی̄^۹ − ی̄^{۱۱}

جو ۲ خ (جیب ۱۱ طہ + جیب ۹ طہ − ۵ جیب ۷ طہ − ۵ جیب ۵ طہ + ۱۰ جیب ۳ طہ + ۱۰ جیب طہ)
کے مساوی ہے

∴ جیب^۵ طہ جتم^۶ طہ = ۱/۲^{۱۰} (جیب ۱۱ طہ + جیب ۹ طہ − ۵ جیب ۷ طہ − ۵ جیب ۵ طہ + ۱۰ جیب ۳ طہ
+ ۱۰ جیب طہ)

اس عمل کو اس طرح بھی مرتب کر سکتے ہیں:—

(۲ جتم طہ)^۶ = ۱ + ۶ + ۱۵ + ۲۰ + ۱۵ + ۶ + ۱

(۲ خ جیب طہ) (۲ جتم طہ)^۶ = ۱ + ۵ + ۹ + ۵ − ۵ − ۹ − ۵ − ۱

(۲ خ جیب طہ)^۲ (۲ جتم طہ)^۶ = ۱ + ۴ + ۴ − ۴ − ۱۰ − ۴ + ۴ + ۴ + ۱

(۲ خ جب ط)^{۳} (۲ جم ط)^{۶} = ۱ + ۳ + ۰ − ۸ − ۶ + ۶ + ۸ − ۰ − ۳ − ۱

(۲ خ جب ط)^{۴} (۲ جم ط)^{۶} = ۱ + ۲ − ۳ − ۸ + ۲ + ۱۲ + ۲ − ۸ − ۳ + ۲ + ۱

(۲ خ جب ط)^{۵} (۲ جم ط)^{۶} = ۱ + ۱ − ۵ − ۵ + ۱۰ + ۱۰ − ۱۰ − ۱۰ + ۵ + ۵ − ۱ − ۱

جہاں بائیں جانب ی کی قوتیں ترک کر دی گئی ہیں اور کسی سطر کا کوئی عدد اس کے اوپر کی سطر میں جو عدد اِس کے عین سر پر ہے اِس کو اس سے ما قبل کے عدد میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوا ہے۔

عددی اعمال حساب کو انجام دینے کا یہ سہولت بخش طریقہ ڈی مارگن[۱] نے اپنی کتاب (Double Algebra and Trig.) میں دیا ہے۔

۲۲۱ ——— ہم ط کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں (۲ جم ط)^{م} اور (۲ جب ط)^{م} کے لیے ضابطے دفعہ ماسبق میں مستعملہ طریقہ کے ذریعہ حاصل کر سکتے ہیں جبکہ م ایک مثبت صحیح عدد ہو۔ چنانچہ

$$(۲\ جم\ ط)^{م} = (ی + \bar{ی})^{م} = ی^{م} + م\ ی^{م-۲} + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}}\ ی^{م-۴} + \cdots + \bar{ی}^{م}\ ،$$

$$اس\ لیے\quad ۲^{م-۱}\ جم^{م}\ ط = جم\ م\ ط + م\ جم\ (م-۲)\ ط + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}}\ جم\ (م-۴)\ ط + \cdots$$

جہاں آخری رقم ہے

$$\frac{۱}{۲}\ \frac{\underline{|م}}{\underline{|\tfrac{۱}{۲}م}\ \underline{|\tfrac{۱}{۲}م}}\ ،\quad یا\quad \frac{\underline{|م}}{\underline{|\tfrac{۱}{۲}م-۱}\ \underline{|\tfrac{۱}{۲}م+۱}}\ جم\ ط$$

[۱] De Morgan.

بموجب اس کے کہ م جفت ہے یا طاق۔

اسی طرح

$(۲ \text{ خ جب ط})^م = (ی - \bar{ی})^م = ی^م - م ی^{م-۲} + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} ی^{م-۴} - \dots + (-۱)^م \bar{ی}^م$

سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۲^{م-۱} (-۱)^{\frac{م}{۲}} \text{جب}^م \text{ط} = \text{جم م ط} - م \text{ جم}(م-۲)\text{ط} + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} \text{جم}(م-۴)\text{ط} - \dots$$

$$+ (-۱)^{\frac{م}{۲}} \frac{\lfloor م}{۲ \lfloor \frac{۱}{۲}م \lfloor \frac{۱}{۲}م}$$

جبکہ م جفت ہو، یا

$$۲^{م-۱} (-۱)^{\frac{م-۱}{۲}} \text{جب}^م \text{ط} = \text{جب م ط} - م \text{ جب}(م-۲)\text{ط} + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} \text{جب}(م-۴)\text{ط} \quad (282)$$

$$- \dots + (-۱)^{\frac{م-۱}{۲}} \frac{\lfloor م}{\lfloor (\frac{۱}{۲}م - ۱) \lfloor (\frac{۱}{۲}م - ۱)}$$

جبکہ م طاق ہو۔

یہ ضابطے ساتویں باب میں حاصل کیے جاچکے ہیں۔

۲۲۲ —— اب ہم ط کے ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام کی رقوم میں جم^م ط، جب^م ط کے اُن پھیلاؤں پر غور کرینگے جبکہ م - ۱ سے بڑا کوئی حقیقی عدد ہو۔

دفعہ ۲۱۲ کی رو سے

$$\text{۲}^{\text{م}}\left(\pm\,\text{جم}\,\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{فہ}\right)^{\text{م}}\text{جم م}\left(\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{فہ} - \text{ک}\,\pi\right)$$

$$= \text{۱} + \text{م جم فہ} + \frac{\text{م(م-۱)}}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{جم ۲ فہ} + \frac{\text{م(م-۱)(م-۲)}}{\underline{|\text{۳}}}\,\text{جم ۳ فہ} + \dots\text{،}$$

$$\text{۲}^{\text{م}}\left(\pm\,\text{جم}\,\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{فہ}\right)^{\text{م}}\text{جب م}\left(\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{فہ} - \text{ک}\,\pi\right)$$

$$= \text{م جب فہ} + \frac{\text{م(م-۱)}}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{جب ۲ فہ} + \frac{\text{م(م-۱)(م-۲)}}{\underline{|\text{۳}}}\,\text{جب ۳ فہ} + \dots$$

جہاں فہ، $(\text{۲ک} - \text{۱})\pi$ اور $(\text{۲ک} + \text{۱})\pi$ کے درمیان واقع ہے سلسلہ اول کو جم عہ سے اور سلسلہ دوم کو جب عہ سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$\text{۲}^{\text{م}}\left(\pm\,\text{جم}\,\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{فہ}\right)^{\text{م}}\text{جم}\left(\text{عہ} - \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{م فہ} + \text{م ک}\,\pi\right) = \text{جم عہ} + \text{م جم (عہ - فہ)}$$

$$+ \frac{\text{م(م-۱)}}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{جم (عہ - ۲ فہ)} + \frac{\text{م(م-۱)(م-۲)}}{\underline{|\text{۳}}}\,\text{جم (عہ - ۳ فہ)} + \dots$$

جہاں فہ، $(\text{۲ک} - \text{۱})\pi$ اور $(\text{۲ک} + \text{۱})\pi$ کے درمیان واقع ہے۔ فرض کرو کہ فہ = ۲ طہ
تب اگر ک جفت (= ۲ س) ہو تو

$$\text{۲}^{\text{م}}.\,\text{جم}^{\text{م}}\,\text{طہ}.\,\text{جم}\left(\text{عہ} - \text{م طہ} + \text{۲ م س}\,\pi\right)$$

$$= \text{جم عہ} + \text{م}.\,\text{جم (عہ - ۲ طہ)} + \frac{\text{م(م-۱)}}{\underline{|\text{۲}}}.\,\text{جم (عہ - ۴ طہ)} + \dots$$

جہاں طہ، $\text{۲ س}\,\pi - \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\pi$ اور $\text{۲ س}\,\pi + \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\pi$ کے درمیان واقع ہے؛
لیکن اگر ک طاق (= ۲ س + ۱) ہو تو

۲^م (-جم طہ)^م جم (عہ - م طہ + م ۲س + ۱ π)

= جم عہ + م جم (عہ - ۲ طہ) + م(م - ۱)/۲| جم (عہ - ۴ طہ) + ...

جہاں طہ، ۲س π + ½ π اور ۲س π + ³⁄₂ π کے درمیان واقع ہے۔

ان نتیجوں میں رکھو عہ = م طہ تو

۲^م جم^م طہ جم ۲ م س π

= جم م طہ + م جم (م - ۲) طہ + م(م - ۱)/۲| جم (م - ۴) طہ + ...، (۲۵)

(283) جہاں طہ، ۲س π - ½ π اور ۲س π + ½ π کے درمیان واقع ہے؛ نیز

۲^م (-جم طہ)^م جم (۲س + ۱) م π

= جم م طہ + م جم (م - ۲) طہ + م(م - ۱)/۲| جم (م - ۴) طہ + ...، (۲۶)

جہاں طہ، ۲س π + ½ π اور ۲س π + ³⁄₂ π کے درمیان واقع ہے۔

پھر، رکھو عہ = م طہ + ½ π تو

۲^م جم^م طہ جب ۲ م س π

= جب م طہ + م جب (م - ۲) طہ + م(م - ۱)/۲| جب (م - ۴) طہ + ...، ...(۲۷)

جہاں طہ، ۲س π - ½ π اور ۲س π + ½ π کے درمیان واقع ہے؛ نیز

۲^م (-جم طہ)^م جب (۲س + ۱) م π

= جب م طہ + م جب (م - ۲) طہ + م(م - ۱)/۲| جب (م - ۴) طہ + ...، ...(۲۸)

جہاں طہ، ۲س π + ½ π اور ۲س π + ³⁄₂ π کے درمیان واقع ہے۔

پھر طہ کو طہ - ½ π میں بدلو اور رکھو عہ = م طہ تو

۲^م جب^م طہ جم م (۲س + ½) π

= جم م طہ - م جم (م - ۲) طہ + م (م - ۱)/۲! جم (م - ۴) طہ - ... ، ... (۲۹)

جہاں طہ، ۲ س π اور (۲ س + ۱) π کے درمیان واقع ہے، نیز

۲^م (- جب طہ)^م جم م (۲ س + ۳/۲) π

= جم م طہ - م جم (م - ۲) طہ + م (م - ۱)/۲! جم (م - ۴) طہ - ... ، ... (۳۰)

جہاں طہ، (۲ س + ۱) π اور (۲ س + ۲) π کے درمیان واقع ہے۔
بالآخر رکھو ع = م طہ + ۱/۲ π اور طہ کو طہ - ۱/۲ π میں تبدیل کرو تو

۲^م جب^م طہ جب م (۲ س + ۱/۲) π

= جب م طہ - م جب (م - ۲) طہ + م (م - ۱)/۲! جب (م - ۴) طہ - ... ، ... (۳۱)

جہاں طہ، ۲ س π اور (۲ س + ۱) π کے درمیان واقع ہے، نیز

(- ۲ جب طہ)^م جب م (۲ س + ۳/۲) π

= جب م طہ - م جب (م - ۲) طہ + م (م - ۱)/۲! جب (م - ۴) طہ ... ، ... (۳۲)

جہاں طہ، (۲ س + ۱) π اور (۲ س + ۲) π کے درمیان واقع ہے۔
یہ سلسلے طہ کی تمام قیمتوں کے لئے مستدق ہیں اگر م مثبت ہو۔ اگر م صفر اور - ۱ کے درمیان واقع ہے تو طہ کی انتہائی قیمتیں ۲ س π ± ۱/۲ π یا ۲ س π، (۲ س + ۱) π خارج کرنی چاہئیں کیونکہ طہ کی اِن قیمتوں کے لئے سلسلے مستدق نہیں ہوتے۔

ائیبل نے ثنائی مسئلہ پر اپنے مقالہ میں اِس دفعہ کے آٹھ ضابطوں کو بیان کیا تھا لیکن معلوم ہوتا ہے کہ بعد کے مصنفین نے اِن پر نظر نہیں ڈالی۔

—— (+) ——

(284)

پندرہواں باب

قوت نمائی تفاعل۔ لوکارتم

قوت نمائی سلسلہ

۲۲۳ — لامتناہی سلسلہ

$$۱ + ی + \frac{ی^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{ی^{۳}}{|\underline{۳}} + \cdots + \frac{ی^{ن}}{|\underline{ن}} + \cdots$$

پر غور کرو جسکا انتہائی مجموعہ ہم ق (ی) سے تعبیر کرینگے جہاں ی ملتقف عدد لا + خ ما ہے۔ اگر ی کا مقیاس ر ہو تو سلسلہ

$$۱ + ر + \frac{ر^{۲}}{|\underline{۲}} + \cdots$$

ر کی تمام قیمتوں کے لئے مستدق ہے کیونکہ (ن + ۱) ویں رقم کی نسبت ن ویں رقم کے ساتھ $\frac{ر}{ن}$ ہے جو مسلسل گھٹتی ہے جیسے ن بڑھتا ہے۔ پس ابتدائی سلسلہ ی کی تمام قیمتوں کے لئے مطلقاً مستدق ہے۔ اس سلسلہ کو قوت نمائی سلسلہ کہتے ہیں اور یہ کسی دائرہ میں جسکا مرکزی = ۰ پر ہو یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

۲۲۴ — $ی^{لا}$ اور $ی^{-لا}$ کے جواب میں جو دو قوت نمائی سلسلے ہیں انکو

باہم ضرب دیا جائے تو $ی_1$ اور $ی_2$ میں م ویں درجے کی رقم ہے

$$\frac{ی_1^{م}}{\lfloor م} + \frac{ی_1^{م-1}}{\lfloor م-1}\,\frac{ی_2}{\lfloor 1} + \frac{ی_1^{م-2}}{\lfloor م-2}\,\frac{ی_2^{2}}{\lfloor 2} + \cdots + \frac{ی_2^{م}}{\lfloor م}$$

جو مسئلہ ثنائی کی رو سے $\frac{1}{\lfloor م}(ی_1+ی_2)^{م}$ کے مساوی ہے کیونکہ م مثبت صحیح عدد ہے۔ اس لئے متذکرۂ صدر دو سلسلوں کے حاصل ضرب کے لئے یہ سلسلہ

$$1 + (ی_1+ی_2) + \frac{(ی_1+ی_2)^{2}}{\lfloor 2} + \cdots + \frac{(ی_1+ی_2)^{م}}{\lfloor م} + \cdots$$

حاصل ہوتا ہے جو $ق(ی_1+ی_2)$ کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ اب دفعہ ۲۰۹ میں ثابت کردہ مسئلہ سے چونکہ یہ قوت نمائی سلسلے دونوں مطلقاً مستدق ہیں ان کے مجموعوں کا حاصل ضرب مندرجۂ بالا حاصل ضربی سلسلہ کے مجموعہ کے مساوی ہے، اس لئے

$$ق(ی_1) \times ق(ی_2) = ق(ی_1+ی_2) \quad \ldots\ldots (۱)$$

اس بنیادی مساوات سے ہم فوراً اخذ کرتے ہیں

(285)

$$ق(ی_1) \times ق(ی_2) \times \cdots \times ق(ی_ن) = ق(ی_1+ی_2+\cdots+ی_ن)$$

اور اسلئے $\{ق(ی)\}^{ن} = ق(ن\,ی)$ .... (۲)

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔[1]

۲۲۵ — اگر مساوات (۲) میں ی = ۱ رکھا جائے تو

$$ق(ن) = \{ق(1)\}^{ن}$$

[1] یہ تحقیق کوشی سے منسوب ہے، دیکھو اسکی Analyse Algebrique -

جہاں ق (۱) سے سلسلہ

$$1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \dots\dots\dots$$

کا انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔ آگے چلکر یہ دکھایا جائیگا کہ عدد ق (۱) ایک غیر منطق عدد ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹.... ہے، اِسکو بالعموم و سے تعبیر کرتے ہیں۔ پس جبکہ ن مثبت صحیح عدد ہو تو ق (ن) = وٓ

پھر (۲) میں فرض کرو کہ ی = ف/ق جہاں ف اور ق ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں اور فرض کرو کہ ن = ق تو {ق (ف/ق)}^ق = ق (ف)

اسلئے ق (ف/ق)، ق (ف) یا و^ف کا ق واں جذر ہونا چاہیے۔

چونکہ ق (ف/ق) حقیقی اور مثبت ہے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ق (ف/ق)، ق√وف کی حقیقی مثبت قیمت ہے، اسکو ہم و^(ف/ق) کی صدر قیمت کہینگے۔

قوت نمائی سلسلہ دفعات ۲۰۳ تا ۲۰۸ میں غور کردہ قوتی سلسلہ کی ایک خاص صورت ہے۔ اس کے استدقاق کا نصف قطر لاانتناہی ہے اور اس لئے کسی ثابت دائرہ میں جسکا مرکز ی = ۰ پر ہو یہ سلسلہ یکساں طور پر ستدق ہوتا ہے۔ مزید بریں دفعہ ۲۰۰ میں ثابت کردہ مسئلہ کی رو سے تفاعل ق (ی) کسی نقطہ ی پر مسلسل ہے۔ اگر لا کوئی دیا ہوا غیر منطق مثبت حقیقی عدد ہو تو اسکی تعریف مثبت منطق عددوں لا۱، لا۲، ... لام ... کے ایک تواتر کی انتہا سے ہو سکتی ہے۔ دفعہ ۱۸۶ میں بیان کردہ تعریف کی رو سے وٓلا کی صدر قیمت

قوٗلام کی انتہا ہے جبکہ صحیح عدد م لاانتہا بڑھا دیا جائے! یہ معلوم ہے کہ یہ انتہا موجود ہوتی ہے اور اسکی قیمت منطق عددوں کے کسی مخصوص تواتر پر جو دئے ہوئے غیر منطق عدد لا کی تعریف کے لئے استعمال ہوا ہو منحصر نہیں ہوتی۔ چونکہ ق (لا) ایک مسلسل تفاعل ہے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ق (لا)، ق (لام) کی انتہا ہے جبکہ م کو لاانتہا بڑھا دیا جائے۔ پس چونکہ قوٗلام = ق (لام)، م کی ہر قیمت کے لئے، اسلئے

قوٗلا = ق (لا) جبکہ قوٗلا اپنی صدر قیمت اختیار کرے۔

ثانیاً اگر لا کوئی منفی حقیقی عدد ہو تو چونکہ

ق (لا) ق (-لا) = ق (۰) = ۱

اسلئے ق (لا) = ۱/قوٗ-لا = قوٗلا جہاں قوٗ، قوٗلا اپنی صدر قیمتیں رکھتے ہیں

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ کسی حقیقی عدد لا کیلئے سلسلہ

۱ + لا + لا۲/[۲ + ...

کا انتہائی مجموعہ، قوٗلا کی صدر قیمت ہے جہاں قوٗ کی تعریف ق (۱) = قوٗ سے ہوئی ہے۔ یہ قوت نمائی مسئلہ ایک حقیقی قوت نما کے لئے ہے۔

۲۲۶ — اب ہم بتائینگے کہ خواہ ی کوئی ملتف عدد ہو عدد ق (ی) جو ی کی قوتوں میں قوت نمائی سلسلہ کا انتہائی مجموعہ ہے (۱ + ی/م)م کی انتہائی قیمت کے مساوی ہے جبکہ م کو لاانتہا بڑھا دیا جائے

(286)

جہاں م کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left(۱+\frac{ی}{م}\right)^{م}=۱+م\frac{ی}{م}+\frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}}\cdot\frac{ی^{۲}}{م^{۲}}+\dots+\frac{م(م-۱)\dots(م-س+۱)}{\underline{|س}}\cdot\frac{ی^{س}}{م^{س}}$$

$$+\dots\dots\dots$$

$$=۱+ی+\left(۱-\frac{۱}{م}\right)\frac{ی^{۲}}{\underline{|۲}}+\dots+\left(۱-\frac{۱}{م}\right)\left(۱-\frac{۲}{م}\right)\dots\left(۱-\frac{س-۱}{م}\right)\frac{ی^{س}}{\underline{|س}}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

اب اگر ا، ب، ج، ... کوئی مثبت حقیقی عدد ہوں ایک سے کم تو

$$(۱-ا)(۱-ب)>۱-(ا+ب)$$

$$(۱-ا)(۱-ب)(۱-ج)>(۱-ا-ب)(۱-ج)$$

$$>۱-(ا+ب+ج)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

پس $(۱-ا)(۱-ب)(۱-ج)\dots<۱$ اور $>۱-(ا+ب+ج+\dots)$

اور (فرض کرو) $=۱-ط(ا+ب+ج+\dots\dots)$

جہاں ط، صفر اور ایک کے درمیان کوئی عدد ہے۔ پس

$$\left(۱-\frac{۱}{م}\right)\left(۱-\frac{۲}{م}\right)\dots\left(۱-\frac{س}{م}\right)=۱-ط_{س}\left(\frac{۱}{م}+\frac{۲}{م}+\dots+\frac{س}{م}\right)$$

$$=۱-ط_{س}\frac{س(س+۱)}{۲م}$$

جہاں $ط_{س}$، صفر اور ایک کے درمیان کوئی عدد ہے۔

اب

$$\left(1+\frac{ی}{م}\right)^{م} = ۱ + ی + \frac{ی^۲}{\lfloor ۲} + \cdots + \frac{ی^{س}}{\lfloor س} + \cdots + \frac{ی^{م}}{\lfloor م} + ب$$

جہاں ب′

$$- \frac{ی^۲}{۲م}\left\{۱ + ط_۲ \times \frac{ی}{۱} + ط_۳ \times \frac{ی^۲}{\lfloor ۲} + \cdots + ط_{س+۱} \times \frac{ی^{س}}{\lfloor س} + \cdots\right.$$

$$\left. + ط_{م-۱} \times \frac{ی^{م-۲}}{\lfloor م-۲}\right\}$$

کو تعبیر کرتا ہے۔

خطوط وحدانی کے اندرونی سلسلہ کے مجموعے کا مقیاس مستدق سلسلہ

$$۱ + \frac{|ی|}{۱} + \frac{|ی|^۲}{۲} + \cdots\cdots\cdots$$

(287) کے انتہائی مجموعے سے کم ہے؛ اور جب م کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو $\frac{ی^۲}{۲م}$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ اسلئے $\left(۱+\frac{ی}{م}\right)^{م}$ کی انتہائی قیمت جبکہ م کو لاانتہا بڑھا دیا جائے تفاعل ق (ی) ہے۔ عدد ھ، $\left(۱+\frac{۱}{م}\right)^{م}$ کی انتہائی قیمت ہے۔

۲۲۷۔ دفعہ سابق میں ثابت کردہ مسئلہ سے ق (ی) کی قیمت معلوم کرنیکا طریقہ حاصل ہوتا ہے جہاں ی = لا + خ ما جو ایک ملتف عدد ہے۔ اس مسئلہ سے

$$ق(لا + خ ما) = نہا\left(۱ + \frac{لا + خ ما}{م}\right)^{م} ;$$

رکھو $\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{م}} = \text{غہ جم فہ}$، $\frac{\text{ما}}{\text{م}} = \text{غہ جب فہ}$ تو

$$\left(\text{۱} + \frac{\text{لا} + \text{خ ما}}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = \text{غہ}^{\text{م}}\left(\text{جم فہ} + \text{خ جب فہ}\right)^{\text{م}} = \text{غہ}^{\text{م}}\left(\text{جم م فہ} + \text{خ جب م فہ}\right)$$

حسب مسئلہ ڈیموائیر۔

نیز

$$\text{غہ} = \sqrt{\text{۱} + \frac{\text{۲لا}}{\text{م}} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}}}{\text{م}^{\text{۲}}}}$$

اور فہ، $\text{مس}^{-\text{۱}} \frac{\text{ما}}{\text{لا} + \text{م}}$ کی صدر قیمت ہے۔ $\text{غہ}^{\text{م}}$ کی انتہائی قیمت

$$\left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^{\text{م}} \left\{\text{۱} + \frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{(\text{لا} + \text{م})^{\text{۲}}}\right\}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{م}}$$

کی انتہائی قیمت ہے یا

$$\text{ق}^{(\text{لا})} \left\{\text{۱} + \frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{م}\left(\sqrt{\text{م}} + \text{لا}/\sqrt{\text{م}}\right)^{\text{۲}}}\right\}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{م}}$$

کی انتہائی قیمت۔ اب فرض کرو کہ ر، $\sqrt{\text{م}} + \text{لا}/\sqrt{\text{م}}$ سے کم ایک ثابت مثبت عدد ہے، تب

$$\left\{\text{۱} + \frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{م}\left(\sqrt{\text{م}} + \text{لا}/\sqrt{\text{م}}\right)^{\text{۲}}}\right\}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{م}}$$

کی انتہا، ایک اور

$$\left\{\text{۱} + \frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{م ر}^{\text{۲}}}\right\}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{م}}$$

کے درمیان واقع ہے یا ایک اور $\text{ق}^{\text{ما}^{\text{۲}}/\text{۲ر}^{\text{۲}}}$ کے درمیان۔ اب چونکہ

شرط ر < |م| + |لا| |م| کے تحت ر کو اسقدر بڑا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں اسلئے

$$\left\{ 1 + \frac{\text{ما}^2}{(\text{لا} + \text{م})^2} \right\}^{\frac{1}{2}\text{م}}$$

کی انتہا ایک ہے اور اسلئے غ م کی انتہا ف (لا) ہے جو فولا کی صدر قیمت ہے۔ م مسق ا $\frac{\text{ما}}{\text{لا}+\text{م}}$ کی انتہائی قیمت، $\frac{\text{م ما}}{\text{لا}+\text{م}}$ کی انتہائی قیمت ہے جو ما ہے، پس

$$\text{نہا} \left(1 + \frac{\text{لا} + \text{خ ما}}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = \text{ولا} (\text{جم ما} + \text{خ جب ما})$$

جہاں ولا اپنی صدر قیمت رکھتا ہے، اس طرح

$$\text{ف} (\text{لا} + \text{خ ما}) = \text{ولا} (\text{جم ما} + \text{خ جب ما})$$

(288)

دائری تفاعلوں کے پھیلاؤ

۲۲۸ — اگر ہم دفعہ سابق کے آخری نتیجہ میں لا = ۰ رکھیں تو

$$\text{ف} (\text{خ ما}) = \text{جم ما} + \text{خ جب ما}$$

اسلئے $\text{جم ما} + \text{خ جب ما} = 1 + \text{خ ما} - \frac{\text{ما}^2}{\lfloor 2} - \text{خ} \frac{\text{ما}^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots$

یا اس مساوات کی طرفین میں خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{جم ما} = ۱ - \frac{\text{ما}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{ما}^{۴}}{\lfloor ۴} - \dots + (-۱)^{\text{س}} \frac{\text{ما}^{۲\text{س}}}{\lfloor ۲\text{س}} + \dots \quad (۳)$$

$$\text{جب ما} = \text{ما} - \frac{\text{ما}^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{ما}^{۵}}{\lfloor ۵} \dots + (-۱)^{\text{س}} \frac{\text{ما}^{۲\text{س}+۱}}{\lfloor ۲\text{س}+۱} + \dots \quad (۴)$$

پس جم ما اور جب ما کیلئے دائری ناپ ما کی قوتوں میں پھیلے ہوئے سلسلے حاصل ہو چکے، یہ سلسلے دفعہ ۹۹ میں حاصل کئے جا چکے تھے۔
ہم ان نتیجوں کو شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں:۔

$$\left.\begin{aligned} \text{جم ما} &= \frac{۱}{۲}\left\{\text{ق}(\text{خ ما}) + \text{ق}(-\text{خ ما})\right\} \\ \text{جب ما} &= \frac{۱}{۲\text{خ}}\left\{\text{ق}(\text{خ ما}) - \text{ق}(-\text{خ ما})\right\} \end{aligned}\right\} \dots\dots (۵)$$

دائری تفاعلوں کی قوت نمائی قیمتیں

۲۲۹ ۔ اگر ی حقیقی عدد ہو تو جملہ $\text{و}^{\text{ی}}$ بموجب تعریف مندرجۂ جبر و مقابلہ کثیر القیمتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ی ایک مثبت صحیح عدد ہو ۔ اگر ی کسر $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ کے مساوی ہو جو اپنی مختصر ترین شکل میں ہے تو $\text{و}^{\text{ف}/\text{ق}}$ کی ق قیمتیں ہیں یعنی $\text{و}^{\text{ف}}$ کے ق ویں جذر۔
ان قیمتوں میں سے وہ قیمت جو حقیقی اور مثبت ہے $\text{و}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت کہلاتی ہے اور ق (ی) کے مساوی ہے۔ اگر ی ایک غیر منطق حقیقی عدد ہو تو $\text{و}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت کی تعریف، حسب دفعہ ۱۸۶، اس تواتر کی انتہا سے کیجاتی ہے جو $\text{و}^{\text{ی}_۱}$، $\text{و}^{\text{ی}_۲}$، ...... $\text{و}^{\text{ی}_\text{ر}}$، ...... کی صدر قیمتوں سے بنتا ہے جہاں $\text{ی}_۱$، $\text{ی}_۲$، ...... $\text{ی}_\text{ر}$، ...... منطق عددوں کا

ایک تواتر ہے جسکی انتہا ی ہے۔ ہم و^ی سے بالعموم ق (ی) کی صدر قیمت مراد لینگے۔

اگر ی حقیقی عدد نہ ہو تو و^ی کی کوئی تعریف تا حال نہیں دی گئی ہے اور یہ اس حد تک بے معنی رمز ہے۔

لیکن رمز و^ی یا و^{لا+خ ما} کو تعریف کے ذریعہ معنی پہنانا سہولت پیدا کرتا ہے۔ ہم و^ی کو جو معنی پہنائینگے اس کا صرف ایک جزو یہاں بیان کرینگے یعنی صرف اُسکی تعریف کرینگے جسکو و^ی کی صدر قیمت کہا جاسکتا ہے، اور پھر زیادہ عام تعریف کی طرف رجوع ہونگے۔

(289) تفاعل و^ی کی صدر قیمت کی تعریف ہم یہ کرینگے کہ وہ تفاعل ق (ی) ہے یا[1] (جسکے معنی وہی ہیں) تفاعل $(1+\frac{ی}{م})^م$ کی انتہا ہے جبکہ م کو مثبت صحیح قیمتوں میں سے لا انتہا بڑھا دیا جائے۔

یہ توجہ طلب ہے کہ و^{لا+خ ما} کی صدر قیمت کی یہ تعریف ایسی ہے کہ یہ تفاعل قوتوں کے معمولی قانون کو پورا کرتا ہے یعنی

$$و^{لا_1+خ ما_1} \times و^{لا_2+خ ما_2} = و^{لا_1+لا_2+خ(ما_1+ما_2)}$$

[1] تعریف کی یہ آخری شکل "Schlömilch" کی مجوزہ ہے، دیکھو Zeitschrift für Math. Vol. VI.

یہ دفعہ ۲۲۴ کے مسئلہ (۱) سے مستنبط ہوتا ہے۔ ہم بالعموم رمز $\text{و}^{\text{ی}}$ سے جب کبھی یہ استعمال ہو اسکی صدر قیمت ق (ی)، حسب تعریف بالا، مراد لینگے۔

۲۳۰۔ رمز $\text{و}^{\text{لا}+\text{خ ما}}$ کے مفہوم سے متعلق اِس قرارداد کے بعد دفعہ ۲۲۷ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^{\text{لا}+\text{خ ما}} = \text{و}^{\text{لا}}\,(\text{جم ما} + \text{خ جب ما})$$

اور لا = ۰ رکھنے سے $\text{و}^{\text{خ ما}} = \text{جم ما} + \text{خ جب ما}$

مسئلہ (۵) کو اب لکھا جا سکتا ہے

$$\left.\begin{aligned} \text{جم ما} &= \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\text{خ ما}} + \text{و}^{-\text{خ ما}}\right) \\ \text{جب ما} &= \frac{1}{2\,\text{خ}}\left(\text{و}^{\text{خ ما}} - \text{و}^{-\text{خ ما}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

اِنکو جیب التمام اور جیب کی قوت نمائی قیمتیں کہتے ہیں۔ طالب علم کو یہ دیکھ لینا چاہئے کہ مسئلہ (۶)، مساواتوں (۳) اور (۴) کو رمزی طریقہ میں لکھنے کے سوا اور کچھ نہیں ہے جنکو شکل (۵) میں بھی لکھا جا چکا ہے

رمز $\text{و}^{\text{خ ما}}$ کو رمز ق (خ ما) کی بجائے لکھنے میں صرف یہ فائدہ ہے کہ قبل الذکر سے ضرب کا وہ قانون جو دفعہ ۲۲۴ میں دیا گیا ہے بہت جلد ذہن میں آجاتا ہے یعنی مسئلہ (۱) کی شکل وہی ہے جو حقیقی قوت نماؤں کو ضرب دینے کے لئے ہے؛ اس لئے قوت نماؤں کو خیالی قوتوں کے ساتھ لینے میں سہولت نظر آتی ہے جنکے لئے ضرب کا قانون وہی ہوگا جو (۱) سے بیان ہوتا ہے۔

۲۳۰ ا۔ تفاعل $\text{و}^{\text{ی}}$ کی تعریف، ی کی کسی مختلف قیمت کیلئے اوپر یہ کی گئی ہے کہ وہ قوت نمائی سلسلہ

$$1 + ی + \frac{ی^{2}}{\lfloor 2} + \frac{ی^{3}}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

کا انتہائی مجموعہ ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$و^{ی} = 1 + ی + \frac{ی^{2}}{\lfloor 2} + \cdots + \frac{ی^{س}}{\lfloor س} + ب_{س}$$

جہاں $|ب_{س}| \not> \frac{|ی|^{س+1}}{\lfloor س+1} + \frac{|ی|^{س+2}}{\lfloor س+2} + \cdots\cdots$ ،

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$|ب_{س}| < \frac{|ی|^{س+1}}{\lfloor س+1}\left\{1 + |ی| + \frac{|ی|^{2}}{\lfloor 2} + \frac{|ی|^{3}}{\lfloor 3} + \cdots\cdots\right\} \quad (290)$$

یا $< \frac{|ی|^{س+1}}{\lfloor س+1}\, و^{|ی|}$

اگر $|ی| < 1$ تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$|ب| < \frac{|ی|^{س+1}}{\lfloor س+1}\left\{1 + |ی| + |ی|^{2} + \cdots\cdots\right\}$$

یا $|ب| < \frac{|ی|^{س+1}}{\lfloor س+1}\, \frac{1}{1-|ی|}$

اس طرح ہم دکھا چکے کہ

$$و^{ی} = ۱ + ی + \frac{ی^{۲}}{\lfloor ۲} + \ldots\ldots + \frac{ی^{س}}{\lfloor س}(۱ + ع_{س})$$

جہاں $|ع_{س}| < \frac{|ی|}{\lfloor س + ۱}\, و^{|ی|}$، اور اسلئے $|ع_{س}|$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ $|ی|$ صفر کی طرف مستدق ہو۔ خاص صورت میں $س = ۱$ لینے سے مسئلہ $و^{ی} = ۱ + ی\,(۱ + ع_{۱})$ حاصل ہوتا ہے جہاں $|ع_{۱}| < \frac{۱}{۲}\,|ی|\,و^{|ی|}$، اور اسلئے $|ع_{۱}|$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ $|ی|$ صفر کی طرف مستدق ہو۔ ہم اس نتیجہ کو شکل

$$نہا_{|ی| \to ۰}\ \frac{و^{ی} - ۱}{ی} = ۱$$

میں بیان کرسکتے ہیں۔

اس آخری نتیجہ سے حاصل ہوتا ہے $نہا_{ھ \to ۰}\ \frac{و^{ی+ھ} - و^{ی}}{ھ} = و^{ی}$ اور

اس لئے تفاعل $و^{ی}$ ایسا ہے کہ وہ خود اپنے تفرقی سر کے مساوی ہے۔ علم تحلیل میں تفاعل $و^{ی}$ کی ابتدا اِس تعریف کے ساتھ کیجا سکتی ہے کہ وہ ایسا تفاعل $ع$ ہے جو حسب ذیل شرطوں کو پورا کرتا ہے :-

$\frac{فرع}{فری} = ع$ ، $ی$ کی ہر قیمت کے لئے

اور $ع = ۱$ جبکہ $ی = ۰$

اگر یہ مان لیا جائے کہ سلسلہ $ا_0 + ا_1 ی + ا_2 ی^2 + \dots$ موجود ہے جو ی کی ہر قیمت کے لئے مستدق ہے اور ایسا ہے کہ اس کے مشتق سلسلہ $ا_1 + ۲ ا_2 ی + ۳ ا_3 ی^2 + \dots$ میں بھی وہی خاصیت ہے تو دونوں سلسلے کسی محدود نصف قطر کے دائرہ میں یکساں طور پر مستدق ہوتے ہیں۔ پہلے سلسلہ کے مجموعہ کو $ع$ سے تعبیر کیا جائے تو دوسرے سلسلہ کا مجموعہ ایک معلومہ مسئلہ کی رو سے $\frac{فرع}{فری}$ ہے۔ اگر اب $\frac{فرع}{فری} = ع$ تو ہم متناظر رقموں کے سروں کو مساوی رکھہ سکتے ہیں، اس طرح $ا_1 = ا_0$، $۲ ا_2 = ا_1$، ... $ن ا_ن = ا_{ن-۱}$ اور اسلئے $ا_ن = \frac{ا_0}{|\underline{ن}}$ ۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$ع = ا_0 \left\{ ۱ + ی + \frac{ی^2}{|\underline{۲}} + \dots + \frac{ی^ن}{|\underline{ن}} + \dots \right\}$$

اور یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ یکساں استدقاق کی مسلمہ شرطوں کو پورا کرتا ہے اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ شرط $\frac{فرع}{فری} = ع$ کو پورا کرتا ہے۔ اگر $ع = ۱$ جبکہ $ی = ۰$ ۔ تو ہمیں حاصل ہونا چاہئے $ا_0 = ۱$ ۔ اس طرح ہم سلسلہ

$$۱ + ی + \frac{ی^2}{|\underline{۲}} + \dots + \frac{ی^ن}{|\underline{ن}} + \dots$$

پر پہنچتے ہیں جسکی تحقیق سے ہم نے اس باب کے مضمون کی ابتدا کی تھی۔

قوت نما اور دائری تفاعلوں کی دوریت

(291)

۲۳۱ ـــ ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ $ق(ی) = قو^{لا}(جم ما + خ جب ما)$ اب چونکہ ما میں ۲ ک π جمع کرنے سے جہاں ک مثبت یا منفی

صحیح عدد ہے جم ما اور جب ما نہیں بدلتے اس لئے ق(ی) = ق(ی + ۲ خ ک π) یعنے ق(ی) دوری (periodic) تفاعل ہے

جسکا دور ۲ خ π ہے۔ چونکہ وی = وی+۲ک خ π اسلئے قوت نمائی تفاعل وی دوری ہے اور اسکا خیالی دور ۲ خ π ہے، نیز چونکہ وخ ی = وخ (ی + ۲ ک π) اس لئے وخ ی، ی کا دوری تفاعل ہے جسکا حقیقی دور ۲ π ہے۔

پس یہ معلوم ہوا کہ وی، وخ ی میں سے ہر ایک تفاعل یک دوری ہے، پہلے تفاعل کا خیالی دور ۲ خ π ہے اور دوسرے تفاعل کا حقیقی دور ۲ π ۔ وہ طالب علم جو ناقصی تفاعلوں کے مبادیات سے واقف ہے جان لیگا کہ ایسے تفاعلوں کا بنانا ممکن ہے جنکے دور حقیقی اور خیالی دونوں ہوں، ایسے تفاعلوں کو دو دوری کہتے ہیں۔

۲۳۲ — دائری تفاعل جم ما، جب ما اولاً ہندسی تعریف کے ذریعہ پیش کئے گئے تھے اور ہم نے اس کتاب کے ابتدائی حصہ میں انکو ایک زاویئی مقدار کے تفاعلوں کے طور پر استعمال کیا ہے جہاں یہ زاویئی مقدار دائری ناپ میں محسوب کیگئی تھی۔ لیکن ہم اس زاویئی مقدار کے تصور کو خارج کر سکتے ہیں اور انکو (جم ما جب ما کو) ایک متغیر کے تفاعل سمجھہ سکتے ہیں، بلاشبہ متغیر کی کوئی قیمت اس مقدار کو ایک زاویہ کے دائری ناپ میں پیمایش کرتی ہے جسکے ذریعہ انکی تعریف ہوئی تھی۔ علم التحلیل میں ان تفاعلوں کی بڑی اہمیت انکی اس خاصیت کی وجہہ سے ہے کہ وہ یک دوری تفاعل ہیں۔ فوریر اور دیگر علماء ریاضی نے یہ بتایا ہے کہ وہ تمام تفاعل جو ایک حقیقی دور رکھتے ہیں ان دائری تفاعلوں کے ایک

سلسلہ کے ذریعہ بعض حدود کے تحت تعبیر کئے جا سکتے ہیں لیکن علم التحلیل کی اس اہم شاخ سے بحث کرنا اس کتاب کے مقصد سے خارج ہے۔

دائری تفاعلوں کی تحلیلی تعریف

۲۳۳ — دائری تفاعلوں کی خالص تحلیلی تعریفیں دینا اور ان تعریفوں سے انکی بنیادی تحلیلی خاصیتیں اخذ کرنا ممکن ہے تاکہ دائری تفاعلوں کا احصاء ایسی بنیاد پر قائم ہو سکے جو تمام ہندسی تعلقات سے آزاد ہو۔ ان تعریفوں میں ملتف عدد کے دائری تفاعل بھی آجائینگے۔

ہم ی کی جیب التمام اور جیب کی تعریف اِن مساواتوں (292)

$$\left.\begin{aligned} \text{جم ی} &= \frac{1}{2}\{\text{ق (خ ی)} + \text{ق (- خ ی)}\}, \\ \text{جب ی} &= \frac{1}{2\text{خ}}\{\text{ق (خ ی)} - \text{ق (- خ ی)}\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (۷)$$

کے ذریعہ کر سکتے ہیں جہاں ق (ی) سے سلسلہ $۱ + \text{ی} + \frac{\text{ی}^۲}{\underline{|۲}} + \ldots$ کا انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔ بہ الفاظ دیگر ہم جم ی کی تعریف سلسلہ $۱ - \frac{\text{ی}^۲}{\underline{|۲}} + \frac{\text{ی}^۴}{\underline{|۴}} - \ldots$ کے انتہائی مجموعہ کے ذریعہ اور جب ی کی تعریف سلسلہ $\text{ی} - \frac{\text{ی}^۳}{\underline{|۳}} + \frac{\text{ی}^۵}{\underline{|۵}} - \ldots$ کے انتہائی مجموعہ کے ذریعہ کرتے ہیں۔ پس ہم ان کو جیب التمام اور جیب کی عام تعریف سمجھ سکتے ہیں، اس میں ملتف دلیل کی صورت شامل ہے جو قبل الذکر ہندسی تعریفات میں شامل نہ تھی۔

ی کی حقیقی قیمتوں کے لئے تفاعلات جم ی اور جب ی

ہندسی تعریفات کے مطابق ہیں کیونکہ وہ سلسلے جنکو یہ تعبیر کرتے ہیں ان سلسلوں کے مماثل ہیں جو دفعہ ۹۹ میں ہندسی تعریفوں کے ذریعہ حاصل ہوئے تھے۔

دفعہ ۲۲۳۰ ا میں ثابت کردہ مسئلہ $\text{نو}^{\text{ی}} = ۱ + \text{ی} + \frac{\text{ی}^{۲}}{\underline{|۲}} + \dots + \frac{\text{ی}^{\text{س}}}{\underline{|\text{س}}} + \text{ب}_{\text{س}}$

کو استعمال کرنے سے جہاں $|\text{ب}_{\text{س}}| < \frac{|\text{ی}|^{\text{س}+۱}}{\underline{|\text{س}+۱}}\ \text{نو}^{|\text{ی}|}$ ہم دیکھتے ہیں کہ

اگر ی کو خ ی اور ـ خ ی میں تبدیل کیا جائے اور س = ۲م + ۱ فرض کیا جائے اور پھر محصلہ جملوں کو جمع کیا جائے تو

$$\text{جم ی} = ۱ - \frac{\text{ی}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{ی}^{۴}}{\underline{|۴}} - \dots + (-۱)^{\text{م}} \frac{\text{ی}^{۲\text{م}}}{\underline{|۲\text{م}}} + \text{ب}_{\text{م}}$$

جہاں $|\text{ب}_{\text{م}}| < \frac{|\text{ی}|^{۲\text{م}+۲}}{\underline{|۲\text{م}+۲}}\ \text{نو}^{|\text{ی}|}$ ۔ بالخصوص $\text{جم ی} = ۱ + \text{ب}_{.}$

جہاں $|\text{ب}_{.}| < \frac{|\text{ی}|^{۲}}{\underline{|۲}}\ \text{نو}^{|\text{ی}|}$، اور $\text{جم ی} = ۱ - \frac{۱}{۲}\text{ی}^{۲} + \text{ب}_{۱}$ جہاں

$$|\text{ب}_{۱}| < \frac{|\text{ی}|^{۴}}{\underline{|۴}}\ \text{نو}^{|\text{ی}|}،$$

نیز $|\text{ی}| < ۱$ کی صورت میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$|\text{ب}_{.}| < \frac{|\text{ی}|^{۲}}{۲(۱-|\text{ی}|)}$$

اور

$$|\text{ب}_{۱}| < \frac{|\text{ی}|^{۴}}{\underline{|۴}\,(۱-|\text{ی}|)}$$

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جب ی} = \text{ی} - \frac{\text{ی}^{3}}{\lfloor 3} + \frac{\text{ی}^{5}}{\lfloor 5} - \dots + (-1)^{\text{م}} \frac{\text{ی}^{2\text{م}+1}}{\lfloor 2\text{م}+1} + \text{س}_{\text{م}}$$

جہاں $|\text{س}_{\text{م}}| < \frac{|\text{ی}|^{2\text{م}+3}}{\lfloor 2\text{م}+3}$ تو $|\text{ی}|$، اور بالخصوص جب ی = ی + س. (293)

جہاں $|\text{س}_{.}| < \frac{|\text{ی}|^{3}}{\lfloor 3}$ تو $|\text{ی}|$، اور جب ی $= \text{ی} - \frac{1}{6}\text{ی}^{3} + \text{س}_{1}$

جہاں $|\text{س}_{1}| < \frac{|\text{ی}|^{5}}{\lfloor 5}$ تو $|\text{ی}|$۔ اگر $|\text{ی}| < 1$ تو نیز حاصل ہوتا ہے

$$\text{س}_{.} < \frac{|\text{ی}|^{3}}{6(1-|\text{ی}|)}, \quad |\text{س}_{1}| < \frac{|\text{ی}|^{5}}{\lfloor 5\,(1-|\text{ی}|)}$$

۲۳۴ — دفعہ ۲۳۳ میں دی ہوئی تعریفوں سے اب ہم تفاعلات جم ی اور جب ی کی بنیادی خاصیتیں اخذ کر سکتے ہیں۔ چونکہ

$\text{جم ی} + \text{خ جب ی} = \text{ق}(\text{خ ی})$، اور $\text{جم ی} - \text{خ جب ی} = \text{ق}(-\text{خ ی})$

اسلئے $\text{جم}^{2}\text{ی} + \text{جب}^{2}\text{ی} = \text{ق}(\text{خ ی})\,\text{ق}(-\text{خ ی}) = \text{ق}(0) = 1$

نیز

$$\text{جم}(\text{ی}_{1}+\text{ی}_{2}) = \frac{1}{2}\{\text{ق}(\text{خ ی}_{1}+\text{خ ی}_{2}) + \text{ق}(-\text{خ ی}_{1}-\text{خ ی}_{2})\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\text{ق}(\text{خ ی}_{1})\,\text{ق}(\text{خ ی}_{2}) + \text{ق}(-\text{خ ی}_{1})\,\text{ق}(-\text{خ ی}_{2})\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\text{ق}(\text{خ ی}_{1}) + \text{ق}(-\text{خ ی}_{1})\}\{\text{ق}(\text{خ ی}_{2}) + \text{ق}(-\text{خ ی}_{2})\}$$

$+\frac{1}{4}\{$ق(خی$_1$)-ق(-خی$_1$)$\}\{$ق(خی$_2$)-ق(-خی$_2$)$\}$

یا جم (ی$_1$ + ی$_2$) = جم ی$_1$ جم ی$_2$ - جیب ی$_1$ جیب ی$_2$

اسی طرح جب (ی$_1$ + ی$_2$) = جب ی$_1$ جم ی$_2$ + جم ی$_1$ جب ی$_2$

اس طرح جمع کے مسئلے ہماری تعریف سے حاصل ہوجاتے ہیں۔

۲۳۵ ـــ فرض کرو کہ ہم مساوات ق (ی) = ا پر غور کرتے ہیں۔ اول تو اس مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے سوائے ی = ۰ کے کیونکہ قوت نما سلسلہ کے ذریعہ ق (ی) کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اس مساوات کی کوئی مثبت حقیقی اصل نہیں ہے، اور نہ اسکی کوئی منفی حقیقی اصل - لا ہوسکتی ہے کیونکہ ایسی صورت میں مثبت عدد لا بھی ایک اصل ہوگی جیسا کہ رشتہ ق (-لا) ق (لا) = ا سے ظاہر ہے۔

نیز مساوات ق (ی) = ا کی کوئی ملتف اصل عہ + خ بہ نہیں ہوسکتی جہاں |عہ| > ۰ - کیونکہ اگر عہ + خ بہ اصل ہو تو عہ - خ بہ بھی اصل ہے اور اس لئے ق (۲ عہ) = ق (عہ + خ بہ) ق (عہ - خ بہ) = ا جو ناممکن ہے کیونکہ ۲ عہ اصل نہیں ہوسکتی۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر مساوات ق (ی) = ا کی اصلیں اصل ی = ۰ کے سوا کوئی اور ہوں تو وہ خالص خیالی ہونی چاہئیں۔ یہ دکھانے کے لئے کہ یہ مساوات ایسی ایک اصل رکھتی ہے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ مساوات ق (خ بہ) - ق (- خ بہ) = ۰ یعنی جب بہ = ۰ کی ایک حقیقی اصل صفر کے سوا ہے۔ اگر بہ ایسی ایک اصل ہو تو

$$\text{ق}(2\,\text{خ بہ}) = \{\text{ق}(\text{خ بہ})\}^2 = 1$$

اور اس طرح ق (ی) = ا کی ایک اصل ۲ خ بہ ہوگی۔

یہ دکھایا جائیگا کہ اگر مسلسل تفاعل $\frac{\text{جب بہ}}{\text{بہ}}$ کو جو سلسلہ

$$۱ - \frac{\text{به}^{۲}}{|\underline{۳}} + \frac{\text{به}^{۴}}{|\underline{۵}} - \ldots\ldots\ldots$$

کے انتہائی مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے ف (به) سے تعبیر کیا جائے تو ف (به) مثبت ہے به کی تمام قیمتوں کے لئے ایسی کہ $۰ \leq \text{به} \leq ۳$ اور یہ کہ وہ منفی ہے جبکہ به = ۴ ۔ اس سے یہ نتیجہ اخذ ہو سکتا ہے کہ ۳ اور ۴ کے درمیان ایک قیمت کے لئے یا ایسی قیمتوں کی ایک طاق تعداد کے لئے ف (به) صفر ہے۔ اور کسی صورت میں ف (به) = ۰ کی عددی طور پر چھوٹی سے چھوٹی اصل ۳ اور ۴ کے درمیان ہے اگر اس مساوات کی ایک سے زیادہ اصلیں ہوں۔

اگر به مثبت ہو اور $\sqrt{۲۰}$ سے کم تو ف (به) کے سلسلہ میں ہر رقم، به استثنائے رقم اول، مابعد کی رقم سے عدداً بڑی ہے اس لئے

$$\text{ف (به)} > ۱ - \frac{\text{به}^{۲}}{|\underline{۳}} + \frac{\text{به}^{۴}}{|\underline{۵}} - \frac{\text{به}^{۶}}{|\underline{۷}}$$

، به کی اُن قیمتوں کے لئے جو صفر اور ۳ سے بڑے کسی عدد کے درمیان ہوں

اب $۱ - \frac{\text{به}^{۲}}{|\underline{۳}} + \frac{\text{به}^{۴}}{|\underline{۵}} - \frac{\text{به}^{۶}}{|\underline{۷}}$ کو فہ (به) سے تعبیر کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ $\text{فہ (۳)} = \frac{۱۷}{۵۶۰}$ جو مثبت ہے، اور فہ(۰) = ۱

نیز مشتق تفاعل $\text{فَہ (به)} \equiv -۲\text{به}\left(\frac{۱}{|\underline{۳}} - \frac{۲\text{به}^{۲}}{|\underline{۵}} + \frac{۳\text{به}^{۴}}{|\underline{۷}}\right)$ منفی ہے جبکہ به، صفر اور ۳ کے درمیان ہو کیونکہ

$$\frac{۱}{|\underline{۳}} - \frac{۲\text{به}^{۲}}{|\underline{۵}} + \frac{۳\text{به}^{۴}}{|\underline{۷}} > \frac{۱}{|\underline{۳}} - \frac{۲\text{به}^{۲}}{|\underline{۵}} > \frac{۱}{|\underline{۳}} - \frac{۲\times۳^{۲}}{|\underline{۵}} > ۰$$

پس فہ (به)، ایک سے $\frac{۱۷}{۵۶۰}$ تک یکساں طور پر گھٹتا ہے جیسے به،

صفر سے ۳ تک بڑھتا ہے' اور یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف (بہ)' صفر اور ۳ کے درمیان بہ کی قیمتوں کے لئے معدوم نہیں ہو سکتا۔ نیز

$$ف(۴) < ۱ - \frac{۴^۲}{\underline{|۳}} + \frac{۴^۴}{\underline{|۵}} - \frac{۴^۶}{\underline{|۷}} + \frac{۴^۸}{\underline{|۹}}$$

$$< ۱ - \frac{۸}{۱۵} - \frac{۷}{۱۵} \times \frac{۲۵۶}{۱۸۹} < ۰$$

اور اسلئے ۳ اور ۴ کے درمیان ف (بہ) کی کم سے کم ایک اصل موجود ہے کیونکہ ف (۳) مثبت اور ف (۴) منفی ہے۔

ف (بہ) = ۰ کی عدداً چھوٹی سے چھوٹی اصل کو π سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ق (ی) = ۱ کی ایک اصل ۲π خ ہے اور اس سے صغیر تر مقیاس کے ساتھ اس مساوات کی کوئی اصل نہیں ہے سوائے ی = ۰ کے۔

موجودہ نقطۂ نظر سے عدد π کی تعریف اُس عدد سے یکجائی ہے جو مساوات ق (۲π خ) = ۱ کو پورا کرے اور ایسا ہو کہ کوئی عدد' صفر سے مختلف' صغیر تر مقیاس کے ساتھ مساوات ق (ی) = ۱ کی اصل نہ ہو۔ اگر ک کوئی صحیح عدد ہو مثبت یا منفی

تو ق (۲ک π خ) = {ق (۲π خ)}^ک = ۱' اور اسلئے مساوات ق (ی) = ۱

کی ایک اصل ۲ک π خ بھی ہے۔ نیز کوئی اصل ۲ پ π خ موجود نہیں ہے جہاں پ' ک اور ک + ۱ کے درمیان واقع ہے کیونکہ ایسی صورت میں حاصل ہونا چاہیئے

ق (۲ پ π خ - ۲ک π خ) = ق (۲ پ π خ) ق (-۲ک π خ) = ۱

اور اس لئے ۲ (پ - ک) π خ جسکا مقیاس' ۲π خ کے مقیاس سے صغیر تر ہے ق (ی) = ۱ کی اصل ہوگا جو اس مفروض کے خلاف ہے کہ ۲π خ

اس اصل کو تعبیر کرتا ہے جسکا مقیاس صغیر ترین ہے۔
پس یہ ثابت ہو چکا کہ مساوات ق (ی) = ۱ کی سب اصلیں شکل ۲ ک π خ کی ہیں جہاں ک مثبت یا منفی صحیح عدد ہے اور π ایک معین عدد ہے جو ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے جیسا کہ اوپر ثابت کر دیا گیا۔
اس طرح عدد π کو تحلیلی نظریہ میں داخل کرنے کے بعد ی کی کسی قیمت کے لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ق (ی + ۲ π خ) = ق (ی) ق (۲ π خ) = ق (ی)

اور اس لئے تفاعل ق (ی) ایک دوری تفاعل ہے جسکا خیالی دور ۲ π خ ہے۔
جم ی اور جب ی کی تعریفوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ وہ بھی دوری تفاعل ہیں جنکا دور ۲ π ہے، اسلئے جم ۲ π = جم ۰ = ۱ اور جب ۲ π = جب ۰ = ۰۔ ہم نے ابتک اس امر کی تصدیق نہیں کی کہ π حسب تعریف بالا اس نسبت کے مماثل ہے جو ایک دائرے کے محیط کو اس کے قطر کے ساتھ ہوتی ہے لیکن اسکی تکمیل ایک حقیقی زاویے کی صورت پر غور کرنے سے ہو سکتی ہے جس کے لئے جیب التمام یا جیب کا دور ۲ π ہے، عدد π کی کسی ایک تعریف کی بموجب

۲۳۶۔ نیز چونکہ ق (خ π) × ق (خ π) = ق (۲ خ π) = ۱،
اسلئے ق (خ π)، -۱ کے مساوی ہونا چاہئے کیونکہ وہ +۱ کے مساوی نہیں ہو سکتا اس وجہ سے کہ خ π، ق (ی) = ۱ کی اصل نہیں ہے۔
نیز ق (- خ π) = -۱ اسلئے جم π = -۱، جب π = ۰۔

پھر چونکہ ق (½ خ π) × ق (½ خ π) = ق (خ π) = -۱

اور ق (½ خ π) × ق (- ½ خ π) = ۱

اسلئے ق $(\frac{1}{2}$ خ $\pi) = \pm$ خ اور ق $(-\frac{1}{2}$ خ $\pi) = \mp$ خ

اسلئے جم $\frac{1}{2}\pi = 0$ اور جب $\frac{1}{2}\pi = \pm 1$، اس ابہام کو دور کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ی حقیقی ہو تو جیب ی کی قیمتوں ی $= 0$ اور ی $= \pi$ کے درمیان لازماً مثبت ہے جیساکہ دفعہ ۲۲۵ میں ثابت کیا جاچکا ہے، اس لئے جب $\frac{1}{2}\pi = +1$۔ اس طرح صفر، $\frac{1}{2}\pi$، π، 2π کی جیب التمام اور جیب کی قیمتیں حاصل کرنیکے بعد ہم جمع کے مسئلوں کے ذریعہ جیب التمام اور جیب کے تفاعلوں کی تمام معمولی خاصیتیں ثابت کرسکتے ہیں۔

اب تفاعلات مس ی، مم ی، قط ی، قم ی کی تعریفات علی الترتیب مساواتوں مس ی = جب ی \ جم ی، مم ی = جم ی \ جب ی، قط ی = ۱ \ جم ی، قم ی = ۱ \ جب ی کے ذریعہ ہونگی اور پھر ہم ان تفاعلات کی خاصیتیں معمولی طریقہ سے معلوم کرسکتے ہیں۔

دائری تفاعلوں کی تمام خاصیتیں جو چوتھے، پانچویں، اور ساتویں باب میں متحقق ہوئی تھیں جمع کے ضابطوں اور دَوریت کی خاصیت سے اخذ ہوتی ہیں، پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ تمام خاصیتیں جو حقیقی دلیلوں کیلئے وہاں ثابت کی گئی ہیں ملتف دلیلوں کے لئے بھی درست ہیں۔

(296) **۲۲۷ ـــ** ایک اہم صورت وہ ہے جسمیں ی بالکلیہ خیالی ہو اور خ ما کے مساوی ہو۔ اس صورت میں

$$\text{جم خ ما} = \frac{1}{2}(\text{قو}^{\text{ما}} + \text{قو}^{-\text{ما}})\text{، جب خ ما} = \frac{\text{خ}}{2}(\text{قو}^{\text{ما}} - \text{قو}^{-\text{ما}})$$

$$\text{مس خ ما} = \text{خ}\,\frac{\text{قو}^{\text{ما}} - \text{قو}^{-\text{ما}}}{\text{قو}^{\text{ما}} + \text{قو}^{-\text{ما}}}$$

جملوں $\frac{1}{2}$ (قو^{ما} + قو$^{-ما}$)، $\frac{1}{2}$ (قو^{ما} − قو$^{-ما}$)، $\frac{\text{قو}^{\text{ما}} - \text{قو}^{-\text{ما}}}{\text{قو}^{\text{ما}} + \text{قو}^{-\text{ما}}}$ کو علی الترتیب ما کی زائدی جیب التمام، جیب اور مماس کہتے ہیں اور ان کو جمز ما، جبز ما، مسز ما لکھتے ہیں، اس طرح

جمز ما = جم خ ما، جبز ما = − خ جب خ ما، مسز ما = − خ مس خ ما

ہم ان تفاعلوں پر ایک خاص باب میں غور کرینگے۔

طبعی لوکارتم

۲۳۸ — اگر ع = ق (ی) جو ملتف تغیری کا ایک واحد القیمت تفاعل ہے تو ہم ی = ق$^{-1}$ (ع) کی تعریف اس طرح کر سکتے ہیں کہ وہ اساس قو پر ع کا لوکارتم ہے، لوکارتموں کا یہ نظام لوکارتموں کا طبعی نظام کہلاتا ہے۔ چونکہ ق (ی)، ی کے لحاظ سے دوری ہے اسلئے مقلوب تفاعل ق$^{-1}$ (ی) لامتناہی حد تک کثیر القیمتی ہوگا، اگر ی کی ایک قیمت لوک ی ہو تو **لوک** ع کی عام قیمت **لوک** ع = لوک ع + ۲ خ ک π سے حاصل ہوگی۔ کیونکہ ق (ی) = ق (ی + ۲ خ ک π) جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ بالخصوص ایک مثبت حقیقی عدد لا کے لوکارتم لوک لا + ۲ خ ک π ہونگے جہاں لوک لا، لا کے معمولی حقیقی لوکارتم کو تعبیر کرتا ہے۔

۲۳۹ — فرض کرو ع$_1$ = ق (ی$_1$)، ع$_2$ = ق (ی$_2$)

تو چونکہ ق (ی$_1$) × ق (ی$_2$) = ق (ی$_1$ + ی$_2$)

اسلئے حاصل ضرب ع$_1$ ع$_2$ کے لوکارتم ق (ی$_1$ + ی$_2$) کے لوکارتم ہیں یعنی ی$_1$ + ی$_2$ + ۲ خ ک π، یا

لوک ع$_1$ + **لوک** ع$_2$ = **لوک** (ع$_1$ ع$_2$) + ۲ خ ک π

ہم جملہ ۲ خ ک π کو لوک (ع۱ ع۲) میں شامل فرض کر سکتے ہیں اور اس لئے مساوات بالا کو لکھ سکتے ہیں

لوک (ع۱ ع۲) = لوک ع۱ + لوک ع۲

اس مساوات سے کسی ایک لوگارتم کی مخصوص قیمت متعین ہوتی ہے جبکہ دوسرے دو لوگارتم دئے گئے ہوں۔

اب فرض کرو کہ ع = غہ (جم فہ + خ جیب فہ) جہاں غہ حقیقی ہے تو اُس نتیجہ سے جو ابھی ثابت ہوا حاصل ہوتا ہے لوک ع = لوک غہ + لوک (جم فہ + خ جیب فہ)، اور چونکہ قوت (خ فہ) = جم فہ + خ جیب فہ اسلئے لوک (جم فہ + خ جیب فہ) کی ایک قیمت خ فہ ہے اور لوک غہ کی عام قیمت لوک غہ + ۲ خ ک π ہے، پس لوک ع کی عام قیمت ہے

لوک ع = لوک غہ + خ (فہ + ۲ ک π)

جہاں لوک غہ سے لوک غہ کی اصلی قیمت مراد ہے۔

اگر فہ پر – π اور + π کے درمیان ہونیکی قید ہو تو ہم لوک غہ + خ فہ کو لوک ع کی صدر قیمت کہینگے اور اس کو لوک ع سے تعبیر کرینگے، پس لوک ع کی عام قیمت

لوک ع = لوک ع + ۲ خ ک π

سے ملتی ہے جہاں لوک ع اسکی صدر قیمت اور ک مثبت یا منفی کوئی عدد صحیح ہے

ہم اس نتیجہ کو لکھ سکتے ہیں

(297)

لوک (لا + خ ما) = ½ لوک (لا² + ما²) + خ (مس⁻¹ ما/لا + ۲ک π)' ... (۸)

کسی حقیقی منفی عدد - لا کے لوکارثم کی صدر قیمت کی تعریف کافی طور پر نہیں ہوئی ہے کیونکہ ایسی کسی مقدار کی دلیل π ہو سکتی ہے یا - π' تاہم سہولت کے مدنظر ہم فرض کرینگے کہ اسکی صدر قیمت کے لئے دلیل π ہے اور اس لئے اسکی صدر قیمت لوک لا + خ π ہے اور اسکے لوکارثم کی عام قیمت لوک لا + (۲ک + ۱) خ π ہے۔

کسی حقیقی مثبت عدد لا کے لوکارثم کی عام قیمت
لوک لا = لوک لا + لوک ۱ = لوک لا + ۲ خ ک π
سے حاصل ہوتی ہے جہاں لوک لا صدر قیمت ہے۔

لوک خ کی صدر قیمت ½ π خ ہے' اسلئے لوک خ = (۲ک + ½) خ π

لوک (- خ) کی صدر قیمت - ½ π خ ہے' اسلئے لوک (- خ) = (۲ک - ½) خ π -

ع کے لوکارثم کو مقیاس غہ اور دلیل فہ کا ایک واحد القیمت تفاعل سمجھ کر اس پر غور کرنا ممکن ہے جبکہ دلیل فہ' - ∞ سے + ∞ تک تمام قیمتوں میں سے گذرتی ہوئی فرض کیجائے اور اسپر π اور - π کے درمیان واقع ہونے کی قید نہ ہو جیسا کہ اس سے قبل تھی۔ تب ع کا لوکارثم غہ اور فہ کا واحد القیمت تفاعل لوک غہ + خ فہ ہے' اور ہر دفعہ جبکہ فہ میں ۲ π کا اضافہ ہوتا ہے یہ لوکارثم بقدر ۲ خ π کے بڑھتا ہے اور عدد ع کی عددی قیمت وہی ہوتی ہے جو پہلے تھی۔ وہ طالب علم جو ریمان (Reimaum) کی سطحوں کے نظریہ سے واقف ہے کثیر القیمت تفاعل کو ایک واحد القیمت تفاعل میں بدلکر غور کرنیکے اس طریقہ کے پورے فوائد کا اندازہ کر سکیگا۔

عام قوت نما تفاعل

۲۴۰ - اگر ا کوئی عدد ہو حقیقی یا ملتف تو رمز اᶻ سے ق (ی لوک ا)

مراد لیا جا سکتا ہے جہاں **لوک ا**، اپنی قیمتوں کی لاانتہا تعداد میں سے کوئی ایک قیمت اختیار کرتا ہے۔ اگر **لوک ا**، اپنی صدر قیمت لوک ا اختیار کرے، **تو ہم ق** (ی لوک ا) کو $\text{ا}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت کہینگے۔

چونکہ
$$\text{ق}(\text{ی لوک ا}) = ۱ + \frac{\text{ی لوک ا}}{\lfloor ۱} + \frac{(\text{ی لوک ا})^{۲}}{\lfloor ۲} + \cdots \quad (298)$$

اسلئے عام قوت نما سلسلہ ہے

$$\text{ا}^{\text{ی}} = ۱ + \frac{\text{ی لوک ا}}{\lfloor ۱} + \frac{\text{ی}^{۲}(\text{لوک ا})^{۲}}{\lfloor ۲} + \cdots\cdots$$

اور $\text{ا}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت

$$\text{ا}^{\text{ی}} = ۱ + \frac{\text{ی لوک ا}}{\lfloor ۱} + \frac{\text{ی}^{۲}(\text{لوک ا})^{۲}}{\lfloor ۲} + \cdots\cdots$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

اگر ا اور ی دونوں حقیقی ہوں تو قوت نما سلسلہ کی معمولی شکل

$$\text{ا}^{\text{لا}} = ۱ + \frac{\text{لا لوک ا}}{\lfloor ۱} + \frac{\text{لا}^{۲}(\text{لوک ا})^{۲}}{\lfloor ۲} + \cdots\cdots$$

حاصل ہوتی ہے جس سے $\text{ا}^{\text{لا}}$ کی صدر قیمت ملتی ہے۔

۲۴۱ — مخصوص صورت ا = و میں

$$\text{لوک و} = \text{لوک و} + ۲\,\text{خ ر ک}\,\pi = ۱ + ۲\,\text{خ ر ک}\,\pi$$

اور رمز $\text{و}^{\text{ی}}$ کے عام معنے ق (ی لوک و) یا ق (ی + ۲ خ ر ک π ی) ہیں۔ $\text{و}^{\text{ی}}$ کی عام قیمت ق (ی) ہے اور یہ اُس تعریف کے مطابق ہے جو دفعہ ۲۲۹ میں دیگئی تھی۔ اسلئے $\text{و}^{\text{ی}}$ کی عام قیمت

ق (ی) (جم ۲ک π ی + خر جب ۲ک π ی)

ہے۔ ہم اب بھی رمز ویٰ سے اسکی صدر قیمت مراد لیتے رہیں گے۔

۳۴۲ — ایٰ کی عام قیمت حسب تعریف بالا ق{ی (لوک ر + خر طہ + ۲ خر ک π)} کے مماثل ہے جہاں ا = ر (جم طہ + خر جب طہ) = عہ + خر بہ اور طہ ′ - π اور π کے درمیان واقع ہے ′ ی = لا + خر ما لکھنے سے (عہ + خر بہ)^لا+ خر ما^ کی عام قیمت کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

ق{لا لوک ر - طہ ما - ۲ک π ما + خر (ما لوک ر + لا طہ + ۲ π ک لا)}

جو و^لا لوک ر - طہ ما - ۲ک π ما^ {جم (ما لوک ر + لا طہ + ۲ π ک لا)

+ خر جب (ما لوک ر + لا طہ + ۲ π ک لا)}

کے مساوی ہے۔ اسلئے (عہ + خر بہ)^لا+ خر ما^ کی صدر قیمت ہے

و^لا لوک ر - طہ ما^ {جم (ما لوک ر + لا طہ) + خر جب (ما لوک ر + لا طہ)}

جہاں ر = √(عہ^۲^ + بہ^۲^) ′ طہ = مس^-۱^ (بہ/عہ)

یہ ضروری نہیں کہ مس^-۱^ (بہ/عہ) کی صدر قیمت جس کی تعریف دفعہ ۳۵ میں کی گئی ہے لی جائے۔

اگر ر = ۱ تو (جم طہ + خر جب طہ)^لا+ خر ما^ کی صدر قیمت کے لئے تفاعل ق{خر طہ (لا + خر ما)} حاصل ہوتا ہے جسکو شکل جم (لا + خر ما) طہ

+ جب (لا + خ ما) طہ میں لکھا جا سکتا ہے، یہ ڈیموائر کے مسئلہ کی توسیع ہے جبکہ قوت نما منفی ہو ۔

(299) ۲۴۳ — مساوات $ا^{ی_۱} \times ا^{ی_۲} = ا^{ی_۱+ی_۲}$ کے درست رہنے کے لئے ہمیں یہ فرض کرنا پڑیگا کہ $ا^{ی_۱}$، $ا^{ی_۲}$، $ا^{ی_۱+ی_۲}$ کی قیمتیں وہ ہیں جو لوک ا کی ایک ہی قیمت کے متناظر ہیں، ایسی صورت میں

$$ا^{ی_۱} \times ا^{ی_۲} = ق\{ی_۱(\text{لوک } ا + ۲ خ ک \pi)\} \times ق\{ی_۲(\text{لوک } ا + ۲ خ ک \pi)\}$$
$$= ق\{(ی_۱ + ی_۲)(\text{لوک } ا + ۲ خ ک \pi)\}$$
$$= ا^{ی_۱+ی_۲}$$

لیکن یہ مساوات درست نہیں ہوگی اگر ان دو تفاعلوں $ا^{ی_۱}$، $ا^{ی_۲}$ میں ہم ک کی مختلف قیمتیں لینگے۔ بالخصوص مساوات $ا^{ی_۱} \times ا^{ی_۲} = ا^{ی_۱+ی_۲}$ ان تفاعلوں کی صدر قیمتوں کی صورت میں درست ہے ۔

۲۴۴ — جملہ $(ا^{ی_۱})^{ی_۲}$ کا $ا^{ی_۱ ی_۲}$ کی ایک قیمت ہونا ضروری نہیں ہے لیکن $ا^{ی_۱ ی_۲}$ کی ہر قیمت، $(ا^{ی_۱})^{ی_۲}$ کی ایک قیمت ہے کیونکہ

$$ا^{ی_۱ ی_۲} = ق(ی_۱ ی_۲ \text{ لوک } ا) = ق\{ی_۱ ی_۲(\text{لوک } ا + ۲ خ ک \pi)\}$$

اور $$(ا^{ی_۱})^{ی_۲} = ق\{ی_۲ \text{ لوک } ا^{ی_۱}\} = ق\{ی_۲(ی_۱ \text{ لوک } ا + ۲ خ \bar{ک} \pi)\}$$
$$= ق\{ی_۱ ی_۲(\text{لوک } ا + ۲ خ ک \pi) + ۲ خ \times \bar{ک} \pi ی_۲\}$$

اسلئے $ا^{ی ای^۲}$ کی قیمتیں، $(ا^{ی ا})^{ی ۲}$ کی صرف وہ قیمتیں ہیں جو ک = ۰ کی صورت میں حاصل ہوتی ہیں ۔ اگر ہم ہر صورت میں صدر قیمتیں لیں تو مساوات $ا^{ی ای^۲} = (ا^{ی ا})^{ی ۲}$ درست ہے ۔

اگر ہم رموز $ا^{ی}$، $فو^{ی}$ کو انکی صدر قیمتوں ق (ی لوک ا) ق (ی) کے مماثل لیں جو بالعموم عمل میں کیا جاتا ہے تو ہم ابھی دکھا چکے ہیں کہ اُن جملوں میں جنمیں یہ رموز واقع ہوتے ہیں اعمال کی تکمیل قوت نماؤں کے معمولی قاعدوں کے مطابق کیجا سکتی ہے جیسا کہ عام طور پر جبرو مقابلہ میں کیا جاتا ہے ۔

مثال ۳

اگر ا، ب، ج، د، ..... ایک منتظم ن ضلعی کثیر الاضلاع کے راس ہوں جو نصف قطر ا کے دائرہ میں کھینچا گیا ہے جسکا مرکز و ہے تو ثابت کرو کہ اُن زاویوں کا مجموعہ جو اپ، ب پ، ج پ، ... نصف قطر وپ کے ساتھ بناتے ہیں مس$^{-۱}$ $\frac{ا^{ن} جب ن طہ}{ا^{ن} جم ن طہ - ر^{ن}}$ ہے جہاں

وپ = ر اور زاویہ اوپ = طہ ۔

$$\text{چونکہ}\quad ر^{ن} - ا^{ن} فو^{ن خ طہ} = \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left\{ ر - ا فو^{خ (طہ + \frac{۲ س \pi}{ن})} \right\}$$

اسلئے لوکارثم لینے سے

$$لوک (ر^{ن} - ا^{ن} جم ن طہ - خ ا^{ن} جب ن طہ)$$

= $\sum_{س=۰}^{س=ن-۱}$ لوک {ر - ۲ا جم (طہ + $\frac{۲س\pi}{ن}$) - خو ا جب (طہ + $\frac{۲س\pi}{ن}$)}

اور اس مساوات کی طرفین میں خ کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{مس}^{-۱} \frac{اٗ^{ن} \text{جب ن طہ}}{اٗ^{ن} \text{جم ن طہ} - ر^{ن}} = \sum_{س=۰}^{س=ن-۱} \text{مس}^{-۱} \frac{ا \text{جب}(طہ + \frac{۲س\pi}{ن})}{ا \text{جم}(طہ + \frac{۲س\pi}{ن}) - ر}$$

جہاں مقلوب تفاعلوں کی متناظر قیمتیں لیگئی ہیں - اس مساوات کی بائیں جانب (300) کا جملہ ان زاویوں کا مجموعہ ہے جو نصف قطر وپ، وتروں اپ ب پ ... کے ساتھ بناتا ہے، اس لئے یہ مجموعہ ہے

$$\text{مس}^{-۱} \frac{اٗ^{ن} \text{جب ن طہ}}{اٗ^{ن} \text{جم ن طہ} - ر^{ن}}$$

کسی اساس پر لوکارتم

۲۴۵ - اگر $ا^{ی}$ کی صدر قیمت ۶ کے مساوی ہو تو ی کو ۶ کا لوکارتم اساس ا پر کہتے ہیں اور اسکو لوک$_{ا}$ ۶ لکھہ سکتے ہیں - اب $ا^{ی}$ کی صدر قیمت ق (ی لوک$_{و}$ ا) ہے جہاں لوک$_{و}$ ا، ا کا لوکارتم اساس و پر ہے، اور اگر ق (ی لوک$_{و}$ ا) = ۶ تو

ی ک$_{و}$ ا = لوک$_{و}$ ۶ = لوک$_{و}$ ۶ + ۲ خ ک π

اسلئے لوک$_{ا}$ ۶ = لوک$_{و}$ ۶ \ لوک$_{و}$ ا = (لوک$_{و}$ ۶ + ۲ خ ک π) \ لوک$_{و}$ ا

لوک$_{ا}$ ۶ کی صدر قیمت کو ہم لوک$_{و}$ ۶ \ لوک$_{و}$ ا لیتے ہیں اور اسکو

لوک و ۶ سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ پس عام قیمت ہے

لوک ۶ = لوک و ۶ + ۲ خ ر ک π \ لوک و ا

جو ایک کثیر القیمت تفاعل ہے جسمیں مختلف قیمتیں بقدر ۲ خ π \ لوک و ا کے ضعفوں کے ایک دوسرے سے فرق رکھتی ہیں۔ مخصوص صورت ا = و میں اوپر کی تعریف، دفعہ ۲۳۸ میں بیان کردہ تعریف کے مطابق ہے کیونکہ اس سے لوک و ۶ کی عام قیمت کیلئے لوک و ۶ + ۲ خ ر ک π حاصل ہوتا ہے۔

عام ترین لوکارتم

۲۴۶ — ہم لوکارتم کی حسب ذیل تعریف دے سکتے ہیں جو دفعہ سابق میں دی ہوئی تعریف کی بہ نسبت زیادہ عام ہے۔

اگر ا^ی کی کوئی قیمت ۶ کے مساوی ہو تو ی، ۶ کا لوکارتم اساس ا پر ہے اور لکھا جا سکتا ہے [لوک ا ۶] تا کہ لوک ا ۶ سے جو دفعہ سابق میں استعمال ہوا ہے تمیز ہو جائے۔ ا^ی کی عام ترین قیمت ق (ی لوک و ا) ہے اور اگر یہ قیمت ۶ کے مساوی ہو تو

ی لوک و ا = لوک و ۶، یا ی (لوک و ا + ۲ خ ک π) = لوک و ۶ + ۲ خ ر ک′ π

جہاں ک اور ک′ صحیح اعداد ہیں۔ پس [لوک ا ۶] کی عام قیمت

لوک و ع \ لوک و ا ' یا (لوک و ع + ۲ خ ر ک π) \ (لوک و ا + ۲ خ ر ک َ π)

ہے جو دو طرح سے لا متناہی حد تک کثیر القیمتی ہے۔ اسلئے [لوک و ع] کی قیمتوں میں ک = ۰ رکھنے سے جو مخصوص جبٹ حاصل ہوتا ہے اسے لوکارتم لوک و ع شریک ہیں۔ ہم [لوک ع] کو ع کا عام ترین لوکارتم اساس ا پر کہہ سکتے ہیں۔

۲۴۷ — اگر ا = و تو [لوک و ع] = (لوک و ع + ۲ خ ر ک π) \ (ا + ۲ خ ر ک َ π) جو اساس و پر ع کے عام ترین لوکارتم کے لئے جملہ ہے۔ زیادہ مقید لوکارتم لوک و ع کی صورت میں ہم نے ی کی تعریف یہ کی تھی کہ وہ لوک و ع کی ایک قیمت ہے جبکہ و^ی کی صدر قیمت ع کے مساوی ہو۔ لیکن عام ترین لوکارتم [لوک و ع] کی صورت میں ہم ی کو [لوک و ع] کی ایک قیمت سمجھتے ہیں جبکہ و^ی کی کوئی قیمت ع کے مساوی ہو۔

[لوک و ا] کی عام ترین قیمت ۲ خ ر ک π \ (ا + ۲ خ ر ک َ π) ہے اور [لوک و (-۱)] کی (۲ ک + ۱) خ π \ (ا + ۲ خ ر ک َ π)۔

جملہ (لوک و ع + ۲ خ ر ک π) \ (ا + ۲ خ ر ک َ π) پر دوسرے نقطۂ نگاہ سے بحث کیجا سکتی ہے۔ {ق (ا + ۲ خ ر ک َ π)}^{(لوک ع + ۲ خ ر ک π)/(ا + ۲ خ ر ک َ π)} کی صدر قیمت مسئلہ (۲) کی رو سے ق (لوک ع + ۲ خ ر ک π) ہے جو ع کے مساوی ہے۔ اس لئے (لوک ع + ۲ خ ر ک π) \ (ا + ۲ خ ر ک َ π) کو دفعہ ۲۴۰

(301)

کی تعریف کی بموجب ء کا لوکارثم اساس ق (۱+۲ خ ک π) پر سمجھا جاسکتا ہے اور یہ اساس و کی نہیں بلکہ $و^{۱+۲خ ک π}$ کی صدر قیمت ہے، اسلئے فی الحقیقت ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے کہ [لوک ء]، $لوک_{ق(۱+۲خ ک π)} ء$ کی قیمتوں کے مساوی ہے جبکہ ک کو مختلف قیمتیں دیجائیں۔ پس ہم اساس و پر عام ترین لوکارثموں کو معمولی لوکارثم اساس و پر نہیں بلکہ اساس $و^{۱+۲خ ک π}$ پر سمجھ سکتے ہیں جو (بعد الذکر اساس) اگرچہ عدداً و کے مساوی ہے لیکن ک کی مختلف قیمتوں کی بموجب اسکی مختلف دلیلیں ہوتی ہیں۔

۲۴۸ — اس سوال پر اکثر بحث ہوتی رہی ہے کہ آیا ایک منفی حقیقی عدد کا لوکارثم حقیقی ہوسکتا ہے یا نہیں، مثلاً $\frac{۱}{۲}$ کو $-\sqrt{و}$ کا لوکارثم سمجھ سکتے ہیں یا نہیں جبکہ یہ امر واقعہ ہے کہ $و^{\frac{۱}{۲}}$ کی قیمتیں $\pm\sqrt{و}$ ہیں؟

اس سوال کا جواب اُس تعریف پر منحصر ہے جو ہم لوکارثم کے لئے اختیار کریں، اگر ہم دفعہ ۲۳۸ کی معمولی تعریف لیں جو یہ ہے کہ ی، ء کا لوکارثم ہے جبکہ $و^ی$ کی صدر قیمت ء کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارثم نہیں ہوسکتا، لیکن اگر ہم دفعہ ۲۴۶ کی تعریف اختیار کریں جو یہ ہے کہ ی، ء کا لوکارثم ہے جبکہ $و^ی$ کی کوئی قیمت ء کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارثم ہوسکتا ہے۔ اگر ر ایک مثبت حقیقی عدد ہو تو

$$[\text{لوک}(-ر)] = \frac{\text{لوک } ر + (۲ک+۱)\, خ\, π}{۱ + ۲ک\, خ\, π}$$

$$= \frac{\{\text{لوک } ر + ۲ک(۲ک+۱)π^۲\} + خ\{(۲ک+۱)π - ۲ک\, π\, \text{لوک } ر\}}{۱ + ۴ک^۲ π^۲}$$

اور یہ حقیقی ہے اگر لوک ر = (۲ک + ۱) \ ۲ک۔ پس اگر ر ہو ایسا کہ لوک ر کی شکل (۲ک + ۱) \ ۲کَ ہو جہاں ک اور کَ صحیح عدد ہیں تو [لوک (-ر)] کی ایک قیمت حقیقی ہے۔

اگر لوک ر کی یہ شکل نہ ہو تو ہم ہمیشہ ایک عدد ر۱ معلوم کر سکتے ہیں ایسا کہ جسمیں اور ر میں اتنا کم فرق ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ [لوک (-ر۱)] کی ایک قیمت حقیقی ہو، کیونکہ ایک کسر ف/ق اپنی مختصر ترین شکل میں ہمیشہ معلوم ہو سکتی ہے جو لوک ر سے اس قدر کم فرق رکھے جسقدر ہم چاہیں۔ فرض کرو لوک رَ = ف/ق، تب اگر ق جفت ہے تو [لوک (-رَ)] کی ایک قیمت حقیقی ہے اور رَ = ر۱، لیکن اگر ق طاق ہے تو رَ = و $\frac{۲ س ف + ۱}{۲ س ق}$ × و $\frac{۱}{۲ س ق}$

اور و $\frac{۱}{۲ س ق}$ کو س کافی بڑا لینے سے ایک کے اتنا قریب لایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں، یا لوک رَ کو $\frac{۲ س ف + ۱}{۲ س ق}$ کے اتنا قریب لایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں، اسلئے عدد $\frac{۲ س ف + ۱}{۲ س ق}$ = لوک ر۱ معلوم ہو سکتا ہے جو لوک ر سے اسقدر کم فرق رکھے جسقدر ہم چاہیں اور جو ایسا ہو کہ [لوک (-ر۱)] کی ایک قیمت حقیقی ہو۔ پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگرچہ ر کی ہر قیمت کے جواب میں [لوک (-ر)] کی ایک قیمت حقیقی نہیں ہے لیکن ہم ہمیشہ ایک عدد ر۱ معلوم کر سکتے ہیں ایسا کہ ر۱ - ر اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ [لوک (-ر۱)] کی ایک قیمت حقیقی ہو۔

(302)

لوکارثمی سلسلہ

۲۴۹ — (۱ + ی)م کی صدر قیمت ق {م لوکو (۱ + ی)} ہے،

لیکن دفعہ ۲۱۱ کی رو سے $(\text{۱} + \text{ی})^{\text{م}}$ کی صدر قیمت سلسلہ

$$\text{۱} + \text{م ی} + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{۱})}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{ی}^{\text{۲}} + \ldots + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{۱})\ldots(\text{م}-\text{س}+\text{۱})}{\underline{|\text{س}}}\,\text{ی}^{\text{س}}$$

+ ...... کا انتہائی مجموعہ ہے بشرطیکہ یہ سلسلہ مستدق ہو جو ہوگا اگر ی کا مقیاس ایک سے کم ہو، اور نیز اگر یہ مقیاس ایک کے مساوی ہو بشرطیکہ $\text{م} > \text{۰}$ ۔ یہ سلسلہ استدقاق کے دائرہ پر بھی مستدق ہوتا ہے جبکہ $\text{۰} > \text{م} > -\text{۱}$، سوائے نقطہ $\text{ی} = -\text{۱}$ کے۔ اب دفعہ ۲۱۰ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ ہم اس سلسلہ کو اس کا مجموعہ بدلے بغیر م کی قوتوں میں ترتیب دے سکتے ہیں بشرطیکہ سلسلہ

$$\text{۱} + |\text{م}||\text{ی}| + \frac{|\text{م}|(|\text{م}|+\text{۱})}{\underline{|\text{۲}}}\,|\text{ی}|^{\text{۲}} + \ldots\ldots + \frac{|\text{م}|(|\text{م}|+\text{۱})\ldots(|\text{م}|+\text{س}-\text{۱})}{\underline{|\text{س}}}\,|\text{ی}|^{\text{س}} + \ldots$$

مستدق ہو، اور یہ سلسلہ اسوقت مستدق ہوگا جبکہ $|\text{ی}| < \text{۱}$ ۔

اب چونکہ $\text{ق}\{\text{م لوگ}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{ی})\}$، سلسلہ

$$\text{۱} + \text{م لوگ}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{ی}) + \frac{\text{م}^{\text{۲}}\{\text{لوگ}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{ی})\}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}} + \ldots\ldots$$

کا مجموعہ ہے اسلئے ہم ان دو سلسلوں میں م کی قوتوں کے سروں کو دفعہ ۲۰۸ کی رو سے مساوی رکھہ سکتے ہیں، پس

$$\text{لوگ}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{ی}) = \text{ی} - \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ی}^{\text{۲}} + \tfrac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{ی}^{\text{۳}} - \ldots\ldots + (-\text{۱})^{\text{س}-\text{۱}}\frac{\text{۱}}{\text{س}}\,\text{ی}^{\text{س}} + \ldots \quad (\text{۹})$$

اس سلسلہ کو جس سے $لوک_و (۱ + ی)$ کی صدر قیمت حاصل ہوتی ہے لوکارتمی سلسلہ کہتے ہیں۔ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ یہ سلسلہ درست ہوتا ہے جبکہ $مق\ ی < ۱$، نیز دفعہ ۲۰۷ کی بموجب اس سلسلہ کا مجموعہ $لوک_و (۱ + ی)$ رہتا ہے جبکہ $مق\ ی = ۱$ بشرطیکہ سلسلہ مستدق ہو جو ہو گا الاّ آنکہ ی کی دلیل π ہو

۲۴۹ ا — یہ مانکر کہ $|ی| < ۱$ سلسلہ (۹) سے ظاہر ہے کہ

$$لوک_و (۱ + ی) = ی - \frac{۱}{۲} ی^۲ + \frac{۱}{۳} ی^۳ - \cdots + (-۱)^{س-۱} \frac{۱}{س} ی^س + ج_س$$

جہاں $ج_س$ [illegible]ستدق سلسلہ $\frac{|ی|^{س+۱}}{س+۱} + \frac{|ی|^{س+۲}}{س+۲} + \ldots$ کے مجموعے سے متجاوز نہیں ہو سکتا اور اسلئے

$$|ج_س| < \frac{|ی|^{س+۱}}{س+۱} (۱ + |ی| + |ی|^۲ + \cdots)$$

یا
$$|ج_س| < \frac{|ی|^{س+۱}}{س+۱} \cdot \frac{۱}{۱ - |ی|}$$

(303)

پس یہ ثابت ہو چکا کہ جب $|ی| < ۱$ تو

$$لوک_و (۱ + ی) = ی - \frac{۱}{۲} ی^۲ + \frac{۱}{۳} ی^۳ - \cdots + \frac{(-۱)^{س-۱}}{س} ی^س (۱ + و_س)$$

جہاں $|و_س| < \frac{س}{س+۱} \cdot \frac{|ی|}{۱ - |ی|}$، اور اسلئے $|و_س|$، $|ی|$ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

بالخصوص $س = ۱$ لینے سے $لوک_و (۱ + ی) = ی (۱ + و_۱)$ جہاں $و_۱ < \frac{۱}{۲} \frac{|ی|}{۱ - |ی|}$ اور اس طرح $|و_۱|$، $|ی|$ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ اس نتیجہ کو

شکل

$$\text{نہا}_{|ی|=0}\ \frac{\text{لوک}_و(1+ی)-ی}{ی}=0$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اگر م، |ی| سے بڑا کوئی مثبت حقیقی عدد ہو تو $(1+\frac{ی}{م})^م=$

$و^{م\,\text{لوک}_و(1+ی\backslash م)}=و^{ی(1+ط_1)}$ جہاں $ط_1$، |ی\م| کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ پس اگر م کو غیر معین طور پر بڑھتے والے مثبت حقیقی عددوں کے کسی تواتر کی قیمتیں دی جائیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ $(1+\frac{ی}{م})^م$ کی انتہا $و^ی$ ہے۔ یہ مسئلہ دفعہ ۲۲۶ میں صرف اس مخصوص صورت کے لئے ثابت کیا جا چکا ہے جسمیں اعداد م پر مثبت صحیح اعداد ہونیکی قید تھی۔ یہ قید اب اُٹھ چکی ہے۔

۲۵۰ — ی = ر(جم طہ + خ جب طہ) لکھنے سے

$$\text{لوک}_و(1+ی)=\text{لوک}_و(1+\text{ر جم طہ}+\text{خ ر جب طہ})$$

اور یہ جملہ ذیل کے مساوی ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{لوک}_و(1+2\,\text{ر جم طہ}+ر^2)+\text{خ مس}^{-1}\{\text{ر جب طہ}\backslash(1+\text{ر جم طہ})\}$$

جہاں مقلوب مماس اپنی صدر قیمت رکھتا ہے۔ پس ہمیں حسب ذیل دو سلسلے ملتے ہیں

۱/۲ لوک و (۱ + ۲ ر جم طہ + ر²) = ر جم طہ − ۱/۲ ر² جم ۲ طہ + ۱/۳ ر³ جم ۳ طہ − .... (۱۰)

مس⁻¹ {ر جیب طہ \ (۱ + ر جم طہ)} = ر جیب طہ − ۱/۲ ر² جیب ۲ طہ + ۱/۳ ر³ جیب ۳ طہ − ...... (۱۱)

جہاں ر > ۱ ' یا ر = ۱ اور طہ ≠ ± π

اگر ر = ۱ رکھا جائے تو

لوک و (۲ جم ۱/۲ طہ) = جم طہ − ۱/۲ جم ۲ طہ + ۱/۳ جم ۳ طہ − ...... (۱۲)

۱/۲ طہ = جیب طہ − ۱/۲ جیب ۲ طہ + ۱/۳ جیب ۳ طہ − ...... (۱۳)

جہاں طہ ' ± π کے درمیان واقع ہے اور ± π کے مساوی نہیں ہے
اگر (۱۱) میں طہ کو ۲ طہ میں تبدیل کیا جائے تو مسئلہ ذیل حاصل ہوتا ہے

لوک جم طہ = − لوک ۲ + جم ۲ طہ − ۱/۲ جم ۴ طہ + ۱/۳ جم ۶ طہ − ...

جو درست رہتا ہے اگر طہ ' ± ۱/۲ π کے درمیان واقع ہو۔
پھر طہ کو ۱/۲ π − طہ میں تبدیل کرنے سے

(304)

لوک جیب طہ = − لوک ۲ − جم ۲ طہ − ۱/۲ جم ۴ طہ − ۱/۳ جم ۶ طہ − ...

جو درست رہتا ہے اگر طہ ' صفر اور π کے درمیان واقع ہو۔
سلسلہ (۱۳) سے غیر تسلسل کی ایک مثال فراہم ہوتی ہے اس وجہ سے کہ یہ سلسلہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے جبکہ طہ قیمت π کے قریب آتا ہے' جب ' طہ = π تو اس سلسلہ کا مجموعہ صفر ہوتا ہے

لیکن جب طہ، π سے خواہ کتنی ہی صغیر مقدار کے کم ہو اس سلسلہ کا مجموعہ ½ طہ ہوتا ہے۔

گریگوری کا سلسلہ

۲۵۱ — چونکہ لوک$_و$ (جم طہ + خ جب طہ) = خ طہ جہاں طہ، ±π کے درمیان واقع ہے اسلئے

لوک$_و$ جم طہ + لوک$_و$ (۱ + خ مس طہ) = خ طہ

یا لوک$_و$ جم طہ + خ (مس طہ − ⅓ مس^3 طہ + ⅕ مس^5 طہ ...)

+ (½ مس^2 طہ − ¼ مس^4 طہ + ...) = خ طہ

بشرطیکہ مس طہ، ± ۱ کے درمیان واقع ہو جو ہوگا اگر طہ، ± π/۴ کے درمیان واقع ہو یا ± ¼ π کے مساوی ہو۔ پس چونکہ جم طہ مثبت ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

لوک$_و$ جم طہ = − ½ مس^2 طہ + ¼ مس^4 طہ − ....

اور طہ = مس طہ − ⅓ مس^3 طہ + ⅕ مس^5 طہ − ..... (۱۴)

اِس آخری سلسلے کو گریگوری کا سلسلہ کہتے ہیں اور یہ درست رہتا ہے اگر طہ، ± ¼ π کے درمیان (بشمول ہر دو حدود) واقع ہو۔

اب طہ کو ½ π − طہ میں بدلنے سے

½ π − طہ = مم طہ − ⅓ مم^3 طہ + ⅕ مم^5 طہ − .....

جو درست رہتا ہے اگر طہ، $\frac{1}{4}\pi$ اور $\frac{3}{4}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔ کسی زاویہ طہ کے لئے عام جملے ہیں

طہ = ن π + مس طہ − $\frac{1}{3}$ مس^3 طہ + ...

یا طہ = (ن + $\frac{1}{2}$) π − مم طہ + $\frac{1}{3}$ مم^3 طہ − .....

جہاں سلسلہ اول میں ن ایک صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ − ن π، ± $\frac{1}{4}\pi$ کے درمیان واقع ہے اور سلسلہ دوم میں ن ایک صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ − ن π، $\frac{1}{4}\pi$ اور $\frac{3}{4}\pi$ کے درمیان واقع ہے۔

گریگوری کے سلسلے کو شکل

مس$^{-1}$ لا = لا − $\frac{1}{3}$ لا^3 + $\frac{1}{5}$ لا^5 − ....

میں بھی لکھ سکتے ہیں جہاں لا، ± ۱ کے درمیان واقع ہے اور مس$^{-1}$ لا اپنی صدر قیمت رکھتا ہے۔

لا کی قوتوں میں جب$^{-1}$ لا کے لئے جو سلسلہ دفعہ ۲۱۸ میں حاصل کیا جا چکا ہے اسکو گریگوری کے سلسلے سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو طہ = جب$^{-1}$ لا تو

$$\text{جب}^{-1}\text{لا} = \frac{\text{لا}}{(1-\text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}\,\frac{\text{لا}^3}{(1-\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{5}\,\frac{\text{لا}^5}{(1-\text{لا}^2)^{\frac{5}{2}}} - \dots\dots$$

$$+ (-1)^{\text{ر}}\,\frac{1}{2\text{ر}+1}\,\frac{\text{لا}^{2\text{ر}+1}}{(1-\text{لا}^2)^{\frac{1}{2}(2\text{ر}+1)}} + \dots\dots$$

اگر لا ایک سے کم ہو تو وہ سلسلہ جو (808)

$$\frac{۱}{۲ر+۱}\;\frac{لا^{۲ر+۱}}{(۱-لا^{۲})^{\frac{۱}{۲}(۲ر+۱)}}$$

کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے مطلقاً مستدق ہے اور سلسلہ

$$\frac{|لا|}{(۱-لا^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}+\frac{۱}{۳}\;\frac{|لا|^{۳}}{(۱-لا^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{۱}{۵}\;\frac{|لا|^{۵}}{(۱-لا^{۲})^{\frac{۵}{۲}}}+\cdots\cdots$$

مستدق ہے اگر $|لا|<\frac{۱}{\sqrt{۲}}$؛ اسلئے ہم اس سلسلہ کو لا کی قوتوں میں ترتیب دے سکتے ہیں۔ چنانچہ $(-۱)^{ر}\,لا^{۲ر+۱}$ کے سر کے لئے جملہ ملتا ہے

$$\frac{۱}{۲ر+۱}\left\{۱-\frac{۲ر+۱}{۲}+\frac{(۲ر+۱)(۲ر-۱)}{۲\times۴}-\cdots+(-۱)^{ر}\frac{(۲ر+۱)(۲ر-۱)\cdots\times۱}{۲\times۴\times۶\cdots۲ر}\right\}$$

خطوط وحدانی { } کے اندر کا جملہ $(۱-ما)^{\frac{۱}{۲}(۲ر+۱)}$ کے پھیلاؤ (ما کی قوتوں میں) میں پہلے ر+۱ سروں کا مجموعہ ہے اور یہ مجموعہ $(۱-ما)^{-۱}(۱-ما)^{\frac{۱}{۲}(۲ر+۱)}$ یا $(۱-ما)^{\frac{۱}{۲}(۲ر-۱)}$ میں $ما^{ر}$ کے سر کے مساوی ہے اور یہ سر

$$(-۱)^{ر}\;\frac{(۲ر-۱)(۲ر-۳)\cdots\times۱}{۲\times۴\times۶\times\cdots\times۲ر}$$

کے مساوی ہے۔ پس $جب^{-۱}لا$ کے پھیلاؤ میں $لا^{۲ر+۱}$ کا سر ہے

$$\frac{۱}{۲ر+۱}\;\frac{۱\times۳\times۵\times\cdots\times(۲ر-۱)}{۲\times۴\times۶\times\cdots\times۲ر}$$

اسلئے

$$جب^{-۱}لا=لا+\frac{۱}{۲}\times\frac{لا^{۳}}{۳}+\frac{۱\times۳}{۲\times۴}\;\frac{لا^{۵}}{۵}+\cdots+\frac{۱\times۳\times۵\cdots(۲ر-۱)}{۲\times۴\times۶\cdots۲ر}\;\frac{لا^{۲ر+۱}}{۲ر+۱}+\cdots$$

اس ثبوت سے صرف یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ $\pm \frac{1}{2}$ کے درمیان لا کی قیمتوں کے لئے درست ہے لیکن اِس واقعہ کو استعمال کرنے سے کہ اس سلسلہ کا مجموعہ اسکے استدقاق کے دائرہ میں مسلسل ہے یہ بتایا جا سکتا ہے کہ یہ سلسلہ درست رہتا ہے اگر لا، $\pm$ ا کے درمیان ہو۔

دائرہ کی تربیع

۲۵۱ (ا) — وہ مشہور مسئلہ جو دائرہ کو مربع میں تحویل (Squaring the cirele) کرنیکا ہے یعنی ایک مربع بنانیکا جس کا رقبہ ایک دئے ہوئے دائرہ کے مساوی ہو اِس مسئلہ کے مماثل ہے کہ ایک خط مستقیم بنایا جائے جو طول میں ایک دئے ہوئے دائرہ کے محیط کے مساوی ہو۔ وہ طریقۂ عمل جو اس مسئلہ عملی کے حل کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے اقلیدسی ہے جسمیں صرف دائروں اور خطوطِ مستقیم کو اقلیدسی نظام کے اصولِ موضوعہ کی بموجب کھینچنے کا عمل شامل ہے۔

اس مسئلہ عملی کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے کہ وہ ایک خطِ مستقیم کو جسکا طول عدد π سے تعبیر ہوتا ہے بنانیکا مسئلہ ہے جبکہ ایک دئے ہوئے محدود خط کا طول طول کی اکائی متصور ہو۔ لیمبرٹ نے یہ بات ثابت کی کہ عدد π غیر منطق ہے یعنی اسکو شکل $\frac{ف}{ق}$ میں بیان نہیں کیا جا سکتا جہاں ف اور ق صحیح عدد ہیں اور ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں لیکن یہ امر واقعہ اس بات کو ثابت کرنیکے لئے کافی نہیں ہے کہ طول π کا خط مستقیم بنانا ناممکن ہے کیونکہ غیر منطق طول کے خطوطِ مستقیم کی ایک خاص جماعت اقلیدسی طریقۂ عمل سے حاصل کیجا سکتی ہے۔ اس سلسلہ میں بنیادی اہمیت رکھنے والی ایک کڑی کا

اضافہ ہوا جبکہ لیوول (Liouville) نے[1] علوی اعداد کے وجود کو ثابت
کیا جو جبری اعداد سے مختلف ہیں۔ جبری عدد وہ ہے جو کسی
درجہ n کی ایک جبری مساوات کی ایک اصل ہوتا ہے جبکہ اس مساوات
کے سر منطق عدد ہوں؛ مسئلہ کی عمومیت پر اثر نہیں پڑتا اگر ان
سروں پر مثبت یا منفی صحیح عدد ہونیکی قید عائد کیجائے۔ علوی عدد
وہ ہے جو کسی ایسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہو سکتا جس کے سر
منطق (یا صحیح عدد) ہوں۔ خود لیوول نے علوی عددوں کی مثالیں
دی ہیں لیکن وہ پہلی صورت جس میں ایک عدد کو جو علم التحلیل میں
بہت معروف ہے علوی ثابت کیا گیا تھا عدد و کی تھی جس کی علویت
ہرمائٹ (Hermite) نے قائم کی۔ ہرمائٹ کے بعد لنڈیمان
(Lindemann) نے[2] اس امر کا ثبوت دیا کہ π ایک
علوی عدد ہے۔ اس نے یہ عام تر مسئلہ ثابت کیا کہ اگر و^لا = ما تو
یہ دو عدد لا اور ما دونوں جبری نہیں ہو سکتے اِلّا بصورت آنکہ لا = ۰،
ما = ۱۔ وہ آسان ثبوت کہ و اور π علوی عدد ہیں بعد میں ہلبرٹ،
ہرووِز (Hurwitz) اور گارڈن (Gordan) نے[3] دئے۔
گارڈن کے ثبوت کی ترمیم شدہ شکل یہاں دی جائے گی۔

یہ ثبوت کہ π ایک علوی عدد ہے اس امر کے مماثل ہے
کہ کسی ہندسی عمل کے ذریعہ جنمیں صرف خطوط مستقیم اور دائرے
استعمال کئے گئے ہوں دائرہ کو ایک مربع میں تحویل کرنا ناممکن ہے،
یا زیادہ عام صورت میں یہ کہ کسی جبری منحنیوں کے ذریعہ ایسا کرنا
ناممکن ہے۔ کیونکہ کسی ایسے عمل کے یہ معنی ہیں کہ π کو کسی خاص

---

[1] Liouville's journal vol. xvi. 1851

[2] Mathematische Annalen, vol. xx. 1882.

[3] " " vol. xliii, 1893

جبری مساوات کی ایک اصل کے طور پر ظاہر کیا گیا ہے جہاں یہ مساوات خطوط مستقیم اور دائروں یا دوسرے جبری منحنیوں کی کارتیزی مساواتوں کو ترکیب دینے سے حاصل ہوئی ہے۔ دائرہ کو مربع میں تحلیل کرنیکا مسئلہ ایسا ہے کہ جس نے صدیوں تک علماء ریاضی کے دماغوں کو محو فریب رکھا اور اسلئے لنڈ رمن کا ثبوت اس مسئلہ کے عدم امکان کے متعلق اس لحاظ سے بڑی اہمیت رکھتا ہے کہ وہ تاریخی دلچسپی کے ایک مسئلہ سے متعلق ہے۔

۲۵۱ (ب) ۔ یہ دکھانے کے لئے کہ عدد $و$ علوی ہے مان لو (بفرض امکان) کہ $و$ اس شرط

$$ا_. + ا_۱ و + ا_۲ و^۲ + \dots + ا_ن و^ن = .$$

(307)

کو پورا کرتا ہے جہاں $ا_۱$، $ا_۲$ ... مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں اور $ا_.$ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ اب یہ دکھانے کے لئے کہ اس مفروضہ سے ہم اس مسئلہ کے ضد پر پہنچتے ہیں یہ ثابت کیا جائیگا کہ ایک عدد $ک$ متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ

$$ک ا_. = ص_. + ف_.، ک ا_۱ و = ص_۱ + ف_۱، ک ا_۲ و^۲ = ص_۲ + ف_۲،$$

$$\dots، ک ا_ن و^ن = ص_ن + ف_ن$$

جہاں $ص_.$، $ص_۱$، $ص_۲$، ... مثبت یا منفی صحیح عددوں کو تعبیر کرتے ہیں اور $ف_۱$، $ف_۲$، ....، $ف_ن$ اُن عددوں کو تعبیر کرتے ہیں جو عدداً ایک سے کم ہیں اور یہ کہ $ف_۱ + ف_۲ + \dots + ف_ن$ عدداً ایک سے کم ہے نیز $ص_. + ص_۱ + ص_۲ + \dots + ص_ن$ صفر نہیں ہے

ابتدائی مساوات کو ک سے ضرب دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک صحیح عدد اور عدد ۱ ایک سے چھوٹے عدد کا مجموعہ صفر کے مساوی حاصل ہوتا ہے جو ناممکن ہے۔ ک کی تعیین کے لئے جملہ

$$فہ(لا) = \frac{لا^{پ-۱}}{\underline{|پ-۱}} \{(۱-لا)(۲-لا)\ldots(ن-لا)\}^{پ}$$

پر غور کرو جہاں پ، ن سے بڑا اور ۱ سے بڑا ایک مفرد عدد ہے۔ ہم فہ (لا) کو اسے لا کی قوتوں میں پھیلانے کے بعد $ج_{پ-۱}\ لا^{پ-۱}$ $+ ج_{پ}\ لا^{پ} + \ldots ج_{ن پ+پ-۱}\ لا^{ن پ+پ-۱}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اب فہ (لا) کے متواتر مشتق تفاعلوں کو

$$فہَ(لا)،\ فہً(لا)،\ \ldots،\ فہ^{(س)}(لا)،\ \ldots،\ فہ^{(ن پ+پ-۱)}(لا)$$

سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$فہ^{(پ)}(۰)،\ فہ^{(پ+۱)}(۰)،\ \ldots،\ فہ^{(ن پ+پ-۱)}(۰)$$

سب کے سب پ کے ضعف ہیں، لیکن $فہ^{(پ-۱)}(۰)$، پ کا ضعف نہیں ہے کیونکہ $(\underline{|ن})^{پ}$ پ کے لحاظ سے مفرد ہے۔ نیز اگر صحیح عددوں ۱، ۲، ۳، ...، ن میں سے ایک م سے تعبیر ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ $فہ(م)، فہَ(م)، \ldots، فہ^{(پ-۱)}(م)$ سب کے سب معدوم ہوتے ہیں اور $فہ^{(پ)}(م)، فہ^{(پ+۱)}(م)، \ldots، فہ^{(ن پ+پ-۱)}(م)$ سب کے سب

پ سے تقسیم پذیر صحیح عدد ہیں۔

فرض کرو کہ $ک_پ$ سے

$$\sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} \underline{|ر} \times ج_ر$$

یا $فہ^{(پ-۱)}(۰) + فہ^{(پ)}(۰) + \cdots + فہ^{(ن پ+پ-۱)}(۰)$

تعبیر ہوتا ہے، اِس طرح $ک_پ$، پ کا ضِعف نہیں ہے کیونکہ $فہ^{(پ-۱)}(۰)$، پ سے تقسیم پذیر نہیں ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ $ک_پ$ کی وہ قیمت جو مفرد عدد پ کی کافی طور پر بڑی قیمت کے جواب میں ہے مطلوبہ عدد ک ہے۔

چونکہ ا، پ کے لحاظ سے مفرد ہے اسلئے $ک_پ$ ا، پ کا ضِعف نہیں ہے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ک_پ\, ا_م و^م = ا_م \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} \underline{|ر} \times ج_ر و^م$$

$$= ا_م \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} ج_ر \left\{ م^ر + ر م^{ر-۱} + ر(ر-۱) م^{ر-۲} + \cdots + \underline{|ر} + \frac{م^{ر+۱}}{ر+۱} + \frac{م^{ر+۲}}{(ر+۱)(ر+۲)} + \cdots \right\}$$

(308)

اب چونکہ $\frac{م^{ر+۱}}{ر+۱} + \frac{م^{ر+۲}}{(ر+۱)(ر+۲)} + \cdots$ کا انتہائی مجموعہ

$$م^ر \left\{ ۱ + م + \frac{م^۲}{\underline{|۲}} + \cdots \right\}$$

کے انتہائی مجموعہ سے یا $م' و'$ سے کم ہے اس لئے اس انتہائی مجموعہ کو $م' طہ_ر و'$ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جہاں $۰ < طہ_ر < ۱$۔

اب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ک_پ\, ا_م\, و' = ا_م \{ فہ(م) + فہ'(م) + \ldots + فہ^{(ن پ + پ - ۱)}(م) \}$$

$$+\, ا_م\, و' \sum_{ر = پ - ۱}^{ر = ن پ + پ - ۱} ج_ر\, طہ_ر\, م'$$

بائیں جانب کی پہلی رقم ایک مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر ہے اور دوسری رقم عدد آ

$$< |ا_م| و' \sum_{ر = پ - ۱}^{ر = ن پ + پ - ۱} |ج_ر| م'$$

یا

$$< |ا_م| و' \frac{م^{پ - ۱}}{\underline{|پ - ۱}} \{(۱ + م)(۲ + م) \ldots (ن + م)\}^{پ}$$

جو

$$\not< |ا_م| و' \frac{ن^{پ - ۱}}{\underline{|پ - ۱}} \{(۱ + ن)(۲ + ن) \ldots (ن + ن)\}^{پ}$$

اب پ کو کافی بڑا لینے سے عدد

$$\{ن(ن + ۱)(ن + ۲) \ldots (ن + ن)\}^{پ} \Big/ \underline{|پ - ۱}$$

اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ فرض کرو کہ ک، $ک_پ$ کی وہ قیمت ہے جبکہ پ اسقدر بڑا ہے کہ

$$\frac{ن^{پ-۱}}{\lfloor پ-۱}\{(۱+ن)(۲+ن)\ldots(ن+ن)\}^{پ}\{\lfloor ا_۱ \lfloor و + \lfloor ا_۲ \lfloor و^۲ + \ldots + \lfloor ا_ن \lfloor و^ن\}$$

ایک سے کم ہے۔

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ ک $(ا_. + ا_۱ و + ا_۲ و^۲ + \ldots + ا_ن و^ن)$ تین عددوں کا مجموعہ ہے جنمیں سے ایک، ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر نہیں ہے اور دوسرا ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر ہے اور تیسرا ایک عدد ہے جو ایک سے کم ہے اور یہ ناممکن ہے۔ پس چونکہ و مساوات

$$ا_. + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \ldots + ا_ن لا^ن = ۰$$

کی اصل نہیں ہو سکتا جسکے سر منطق ہیں اس لئے وہ ایک علوی عدد ہے۔

۲۵۱ (ج)۔ اگر π بفرض امکان ایک جبری مساوات کی اصل ہو جسکے سر منطق ہیں تو خ π بھی ایسی مساوات کی اصل ہو گا۔ مان لو کہ خ π، مساوات

$$ج(لا - ع_۱)(لا - ع_۲)\ldots(لا - ع_س) = ۰$$

کی ایک اصل ہے جسکے سر منطق ہیں، اس طرح عددوں $ع_۱$، $ع_۲$، ... $ع_س$ میں سے ایک عدد خ π ہے۔

چونکہ $و^{خ\pi} = -۱$، اسلئے $(۱ + و^{ع_۱})(۱ + و^{ع_۲})\ldots(۱ + و^{ع_س}) = ۰$۔

اب اجزائے ضربی کو باہم ضرب دے لینے کے بعد اسکی شکل ہے

$$۱ + و^{ب_۱} + و^{ب_۲} + \ldots + و^{ب_ن} = ۰$$

جہاں ا ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

(309) یہ ظاہر ہے کہ ج عہ۱، ج عہ۲، ... ج عہن کے تمام متشاکل تفاعل صحیح عدد ہیں اسلئے ج بہ۱، ج بہ۲، ... کے تمام متشاکل تفاعل بھی صحیح عدد ہیں ہم لیتے ہیں

$$ فہ (لا) = \frac{لا^{پ-۱}}{\lfloor پ-۱} ج^{ن پ + پ - ۱} \{ (لا - بہ_۱)(لا - بہ_۲) \ldots (لا - بہ_ن) \}^{پ} $$

جہاں پ ایک مفرد عدد ہے جو ا، ن، ج، ج^ن |بہ۱ بہ۲ ... بہن| سب سے بڑا ہے۔

اب فہ (لا) کو $ج_{پ-۱}$ لا$^{پ-۱}$ + $ج_{پ}$ لا^{پ} + ... + $ج_{ن پ + پ - ۱}$ لا$^{ن پ + پ - ۱}$

سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ فہ$^{(پ)}$(۰)، فہ$^{(پ+۱)}$(۰)، ... فہ$^{(ن پ + پ - ۱)}$(۰)

سب کے سب پ کے صحیح عددی ضعف ہیں اور فہ$^{(پ-۱)}$(۰)، پ کا ضعف نہیں ہے۔ نیز اگر م ≥ ن تو فہ (بہم)، فہَ (بہم)، ... فہ$^{(پ-۱)}$(بہم)

سب کے سب صفر ہیں اور $\sum_{م=۱}^{م=ن}$ فہ$^{(پ)}$ (بہم)، $\sum_{م=۱}^{م=ن}$ فہ$^{(پ+۱)}$ (بہم)، ...

...، $\sum_{م=۱}^{م=ن}$ فہ$^{(ن پ + پ - ۱)}$ (بہم) سب کے سب صحیح عدد ہیں جو پ سے تقسیم پذیر ہیں۔

فرض کرو کہ

$$ ک_{پ} = \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ + پ - ۱} \lfloor ر \times ج_{ر} = فہ^{(پ-۱)}(۰) + فہ^{(پ)}(۰) + \ldots + فہ^{(ن پ + پ - ۱)}(۰) $$

اس طرح کہ پ ا، پ کا ضعیف نہیں ہے ۔

نیز کہ

$$پ\,و^{بم} = \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن\,پ+پ-۱} ج_ر \left\{ بم^{ر} + ر\,بم^{ر-۱} + \cdots + ا_ر + \frac{ث^{ر+۱}}{ر+۱} + \frac{بم^{ر+۲}}{(ر+۱)(ر+۲)} + \cdots \right\}$$

$$= فہ(بم) + فہ'(بم) + \cdots + فہ^{(ن\,پ+پ-۱)}(بم)$$

$$+ و^{ا\,بم\,ا} \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن\,پ+پ-۱} ج_ر\, طہ_ر\, ا\,بم\,ا^{ر}$$

جہاں اعداد ا طہ_ر ا سب کے سب صفر اور ایک کے درمیان واقع ہیں ۔

$$عدد \left| \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن\,پ+پ-۱} ج_ر\, طہ_ر\, ا\,بم\,ا^{ر} \right|$$

$$عدداً \quad < \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن\,پ+پ-۱} ا\,ج_ر\,ا\; ا\,بم\,ا^{ر}$$

$$یا \quad < \frac{بہ^{پ-۱}}{\underline{|پ-۱}}\; ج^{ن\,پ+پ-۱} \left\{ (بہ + |بہ_۱|)(بہ + |بہ_۲|) \cdots (بہ + |بہ_ن|) \right\}^{پ}$$

جہاں بہ، عددوں ا بہ_۱ ا، ا بہ_۲ ا، ...، ا بہ_ن ا میں سے سب سے بڑا ہے ۔

اب ہم پ کو اتنا بڑا لیتے ہیں کہ

$$\left\{ \text{فو}^{ا\,ب۲ا} + \text{فو}^{ا\,ب۲ا} + \ldots + \text{فو}^{ا\,بن\,ا} \right\} \frac{\text{ب}^{\text{پ}-1}}{\lfloor \text{پ}-1} \text{ج}^{\text{ن ب}+\text{پ}-1} \left\{ (\text{ب}+\text{ا ب}_1\text{ا})(\text{ب}+\text{ا ب}_2\text{ا}) \ldots \right\}^{\text{پ}}$$

$$< 1$$

فرض کرو کہ پ کی اس قیمت کے جواب میں $\text{ک}_{\text{پ}}$ کی قیمت ک ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ ک $(1 + \text{فو}^{\text{ب}_1} + \text{فو}^{\text{ب}_2} + \ldots + \text{فو}^{\text{ب}_\text{ن}})$ تین عددوں کے مجموعہ کے طور پر بیان ہو سکتا ہے جنمیں سے ایک 'پ کا ضعف ہے'، دوسرا ایک صحیح عدد ہے پ سے ناتقسیم پذیر' اور تیسرا ایک عدد ہے ایک سے کم'، اس لئے یہ ناممکن ہے کہ مجموعہ معدوم ہو سکے۔ پس یہ ثابت ہو چکا کہ π کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہو سکتا جسکے سر صحیح عدد ہوں اور اس لئے وہ ایک علوی عدد ہے۔

(310)

دائرہ کی تقریبی تربیع

۲۵۲ — دائرہ کی تربیع کا مسئلہ جو π کی قیمت متعین کرنیکے مماثل ہے تقریب کے کسی مطلوبہ درجہ تک حل ہو سکتا ہے اگر ان متعدد سلسلوں میں سے کسی ایک سلسلہ میں رقموں کی کافی تعداد لیجائے جو π کے لئے حاصل کئے جا چکے ہیں۔ سادہ ترین سلسلہ جو حاصل ہو سکتا ہے گریگوری کے سلسلہ میں ط $= \frac{1}{4}\pi$ رکھنے سے ملتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$$

لیکن یہ سلسلہ اسقدر سست رفتار سے متقارب ہوتا ہے کہ π کو محسوب کرنیکے لئے اسکا کوئی عملی فائدہ نہیں۔

۲۵۳ — اگر ہم تماثلہ $\frac{1}{4}\pi = \text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$ استعمال کریں اور $\text{مس}^{-1}\frac{1}{2}$ ، $\text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$ کی بجائے انکی قیمتیں گریگوری کے سلسلہ سے لیکر درج کریں تو

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \cdots\cdots$$

اس کو یولر کا سلسلہ کہتے ہیں۔

اسی تماثلہ سے ایک دوسرا سلسلہ حاصل ہو سکتا ہے اگر $\text{مس}^{-1}\frac{1}{2}$ اور $\text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$ کی بجائے اُن کی قیمتیں سلسلہ ذیل سے جو دفعہ ۲۱۹ میں حاصل کیا گیا تھا لیکر رکھی جائیں

$$\text{مس}^{-1}\text{لا} = \frac{\text{لا}}{1+\text{لا}^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}\right)^2 + \cdots\cdots\right\}$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{4}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\times\frac{2}{10} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \cdots\cdots\right\}$$

$$+ \frac{3}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\times\frac{1}{10} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots\cdots\right\}$$

۲۵۴ — دوسرے سلسلے جو اسی طرح حاصل ہوئے ہیں مختلف محاسبوں نے استعمال کئے ہیں۔ کلاسن (Clausen)[ل] نے اپنا سلسلہ تماثلہ $\frac{1}{4}\pi = 2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{3}\ \text{مس}^{-1}\frac{1}{7}$ سے گریگوری کا سلسلہ استعمال کرکے حاصل کیا۔ میخن (Machin) کا سلسلہ، ضابطہ

[ل] دیکھو مضمون On the calc. of Π by E. Frisby in the Messenger of Math. vol. II

$$\frac{1}{4}\pi = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$$

سے حاصل ہوا ہے۔ ڈیس (Dase) نے متماثلہ

$$\frac{1}{4}\pi = \text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{5} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{8}$$

استعمال کی۔ جیمن کے سلسلہ کی ایک آسان تر شکل رتھرفورڈ (Rutherford) نے لی تھی جس نے متماثلہ $\frac{1}{4}\pi = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{70} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{99}$ استعمال کی۔ ہٹن (Hutton)[۱] نے یہ سلسلہ

$$\pi = 2.4\left\{1 + \frac{1}{10}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{10^2}\,\frac{4\times2}{5\times3} + \cdots\right\}$$

$$+\ .56\left\{1 + \frac{2}{100}\times\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{100}\right)^2\frac{4\times2}{5\times3} + \cdots\right\}$$

دیا جو لا مس$^{-1}$ لا کو $\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}$ کی قوتوں میں پھیلا کر اس پھیلاؤ میں لا $=\frac{1}{3}$ اور لا $=\frac{1}{7}$ رکھنے اور کلاسن کی متماثلہ استعمال کرنے سے حاصل ہوا ہے۔

یولر نے یہ سلسلہ

$$\pi = \frac{28}{10}\left\{1 + \left(\frac{2}{100}\right)\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{100}\right)^2\frac{4\times2}{5\times3} + \cdots\cdots\right\}$$

$$+\ \frac{30336}{100000}\left\{1 + \left(\frac{144}{100000}\right)\frac{2}{3} + \left(\frac{144}{100000}\right)^2\frac{4\times2}{5\times3} + \cdots\right\}$$

۱؎ Phil. Trans. 1776

دیا ہے جو تماثلہ

$$\pi = ۲۰ \text{ مس}^{-1} \tfrac{1}{۷} + ۸ \text{ مس}^{-1} \tfrac{۳}{۷۹}$$

سے اخذ ہو سکتا ہے۔

ڈبلیو شہانکس (W. Shanks) نے π کی قیمت اعشاریہ کے ۷۰۷ مقامات تک محسوب کی ہے[۱]

لارڈ براونکر (Lord Brouncker) رائل سوسائٹی کے پہلے صدر نے ۱۶۵۸ء میں مسلسل کسر

$$\tfrac{1}{۴}\pi = \frac{1}{+1}\;\frac{1^2}{+2}\;\frac{3^2}{+2}\;\frac{5^2}{+2}\ldots$$

دی تھی۔

یہ کسر معمولی قاعدے سے گریگوری کے سلسلہ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ کو استعمال کرنے سے حاصل ہوئی ہے۔ سٹرن[۲] (Stern) نے مسلسل کسر

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{+1}\;\frac{2\times1}{+1}\;\frac{3\times2}{+1}\;\frac{4\times3}{+1}\ldots\ldots$$

دی ہے۔

دائرہ کی تربیع کے مضمون کی تاریخ کا ایک دلچسپ تذکرہ انسائیکلوپیڈیا بریٹانیکا اشاعت نہم میں مقالہ "Squaring of the circle" میں ملیگا۔ نیز دیکھو گلیشیر کا مقالہ On the quadrature of the circle 1580-1630 مسینجر آف میتھمائیکس جلد سوم میں۔

مثلثی تماثلات

۲۵۵ ـ دفعہ ۱۹۰ مثال (۵) کی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ مقدارو ں ا، ب، ج، .... کی کسی تعداد کے درمیان کسی تماثل جبری رشتہ ف (ا، ب، ج، ....) = ۰ سے دو متناظر مثلثی تماثلات اخذ ہو سکتی ہیں

[۱] دیکھو Proc. Royal Soc. vols. xxi. xxii

[۲] Crelle's Journal, vol. x — نیز دیکھو سلوسٹر کا نوٹ Phil. Mag. ۱۸۶۹ء میں

(312) یہ اس طرح حاصل ہونگی کہ ا، ب، ج، ... کو ملتف قیمتیں
جم عہ + خ جب عہ، جم بہ + خ جب بہ، جم جہ + خ جب جہ، ...
دیجائیں اور محصلہ متماثلہ کو شکل
فہ (عہ، بہ، جہ، ...) + خ پہ (عہ، بہ، جہ، ...) = ۰
میں تحویل کیا جائے تو مثلثی متماثلات
فہ (عہ، بہ، جہ، ...) = ۰، پہ (عہ، بہ، جہ، ...) = ۰
حاصل ہونگی جنمیں عہ، بہ، جہ، ... کی جیوب اور جیوب التمام شامل ہونگی۔
تحویل کا کام بالعموم مختصر ہو سکتا ہے اگر جم عہ + خ جب عہ،
جم بہ + خ جب بہ، ... کی بجائے رمزی شکلیں $و^{خ عہ}$، $و^{خ بہ}$، $و^{خ جہ}$، ...
استعمال کیجائیں۔

مثال

متماثلہ
$$\frac{(لا-ب)(لا-ج)}{(ا-ب)(ا-ج)}+\frac{(لا-ج)(لا-ا)}{(ب-ج)(ب-ا)}+\frac{(لا-ا)(لا-ب)}{(ج-ا)(ج-ب)}=1$$
سے متماثلہ ذیل اخذ کرو

$$\frac{جب(طہ-بہ)\,جب(طہ-جہ)}{جب(عہ-جہ)\,جب(عہ-بہ)}جب۲(طہ-عہ)+\frac{جب(طہ-جہ)\,جب(طہ-عہ)}{جب(بہ-جہ)\,جب(بہ-عہ)}جب۲(طہ-بہ)$$

$$+\frac{جب(طہ-عہ)\,جب(طہ-بہ)}{جب(جہ-عہ)\,جب(جہ-بہ)}جب۲(طہ-جہ)=۰$$

فرض کرو $لا=و^{۲خ طہ}$، $ا=و^{۲خ عہ}$، $ب=و^{۲خ بہ}$، $ج=و^{۲خ جہ}$ تو

$$\frac{(لا-ب)(لا-ج)}{(لا-ب)(ا-ج)}=\frac{(و^{۲خ طہ}-و^{۲خ بہ})(و^{۲خ طہ}-و^{۲خ جہ})}{(و^{۲خ عہ}-و^{۲خ بہ})(و^{۲خ عہ}-و^{۲خ جہ})}=\frac{\left\{و^{خ(طہ-بہ)}-و^{-خ(طہ-بہ)}\right\}\left\{و^{خ(طہ-جہ)}-و^{-خ(طہ-جہ)}\right\}}{\left\{و^{خ(عہ-بہ)}-و^{-خ(عہ-بہ)}\right\}\left\{و^{خ(عہ-جہ)}-و^{-خ(عہ-جہ)}\right\}}$$
$$\times\, و^{۲خ(طہ-عہ)}$$

یا = $\frac{\text{جب (طہ − ہ) جب (طہ − جہ)}}{\text{جب (عہ − ہ) جب (عہ − جہ)}}$ {جم ۲ (طہ − عہ) + خ جب ۲ (طہ − عہ)}

پس ہر کسر کو اس طریقہ پر مستعمل کرنے اور خ کے سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے ثابت شدنی متماثلہ حاصل ہوتی ہے۔

سلسلوں کا جمع کرنا

۲۵۶ — جب کسی محدود یا غیر محدود سلسلہ

ا$_0$ + ا$_1$ لا + ا$_2$ لا^2 + ...

کا مجموعہ معلوم ہو تو سلسلوں

ا$_0$ جم عہ + ا$_1$ لا جم (عہ + طہ) + ا$_2$ لا^2 جم (عہ + ۲ طہ) + ...،

ا$_0$ جب عہ + ا$_1$ لا جب (عہ + طہ) + ا$_2$ لا^2 جب (عہ + ۲ طہ) + ...

کے مجموعے س$_1$ اور س$_2$ اخذ ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو ف (لا) = ا$_0$ + ا$_1$ لا + ا$_2$ لا^2 + ...

تو قو$^{\text{خ عہ}}$ ف (لا قو$^{\text{خ طہ}}$) = س$_1$ + خ س$_2$

اور نیز قو$^{-\text{خ عہ}}$ ف (لا قو$^{-\text{خ طہ}}$) = س$_1$ − خ س$_2$　(318)

اسلئے س$_1$ = $\frac{1}{2}$ {قو$^{\text{خ عہ}}$ ف (لا قو$^{\text{خ طہ}}$) + قو$^{-\text{خ عہ}}$ ف (لا قو$^{-\text{خ طہ}}$)}

اور س$_2$ = $\frac{1}{\text{۲ خ}}$ {قو$^{\text{خ عہ}}$ ف (لا قو$^{\text{خ طہ}}$) − قو$^{-\text{خ عہ}}$ ف (لا قو$^{-\text{خ طہ}}$)}

اس طرح س_1 اور س_2 کی جو قیمتیں حاصل ہوں اِن کو اب حقیقی شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

(۱) جمع کرو سلسلہ

$$\text{جم}\,\text{ع} + \text{لا}\,\text{جم}(\text{ع}+\text{ب}) + \text{لا}^{2}\,\text{جم}(\text{ع}+2\text{ب}) + \cdots + \text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{جم}\{\text{ع}+(\text{ن}-1)\text{ب}\}$$

اب

$$\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}}{1-\text{لا}} = 1 + \text{لا} + \text{لا}^{2} + \cdots + \text{لا}^{\text{ن}-1}$$

اِسمیں لا کو $\text{لا}\,\text{قو}^{\text{خ}\,\text{ب}}$ میں تبدیل کرو اور $\text{قو}^{\text{خ}\,\text{ع}}$ سے ضرب دو تو

$$\text{قو}^{\text{خ}\text{ع}}\,\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{قو}^{+\text{خ}\text{ن}\text{ب}}}{1-\text{لا}\,\text{قو}^{+\text{خ}\text{ب}}} = \text{قو}^{+\text{خ}\text{ع}} + \text{لا}\,\text{قو}^{+\text{خ}(\text{ع}+\text{ب})} + \text{لا}^{2}\,\text{قو}^{\text{خ}(\text{ع}+2\text{ب})} + \cdots$$

$$\cdots + \text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{قو}^{\text{خ}\{\text{ع}+(\text{ن}-1)\text{ب}\}}$$

اور اسی طرح

$$\text{قو}^{-\text{خ}\text{ع}}\,\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{قو}^{-\text{خ}\text{ن}\text{ب}}}{1-\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ}\text{ب}}} = \text{قو}^{-\text{خ}\text{ع}} + \text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ}(\text{ع}+\text{ب})} + \text{لا}^{2}\,\text{قو}^{-\text{خ}(\text{ع}+2\text{ب})} + \cdots$$

$$\cdots + \text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{قو}^{-\text{خ}\{\text{ع}+(\text{ن}-1)\text{ب}\}}$$

اسلئے دیے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{2}\left\{\text{قو}^{\text{خ}\text{ع}}\,\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{قو}^{\text{خ}\text{ن}\text{ب}}}{1-\text{لا}\,\text{قو}^{\text{خ}\text{ب}}} + \text{قو}^{-\text{خ}\text{ع}}\,\frac{1-\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{قو}^{-\text{خ}\text{ن}\text{ب}}}{1-\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ}\text{ب}}}\right\}$$

یا ۱/۲ [قو^(خ عہ) (۱ - لا^ن قو^(خ ن بہ)) (۱ - لا قو^(-خ بہ)) + قو^(-خ عہ) (۱ - لا^ن قو^(-خ ن بہ)) (۱ - لا قو^(خ بہ))] ÷ [(۱ - لا قو^(خ بہ)) (۱ - لا قو^(-خ بہ))]

جو = [جم عہ - لا جم (عہ - بہ) - لا^ن جم (عہ + ن بہ) + لا^(ن+۱) جم (عہ + (ن - ۱) بہ)] ÷ [۱ - ۲ لا جم بہ + لا^۲]

(۲) جمع کرو لامتناہی سلسلہ

جب عہ + لا جب (عہ + بہ) + لا^۲ جب (عہ + ۲ بہ) / |۲ + ... + لا^ن جب (عہ + ن بہ) / |ن

اب قو^لا = ۱ + لا + لا^۲ / |۲ + ... + لا^ن / |ن + ...

اسمیں لا کی بجائے لا قو^(خ بہ) رکھو اور قو^(خ عہ) سے ضرب دو تو

قو^(لا قو^(خ بہ) + خ عہ) = قو^(خ عہ) + لا قو^(خ (عہ + بہ)) + لا^۲ / |۲ قو^(خ (عہ + ۲ بہ)) + ... + لا^ن / |ن قو^(خ (عہ + ن بہ)) + ...

اور اسی طرح

قو^(لا قو^(-خ بہ) - خ عہ) = قو^(-خ عہ) + لا قو^(-خ (عہ + بہ)) + لا^۲ / |۲ قو^(-خ (عہ + ۲ بہ)) + ... + لا^ن / |ن قو^(-خ (عہ + ن بہ)) + ...

پس دیئے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ ہے

۱ / ۲ خ { قو^(لا قو^(خ بہ) + خ عہ) - قو^(لا قو^(-خ بہ) - خ عہ) }

یا ۱ / ۲ خ قو^(لا جم بہ) { قو^(خ (لا جب بہ + عہ)) - قو^(-خ (لا جب بہ + عہ)) }

جو = قو^(لا جم بہ) جب (عہ + لا جب بہ)

۲۵۷ — اب ہم چند مثالیں دینگے جن سے یہ معلوم ہوگا کہ دائری تفاعلوں کے قوت نمائی جملے کس طرح جملوں کو سلسلوں میں پھیلانے میں کام آتے ہیں۔

(۱) $\left(\text{۱} - \text{۲ لا جم طہ} + \text{لا}^{\text{۲}}\right)^{-\text{۱}}$ کو لا کی قوتوں کے ایک سلسلے میں پھیلانا جہاں لا ایک سے کم ہے۔ اب

$$\left(\text{۱} - \text{۲ لا جم طہ} + \text{لا}^{\text{۲}}\right)^{-\text{۱}} = \left(\text{۱} - \text{لا قو}^{\text{خ طہ}}\right)^{-\text{۱}}\left(\text{۱} - \text{لا قو}^{-\text{خ طہ}}\right)^{-\text{۱}}$$

اسکو جزوی کسرات میں بیان کرنے سے وہ

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲ خ جب طہ}}\left(\frac{\text{قو}^{\text{خ طہ}}}{\text{۱} - \text{لا قو}^{\text{خ طہ}}} - \frac{\text{قو}^{-\text{خ طہ}}}{\text{۱} - \text{لا قو}^{-\text{خ طہ}}}\right)$$

اور ہر کسر کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲ خ جب طہ}}\left(\text{قو}^{\text{خ طہ}} + \text{لا قو}^{\text{۲ خ طہ}} + \text{لا}^{\text{۲}}\text{قو}^{\text{۳ خ طہ}} + \dots + \text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{قو}^{\text{ن خ طہ}} + \dots\right)$$

$$-\frac{\text{۱}}{\text{۲ خ جب طہ}}\left(\text{قو}^{-\text{خ طہ}} + \text{لا قو}^{-\text{۲ خ طہ}} + \text{لا}^{\text{۲}}\text{قو}^{-\text{۳ خ طہ}} + \dots + \text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{قو}^{-\text{ن خ طہ}} + \dots\right)$$

جو $= \text{قم طہ}\left(\text{جب طہ} + \text{لا جب ۲ طہ} + \text{لا}^{\text{۲}}\text{جب ۳ طہ} + \dots + \text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{جب ن طہ} + \dots\right)$

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۱} - \text{۲ لا جم طہ} + \text{لا}^{\text{۲}}} = \text{۱} + \text{۲ لا جم طہ} + \text{۲ لا}^{\text{۲}}\text{جم ۲ طہ} + \dots + \text{۲ لا}^{\text{ن}}\text{جم ن طہ} + \dots$$

(۲) $\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{۱} + \text{۲ لا جم طہ} + \text{لا}^{\text{۲}}\right)$ کو لا کی قوتوں میں پھیلانا جہاں لا ایک سے کم ہے۔ چونکہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{۱} + \text{۲ لا جم طہ} + \text{لا}^{\text{۲}}\right) = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{۱} + \text{لا قو}^{\text{خ طہ}}\right) + \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{۱} + \text{لا قو}^{-\text{خ طہ}}\right)$$

اسلئے بائیں جانب کے ہر لوکارتم کو پھیلانے سے دفعہ ۲۵۰ کا ضابطہ (۹) حاصل ہوتا ہے۔

(۳) $و^{لا}$ جب (ب لا + ج) کو پھیلانے کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں جملہ

$$\frac{1}{۲ خ} \left\{ و^{خ ج} \times و^{(ا + خ ب) لا} - و^{- خ ج} \times و^{(ا - خ ب) لا} \right\}$$

اب اگر ہم $و^{(ا + خ ب) لا}$ ، $و^{(ا - خ ب) لا}$ کو لا کی قوتوں میں پھیلائیں تو $لا^{ن}$

کا سر ملتا ہے

$$\frac{1}{۲ خ} \frac{1}{\lfloor ن} \left\{ و^{خ ج} (ا + خ ب)^{ن} - و^{- خ ج} (ا - خ ب)^{ن} \right\}$$

فرض کرو کہ $\frac{ب}{ا}$ = مس ع تو یہ جملہ ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{۲ خ} \frac{1}{\lfloor ن} (ا^{۲} + ب^{۲})^{\frac{1}{۲} ن} \left\{ و^{خ (ج + ن ع)} - و^{خ (- ج + ن ع)} \right\}$$

یا $\frac{1}{\lfloor ن} (ا^{۲} + ب^{۲})^{\frac{1}{۲} ن}$ جب (ج + ن ع)

پس یہ جملہ مطلوبہ پھیلاؤ میں $لا^{ن}$ کا سر ہے۔

(۴) اگر یہ دیا جائے کہ جب لا = ن جب (لا + ع) تو لا کو ن کی قوتوں میں پھیلاؤ جہاں ن < ۱ ۔

چونکہ $و^{خ لا} - و^{- خ لا} = ن \left\{ و^{خ (لا + ع)} - و^{- خ (لا + ع)} \right\}$

یا $و^{۲ خ لا} - ۱ = ن و^{- خ ع} \left\{ و^{۲ خ (لا + ع)} - ۱ \right\}$

اسلئے $\text{قو}^{2\,\text{خ}\,\text{لا}} = \dfrac{1 - \text{ن}\,\text{قو}^{-\text{خ}\,\text{عہ}}}{1 - \text{ن}\,\text{قو}^{\text{خ}\,\text{عہ}}}$

لوکارتم لینے اور بائیں جانب کو پھیلانے سے

$$2\,\text{خ}\,(\text{لا} + \text{ک}\,\pi) = \text{ن}\,(\text{قو}^{\text{خ}\,\text{عہ}} - \text{قو}^{-\text{خ}\,\text{عہ}}) + \frac{\text{ن}^2}{2}(\text{قو}^{2\,\text{خ}\,\text{عہ}} - \text{قو}^{-2\,\text{خ}\,\text{عہ}}) + \cdots$$

پس $\text{لا} + \text{ک}\,\pi = \text{ن}\,\text{جب}\,\text{عہ} + \frac{1}{2}\,\text{ن}^2\,\text{جب}\,2\,\text{عہ} + \frac{1}{3}\,\text{ن}^3\,\text{جب}\,3\,\text{عہ} + \cdots$

جہاں ک ایک صحیح عدد ہے۔

اگر ب، ایک مثلث کا زاویہ ہو اور ۱ سے کم ہو تو ہم ب کے دائری ناپ کو $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔ چونکہ

$$\text{جب}\,\text{ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{جب}\,(\text{ب} + \text{ج})$$

اسلئے $\text{ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{جب}\,\text{ج} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\,\text{جب}\,2\,\text{ج} + \frac{1}{3}\,\frac{\text{ب}^3}{\text{ا}^3}\,\text{جب}\,3\,\text{ج} + \cdots$

کیونکہ اس صورت میں ک = ۰

پندرھویں باب پر مثالیں

۱- ثابت کرو کہ $\dfrac{1 + \text{ب}\,\text{ی}}{1 - 2\,\text{ی}\,\text{جم}\,\text{فہ} + \text{ی}^2}$ کے پھیلاؤ میں جبکہ اسکو ی کی قوتوں میں پھیلایا جائے عام رقم ہے

$$\frac{\text{جب}\,(\text{ن} + 1)\,\text{فہ} + \text{ب}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{فہ}}{\text{جب}\,\text{فہ}}\,\text{ی}^{\text{ن}}$$

اور (ا + ب ی) / (ا − ۲ ی جم فہ + ی^۲)^۲ کے پھیلاؤ میں عام رقم ہے

[(ن + ۳) جب (ن + ۱) فہ − (ن + ۱) جب (ن + ۳) فہ] / (۴ جب^۳ فہ) ا ی^ن

+ [(ن + ۲) جب ن فہ − ن جب (ن + ۲) فہ] / (۴ جب^۳ فہ) ب ی^ن

(یولر)

(316) ۲ — اگر مس لا = ن جب عہ / (ا − ن جم عہ) تو ثابت کرو کہ

لا = ن جب عہ + ½ ن^۲ جب ۲ عہ + ⅓ ن^۳ جب ۳ عہ + ...

جبکہ ن ایک سے کم ہے۔

۳ — اگر مم ما = مم لا + قم عہ قم لا تو ثابت کرو کہ

ما = جب لا جب عہ − ½ جب ۲ لا جب^۲ عہ + ⅓ جب ۳ لا جب^۳ عہ − ...

۴ — اگر مس ½ طہ = ((ا + ار) / (ا − ار))^½ مس ½ فہ تو ثابت کرو کہ

طہ = فہ + ۲ لہ جب فہ + (۲ لہ^۲ / ۲) جب ۲ فہ + (۲ لہ^۳ / ۳) جب ۳ فہ + ...

جہاں لہ = ار/۲ + (ار/۲)^۳ + ۲ (ار/۲)^۵ + ۵ (ار/۲)^۷ + ...

۵ — اگر مس طہ = لا + مس عہ تو ثابت کرو کہ

طہ = عہ + لا جم^۲ عہ − ½ لا^۲ جم^۲ عہ جب ۲ عہ − ⅓ لا^۳ جم^۳ عہ جم ۳ عہ

+ ¼ لا^۴ جم^۴ عہ جب ۴ عہ + ...

۶ — اگر (۱ + م) مس طہ = (۱ − م) مس فہ جبکہ طہ اور فہ مثبت حادہ زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ

طہ = فہ − م جب ۲ فہ + $\frac{1}{2}$ م^{2} جب ۴ فہ − $\frac{1}{3}$ م^{3} جب ۶ فہ + ...

۷ — اگر مس عہ = جم ۲ سہ مس لہ تو ثابت کرو کہ

لہ − عہ = مس^{2} سہ جب ۲ عہ + $\frac{1}{2}$ مس^{4} سہ جب ۴ عہ + $\frac{1}{3}$ مس^{6} سہ جب ۶ عہ + ...

۸ — اگر جب لا = ن جم (لا + عہ) تو لا کو ن کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

۹ — ثابت کرو کہ (۱ − ۲ لا جم طہ + لا^{2})$^{-ن}$ کے پھیلاؤ میں لا^{پ} کا سر ہے

۲ { ا$_{پ}$ جم پ طہ + ا$_{1}$ ا$_{پ-1}$ جم (پ − ۲) طہ + ا$_{2}$ ا$_{پ-2}$ جم (پ − ۴) طہ + ... }

جہاں ا$_{م}$، (۱ − لا)$^{-ن}$ کے پھیلاؤ میں لا^{م} کا سر ہے۔

۱۰ — ثابت کرو کہ $\pi^{2} = 18 \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{|ن \; |ن}{|2ن+2}$

۱۱ — ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

لوک ج = لوک ا − $\frac{ب}{ا}$ جم ج − $\frac{ب^{2}}{2ا^{2}}$ جم ۲ ج − $\frac{ب^{3}}{3ا^{3}}$ جم ۳ ج − ....

یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ب، ا سے کم ہے۔

۱۲ — اگر مساوات ا لا^{2} + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں خیالی ہوں تو ثابت کرو کہ (ا لا^{2} + ب لا + ج)$^{-1}$ کے پھیلاؤ میں لا^{ن} کا سر ہے

$$\frac{ا^{\frac{ن}{2}} \text{ جب } (ن+1) \text{ طہ}}{ج^{\frac{ن}{2}+1} \text{ جب طہ}}$$

جہاں طہ' مساوات ب قط طہ + ۲ $\sqrt{\text{اج}}$ = ۰ سے حاصل ہوا ہے۔

۱۳ — اگر $\text{پ}^2 = \frac{(۱+\text{ن})^2\ \text{جم}^2\text{طہ} + (۱-\text{ن})^2\ \text{جب}^2\text{طہ}}{(۱+\text{ن})^2\ \text{جم}^2\text{طہ} + (۱-\text{ن})^2\ \text{جب}^2\text{طہ}}$ تو لوگ و پ کو طہ کے جفت ضعفوں کی جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

۱۴ — لوگ و جم (طہ + $\frac{۱}{۴}\pi$) کو طہ کے ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

(317)

۱۵ — ثابت کرو کہ $\frac{\pi}{۴} = \frac{۱۷}{۲۱} - \frac{۷۱۳}{۳۴۳\times ۸۱} + \dots + \frac{(-۱)^{\text{ن}+۱}}{۲\text{ن}-۱}\left\{\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۱}{۹^{\text{ن}-۱}} + \frac{۱}{۷^{۲\text{ن}-۱}}\right\} + \dots\dots$

۱۶ — ثابت کرو کہ $۱ - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۷} - \frac{۱}{۲۳} + \frac{۱}{۲۵} - \dots = \frac{(۱+\sqrt{۲})\pi}{۸}$

۱۷ — $(\sqrt{-۱})^{\sqrt{-۱}}$ کی سب قیمتیں معلوم کرو۔

۱۸ — ثابت کرو کہ (۱ + $\sqrt{-۱}$ مس فہ) لوگ و (قط فہ) - فہ $\sqrt{-۱}$ ایک حقیقی عدد ہے اور اسکی قیمت معلوم کرو۔

۱۹ — اگر ا جم طہ + ب جب طہ = ج جہاں ج > $\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ} = (۲\text{ن}+۱)\frac{\pi}{۲} + \text{خ لوگ و}\ \frac{\text{ج} + \sqrt{\text{ج}^2 - \text{ا}^2 - \text{ب}^2}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}} - \text{مس}^{-۱}\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

۲۰ — لا$^{\text{ن}}$ + ۱ کے اس جملہ سے جو اجزائے ضربی میں ہے یہ اخذ کرو کہ جب ن

جفت ہو تو

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب ن طہ}}{1+\text{جم ن طہ}}=\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب ۲طہ} - 2\,\text{جم}\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جب طہ}}{1+\text{جم ۲طہ}-2\,\text{جم}\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جم طہ}}$$

$$+\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب ۲طہ} - 2\,\text{جم}\frac{3\pi}{\text{ن}}\,\text{جب طہ}}{1+\text{جم ۲طہ}-2\,\text{جم}\frac{3\pi}{\text{ن}}\,\text{جم طہ}}+\ldots\ldots$$

۲۱ — تماثل $\frac{1}{\text{لا}-\text{ا}}-\frac{1}{\text{لا}-\text{ب}}=\frac{\text{ا}-\text{ب}}{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})}$ سے اخذ کرو

$\text{جم}(\text{طہ}+\text{عہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{یہ})-\text{جم}(\text{طہ}+\text{یہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{عہ})=\text{جب}(\text{عہ}-\text{یہ})\,\text{جم ۲طہ}$،

$\text{جب}(\text{طہ}+\text{عہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{یہ})-\text{جب}(\text{طہ}+\text{یہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{عہ})=\text{جب}(\text{عہ}-\text{یہ})\,\text{جب ۲طہ}$

۲۲ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس}^{-1}\text{عہ}}{\text{عہ}}+\frac{\text{مس}^{-1}\text{یہ}}{\text{یہ}}+\frac{\text{مس}^{-1}\text{جہ}}{\text{جہ}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{لوک}\,\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=3\left(1-\frac{1}{7}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{13}-\frac{1}{19}+\frac{1}{25}-\ldots\ldots\right)$$

جہاں عہ، یہ، جہ اکائی کے تین جذر الکعب ہیں۔

۲۳ — اساس ا + ب خ پر ج + د خ کے لوکارثموں کو شکل ا + ب خ میں بیان کرو۔

۲۴ — اگر $\text{مس}^{\text{م}}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\text{یہ}\right)=\text{مس}^{\text{ن}}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\text{فہ}\right)$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{م}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب یہ}}{\text{خ}}=\text{ن}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب فہ}}{\text{خ}}$$

۲۵ — کسی مثلث میں ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ب}+\text{ب}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ا}=\text{ج}^{\text{ن}}-\text{ن ا ب ج}^{\text{ن}-2}\,\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})$$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-3)}{\lfloor 2}\,\text{ا}^2\,\text{ب}^2\,\text{ج}^{\text{ن}-4}\,\text{جم ۲}(\text{ا}-\text{ب})-\ldots\ldots$$

جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۶ ـــ اگر لوکو لوکو لوکو (عہ + خ بہ) = ند + خ ق

تو $\text{و}^{\text{وف جم ق}}$ جم (وف جب ق) = ۲/۲ لوکو (عہ۲ + بہ۲)،

اور $\text{و}^{\text{وف جب ق}}$ × جب (وف جب ق) = مس⁻¹ بہ/عہ

۲۷ ـــ اگر وٗ جم لا کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ (318)

لاٗ کا سر ۲^{ن/۲} / [ن جم (ن π/۴) ہے۔

۲۸ ـــ ثابت کرو کہ

۱/(۱ + نو جم طہ)۲ = قط۳ ۲ لہ + ... + (-۱)ن ۲ قط۳ ۲ لہ مس لہ (۱ + ن جم ۲ لہ) جم ن طہ + ...

جہاں ۲ لہ، جب⁻¹ نو کی کم سے کم مثبت قیمت ہے۔

۲۹ ـــ ثابت کرو کہ سلسلہ

۱/(۱ × ۳ × ۵ ... (۲م + ۱)) − ۱/(۳ × ۵ × ۷ ... (۲م + ۳)) + ... ∞ تک

کو شکل (ام π + بم)/جم میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں ام، بم، جم صحیح عدد ہیں اور

ام = ۱ × ۳ × ۵ ... (۲م − ۱)،

بم = (۲م − ۱) بم−۱ − ۲ [(م − ۱)، جم = [۲م / ۲م−۲

۳۰ ـــ ثابت کرو کہ

جب^ن طہ جم ن فہ = جب^ن فہ جم ن طہ + ن جب^{ن−۱} فہ جم (ن − ۱) طہ جب (طہ − فہ)

$+ \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}$ جب$^{ن-۲}$ فہ جم (ن-۲) طہ جب^۲ (طہ - فہ) +... + جب^ن (طہ-فہ)

جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۳۱ ــ ثابت کرو کہ متماثلہ

$\sum \frac{\text{جم ۲ عہ}}{\text{جب } \frac{۱}{۲}(\text{عہ - بہ}) \text{ جب } \frac{۱}{۲}(\text{عہ - جہ}) \text{ جب } \frac{۱}{۲}(\text{عہ - ضہ})} = ۸$ جب $\frac{۱}{۲}$ (عہ + بہ + جہ + ضہ)

۳۲ ــ ثابت کرو کہ $۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \ldots = \frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}$

۳۳ ــ مس$^{-۱}$ (جم طہ + خ جب طہ) کو شکل ا + خ ب میں تحویل کرو اور اسلئے ثابت کرو کہ

جم طہ - $\frac{۱}{۳}$ جم ۳ طہ + $\frac{۱}{۵}$ جم ۵ طہ - ..... = $\pm \frac{\pi}{۴}$

جہاں اوپر کی یا نیچے کی علامت لینی چاہئے بموجب اسکے کہ جم طہ مثبت ہے یا منفی

۳۴ ــ ثابت کرو کہ لوک$_و$ (۱ + جم ۲ طہ + خ جب ۲ طہ) کی ایک قیمت

لوک$_و$ (۲ جم طہ) + خ طہ ہے جبکہ طہ، $-\frac{۱}{۲}\pi$ اور $\frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔ گریگوری کا سلسلہ اخذ کرو۔

ثابت کرو کہ جب$^{-۱}$ (جم طہ + خ جب طہ) کی ایک قیمت ہے

جم$^{-۱}$ $\sqrt{\text{جب طہ}}$ + خ لوک$_و$ ($\sqrt{\text{جب طہ}}$ + $\sqrt{\text{۱ + جب طہ}}$)

جبکہ طہ، صفر اور $\frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔

۳۵ ــ سلسلہ $\sum\limits_{۰}^{\infty}$ ا$_ن$ و$^{(۲ن+۱)}$ جب (۲ن + ۱) ہ کا مجموعہ معلوم کرو جہاں

ا$_ن$ = $\frac{۲}{۲ن+۱} - \frac{۱}{۲ن-۱} - \frac{۱}{۲ن+۳}$

(319)

۳۶ — کسی مثلث میں اگر ا < ج تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم ن ا}}{\text{ب}^{\text{ن}}} = \frac{1}{\text{ج}^{\text{ن}}}\left\{1 + \text{ن}\,\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\,\text{جم ب} + \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{\underline{|2}}\,\frac{\text{ا}^2}{\text{ج}^2}\,\text{جم ۲ ب}\right.$$

$$\left. + \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}{\underline{|3}}\,\frac{\text{ا}^3}{\text{ج}^3}\,\text{جم ۳ ب} + \cdots\right\}$$

۳۷ — ثابت کرو کہ

$$(\text{مس}^{-1}\,\text{لا})^2 = \text{لا}^2 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)\text{لا}^4 + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\text{لا}^6 - \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{\text{ن}-1}}{\text{ن}}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\text{ن}-1}\right)\text{لا}^{2\text{ن}} + \cdots$$

جہاں لا، ±۱ کے درمیان واقع ہے۔

۳۸ — اگر $\text{ع} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{مس}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,\text{لا}\right) = \text{لا} + \frac{1}{\underline{|3}}\,\text{لا}^3 + \frac{1}{\underline{|5}}\,\text{لا}^5 + \cdots$

تو ثابت کرو کہ $\text{لا} = \text{ع} - \frac{1}{\underline{|3}}\,\text{ع}^3 + \frac{1}{\underline{|5}}\,\text{ع}^5 - \cdots\cdots$

۳۹ — $\text{مس}\left\{\text{خرج}\ \text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\text{ا} - \text{خر ب}}{\text{ا} + \text{خر ب}}\right\}$ کو منطق بناؤ۔

۴۰ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم لا}}{\underline{|\text{ن}-1}\ \underline{|\text{ن}+1}} + \frac{\text{جم ۲ لا}}{\underline{|\text{ن}-2}\ \underline{|\text{ن}+2}} + \cdots + \frac{\text{جم ن لا}}{\underline{|2\text{ن}}}$$

$$= \frac{2^{\text{ن}-1}(1+\text{جم لا})^{\text{ن}}}{\underline{|2\text{ن}}} - \frac{1}{2(\underline{|\text{ن}})^2}$$

۴۱ — اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہو اور

س = ۱ + ن جم^۲ طہ + ... + (ن + ر − ۲ ⌐) / (ن − ۱ ⌐ ر − ۱ ⌐) جم^(ر−۱) طہ جم (ر − ۱) طہ + ...

تو ثابت کرو کہ

۲ س جب^ن طہ = {۱ + (−۱)^ن} (ر − ۱)^(ن/۲) جم ن طہ + {۱ − (−۱)^ن} (−۱)^((ن−۱)/۲) جب ن طہ

۴۲ ۔ ثابت کرو کہ مس مس مس ... مس لا (ن مماسوں تک) کا پھیلاؤ ہے

لا + ۲ ن لا^۳/۳⌐ + ۴ ن (۵ ن − ۱) لا^۵/۵⌐ + ۸ ن/۳ (۱۷۵ ن^۲ − ۴۸ ن + ۱۱) لا^۷/۷⌐ + ...

۴۳ ۔ اگر مس (۱/۴ عہ − فہ) = مس^۳ ۱/۴ عہ تو ثابت کرو کہ

فہ = ۱/(۱ × ۳) جب عہ − ۱/(۲ × ۳^۲) جب ۲ عہ + ۱/(۳ × ۳^۳) جب ۳ عہ − ....

۴۴ ۔ اگر مس طہ < ۱ تو ثابت کرو کہ

مس^۲ طہ − ۱/۲ مس^۴ طہ + ۱/۳ مس^۶ طہ − .... = جب^۲ طہ + ۱/۲ جب^۴ طہ + ۱/۳ جب^۶ طہ + ...

۴۵ ۔ ثابت کرو کہ

۱ + ن (ن − ۱) (ن − ۲) / ۳⌐ + ن (ن − ۱) (ن − ۲) (ن − ۳) (ن − ۴) (ن − ۵) / ۶⌐ + ...

= ۱/۳ {۲^ن + (−۱)^ن × ۲ جم (ن π / ۳)}

۴۶ ۔ ثابت کرو کہ مساواتیں

لا^۲ جب ۲ عہ + ما^۲ جب ۲ بہ + ی^۲ جب ۲ جہ − ۲ ما ی جب (بہ + جہ) − ۲ ی لا جب (جہ + عہ)
− ۲ لا ما جب (عہ + بہ) = ۰،

لا^۲ جم ۲ عہ + ما^۲ جم ۲ بہ + ی^۲ جم ۲ جہ − ۲ ما ی جم (بہ + جہ) − ۲ ی لا جم (جہ + عہ)
− ۲ لا ما جم (عہ + بہ) = ۰،

حسب ذیل قیمتوں کے جفتوں میں سے کسی سے پوری ہوتی ہیں :-

لا : ما : ی = جب۲ ½ (بہ - جہ) : جب۲ ½ (جہ - عہ) : جب۲ ½ (عہ - بہ)،

یا = جب۲ ½ (بہ - جہ) : جم۲ ½ (جہ - عہ) : جم۲ ½ (عہ - بہ)،

یا = جم۲ ½ (بہ - جہ) : جب۲ ½ (جہ - عہ) : جم۲ ½ (عہ - بہ)،

یا = جم۲ ½ (بہ - جہ) : جم۲ ½ (جہ - عہ) : جب۲ ½ (عہ - بہ)

(320) ۴۷ — اگر طہ کی مختلف قیمتیں طہ۱، طہ۲، طہ۳، طہ۴ ہوں جو مساوات

ا جم ۲ طہ + ب جب ۲ طہ + ج جم طہ + د جب طہ + ع = ۰

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ا}}{\text{جم س}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب س}} = \frac{-\text{ج}}{\Sigma\ \text{جم (س - طہ)}} = \frac{-\text{د}}{\Sigma\ \text{جب (س - طہ)}} = \frac{\text{ع}}{\Sigma\ \text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{طہ}_1 + \text{طہ}_2 - \text{طہ}_3 - \text{طہ}_4)}$$

جہاں ۲ س = طہ۱ + طہ۲ + طہ۳ + طہ۴

۴۸ — ثابت کرو کہ

$(-1)^{\frac{1}{2}\text{ن}}$ مس^ن طہ = ۱ - ن قط طہ جم طہ + $\frac{\text{ن(ن - ۲)}}{\lfloor 2}$ قط۲ طہ جم ۲ طہ - ...، (ن جفت)

$(-1)^{\frac{1}{2}(\text{ن} - 1)}$ مس^ن طہ = ن قط طہ جب طہ - $\frac{\text{ن(ن - ۱)}}{\lfloor 2}$ قط۲ طہ جب ۲ طہ + ...، (ن طاق)

۴۹ — اگر جب⁻¹ لا = ا۱ لا + ا۳ لا۳ + ... تو ثابت کرو کہ سلسلہ

ا۳ لا۳ + ا۹ لا۹ + ا۱۵ لا۱۵ + ...

کا مجموعہ ⅓ { جم⁻¹ (ما $\sqrt{1 + \text{لا}^2 + \text{لا}^4} - \text{لا}^2$) + جب⁻¹ لا } ہے۔

۵۰ — اگر مساوات لا^ن + ب۱ لا^(ن-۱) + ب۲ لا^(ن-۲) + ... + ب_ن = ۰ کی ن اصلیں عہ، بہ، جہ، ..... ہوں تو ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ (عہ جب طہ)/(عہ جم طہ - لا) + مس$^{-1}$ (بہ جب طہ)/(بہ جم طہ - لا) + ...

= مس$^{-1}$ (ب۱ جب طہ × لا$^{ن-۱}$ + ب۲ جب ۲ طہ × لا$^{ن-۲}$ + ... + بن جب ن طہ)/(لا^{ن} + ب۱ جم طہ × لا$^{ن-۱}$ + ب۲ جم ۲ طہ × لا$^{ن-۲}$ + ... + بن جم ن طہ)

۵۱ — اگر (۱ - ج) مس طہ = (۱ + ج) مس فہ تو سلسلوں

ج جب ۲ طہ - $\frac{1}{2}$ ج^{2} جب ۴ طہ + $\frac{1}{3}$ ج^{3} جب ۶ طہ - ....

ج جب ۲ فہ + $\frac{1}{2}$ ج^{2} جب ۴ فہ + $\frac{1}{3}$ ج^{3} جب ۶ فہ + ...

میں سے ہر ایک طہ - فہ کے مساوی ہے جہاں طہ اور فہ ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں اور ج < ۱ ۔

۵۲ — ثابت کرو کہ

جم $\frac{1}{3}$ π + $\frac{1}{2}$ جم $\frac{2}{3}$ π + $\frac{1}{3}$ جم $\frac{3}{3}$ π + ... ∞ تک = ۰

۵۳ — ثابت کرو کہ سلسلہ

جم لا + $\frac{1}{2\times3}$ جم ۳ لا + $\frac{1\times3}{2\times4\times5}$ جم ۵ لا + $\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6\times7}$ جم ۷ لا + ...

حسب ذیل قیمتیں اختیار کرتا ہے

(۱) جب$^{-1}$ (جم $\frac{1}{2}$ لا - جب $\frac{1}{2}$ لا) جبکہ π > لا > ۰ ۔

(۲) - جب$^{-1}$ (جم $\frac{1}{2}$ لا + جب $\frac{1}{2}$ لا) جبکہ ۲π > لا > π

۵۴ — اگر ج = جم^{2} طہ - $\frac{1}{3}$ جم^{3} طہ جم ۳ طہ + $\frac{1}{5}$ جم^{5} طہ جم ۵ طہ - ....

تو ثابت کرو کہ مس ۲ ج = ۲ مم^{2} طہ

۵۵ — ثابت کرو کہ

تو$^{عہ جم بہ}$ جب (عہ جب بہ) + تو$^{عہ جم ۲ بہ}$ جب (عہ جب ۲ بہ) + ... تو$^{عہ جم (ن-۱) بہ}$ جب {عہ جب (ن - ۱) بہ} = ۰

اگر بہ = ۲π \ ن ۔

(321)

۵۶ — ثابت کرو کہ

جب طہ × جب طہ − $\frac{1}{2}$ جب ۲طہ جب^{2} طہ + $\frac{1}{3}$ جب ۳طہ جب^{3} طہ − ...

= مم$^{-1}$ (۱ + مم طہ + مم^{2} طہ)

۵۷ — ثابت کرو کہ

لوک (قم لا) = ۲ (جم^{2} لا − $\frac{1}{2}$ جب^{2} ۲لا + $\frac{1}{3}$ جم^{2} ۳لا − $\frac{1}{4}$ جب^{2} ۴لا + ...)

۵۸ — ثابت کرو کہ

جم$^{-1}$ (۱ − لا) = $\sqrt{۲لا}$ {۱ + $\frac{1}{3}$ × $\frac{1}{2}$ ($\frac{لا}{۲}$) + ... + $\frac{1}{۲ن+۱}$ $\frac{۱×۳×۵ ... (۲ن−۱)}{۲×۴×۶ ... ۲ن}$ $(\frac{لا}{۲})^{ن}$

+ .... }

۵۹ — ثابت کرو کہ سلسلہ

۱ − $\frac{1}{2}$ جم طہ + $\frac{۱×۳}{۲×۴}$ جم ۲طہ − $\frac{۱×۳×۵}{۲×۴×۶}$ جم ۳طہ + ... کا مجموعہ $\frac{جم \frac{1}{2} طہ}{\sqrt{۲ جم \frac{1}{2} طہ}}$

ہے جہاں طہ، ± π کے درمیان واقع ہے۔

امثلہ ذیل کے لاتناہی سلسلوں کا مجموعہ معلوم کرو:۔

۶۰۔ جم طہ − $\frac{1}{3}$ جم ۳طہ + $\frac{1}{5}$ جم ۵طہ − ......

۶۱۔ ۱ − $\frac{جم ۲طہ}{|۲}$ + $\frac{جم ۴طہ}{|۴}$ − ....

۶۲۔ جم طہ + $\frac{قم طہ}{|۱}$ جم ۲طہ + $\frac{قم^{2} طہ}{|۲}$ جم ۳عہ + ...

۶۳۔ جم طہ جم ۲طہ + جم ۲طہ جم ۳طہ + $\frac{1}{|۲}$ جم ۳طہ جم ۴طہ

+ $\frac{1}{|۳}$ جم ۴طہ جم ۵طہ + ...

۶۴۔ جب طہ − (١/[۳) جب ۳ طہ + (١/[۵) جب ۵ طہ − ......

۶۵۔ جم طہ/(۳×۲×۱) + جم ۲ طہ/(۴×۳×۲) + جم ۳ طہ/(۵×۴×۳) + ...

۶۶۔ جم عہ + جم(عہ + ۲ بہ)/[۳ + جم(عہ + ۴ بہ)/[۵ + ...

۶۷۔ جم طہ جم فہ − (١/۲) جم ۲ طہ جم ۲ فہ + (١/۳) جم ۳ طہ جم ۳ فہ − ....

۶۸۔ مس عہ جب ۲ لا + مس² عہ جب ۳ لا/[۲ + مس³ عہ جب ۴ لا/[۳ + ...

۶۹۔ ١ + فو^(جم طہ) جم(جب طہ) + فو^(۲ جم طہ)/[۲ جم(۲ جب طہ) + فو^(۳ جم عہ)/[۳ جم(۳ جب طہ) + ...

۷۰۔ جب طہ × جب طہ − (١/۲) جب² طہ × جب ۲ طہ + (١/۳) جب³ طہ × جب ۳ طہ − .....

۷۱۔ م جب² عہ − (١/۲) م² جب² ۲ عہ + (١/۳) م³ جب² ۳ عہ − ....؛ جہاں م < ١۔

(322)

سولھواں باب

زائدی تفاعلات

۲۵۸ — زائدی جیب التمام، جیب، مماس، ... کی تعریف پندرھویں باب میں مساواتوں

جمز ع = ½ (قو^ع + قو^-ع)، جبز ع = ½ (قو^ع - قو^-ع)، مسز ع = جبز ع \ جمز ع،

ممز ع = ۱ \ مسز ع، قطز ع = ۱ \ جمز ع، قمز ع = ۱ \ جبز ع

کے ذریعہ ہو چکی ہے جہاں قوت نما قو^ع، قو^-ع اپنی صدر قیمتیں رکھتے ہیں۔ یہ زائدی تفاعل، خ ع کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں حسب ذیل مساواتوں کے ذریعہ بیان ہوتے ہیں:—

جمز ع = جم خ ع، جبز ع = - خ جب خ ع، مسز ع = - خ مس خ ع،

ممز ع = خ مم خ ع، قطز ع = قط خ ع، قمز ع = خ قم خ ع

زائدی تفاعلوں کے درمیان رشتے

۲۵۹ — زائدی تفاعلوں کے درمیان حسب ذیل رشتے تعریفوں سے فوراً حاصل ہوتے ہیں:—

جمز^۲ ع - جبز^۲ ع = ۱، ....(۱)

$$قطز^{۲}غ + مسز^{۲}غ = ۱،\ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (۲)$$

$$ممز^{۲}غ + قمز^{۲}غ = ۱،\ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (۳)$$

یہ رشتے دائری تفاعلوں کے درمیان حسب ذیل رشتوں

$$جم^{۲}طہ + جب^{۲}طہ = ۱،\ قط^{۲}طہ - مس^{۲}طہ = ۱،\ قم^{۲}طہ - مم^{۲}طہ = ۱$$

کے جواب میں ہیں اور انہیں طہ = خ غ رکھنے سے فوراً اخذ ہوسکتے ہیں
رشتوں (۱)، (۲)، (۳) سے اور زائدی تفاعلوں کی تعریفوں کی مدد
سے کسی بھی زائدی تفاعل کو کسی دوسرے زائدی تفاعل کی رقوم میں
بیان کیا جاسکتا ہے۔ نتائج حسب ذیل جدول میں دئے گئے ہیں۔ (323)

	جبز غ = لا	جمز غ = لا	مسز غ = لا	ممز غ = لا	قطز غ = لا	قمز غ = لا
جبز غ =	لا	$\sqrt{لا^{۲} - ۱}$	$\frac{لا}{\sqrt{۱ - لا^{۲}}}$	$\frac{۱}{\sqrt{لا^{۲} - ۱}}$	$\frac{\sqrt{۱ - لا^{۲}}}{لا}$	$\frac{۱}{لا}$
جمز غ =	$\sqrt{۱ + لا^{۲}}$	لا	$\frac{۱}{\sqrt{۱ - لا^{۲}}}$	$\frac{لا}{\sqrt{لا^{۲} - ۱}}$	$\frac{۱}{لا}$	$\frac{\sqrt{۱ + لا^{۲}}}{لا}$
مسز غ =	$\frac{لا}{\sqrt{۱ + لا^{۲}}}$	$\frac{\sqrt{لا^{۲} - ۱}}{لا}$	لا	$\frac{۱}{لا}$	$\sqrt{۱ - لا^{۲}}$	$\frac{۱}{\sqrt{۱ + لا^{۲}}}$
ممز غ =	$\frac{\sqrt{۱ + لا^{۲}}}{لا}$	$\frac{لا}{\sqrt{لا^{۲} - ۱}}$	$\frac{۱}{لا}$	لا	$\frac{۱}{\sqrt{۱ - لا^{۲}}}$	$\sqrt{۱ + لا^{۲}}$
قطز غ =	$\frac{۱}{\sqrt{۱ + لا^{۲}}}$	$\frac{۱}{لا}$	$\sqrt{۱ - لا^{۲}}$	$\frac{\sqrt{لا^{۲} - ۱}}{لا}$	لا	$\frac{لا}{\sqrt{۱ + لا^{۲}}}$
قمز غ =	$\frac{۱}{لا}$	$\frac{۱}{\sqrt{لا^{۲} - ۱}}$	$\frac{\sqrt{۱ - لا^{۲}}}{لا}$	$\sqrt{لا^{۲} - ۱}$	$\frac{لا}{\sqrt{۱ - لا^{۲}}}$	لا

جمع کے ضابطے

۲۶۰ — چونکہ جمز(ع ± و) = جم خ(ع ± و) = جم خ ع جم خ و ∓ جیب خ ع جیب خ و

پس جمز(ع ± و) = جمز ع جمز و ± جبز ع جبز و، ...... (۴)

اسی طرح جبز(ع ± و) = جبز ع جمز و ± جمز ع جبز و، ...... (۵)

یہ زائدی جیب التمام اور جیب کے لئے جمع کے ضابطے ہیں، بلا شبہ انکی تصدیق ان تفاعلوں کی قوت نمائیتوں کو درج کرنے سے ہو سکتی ہے۔

(۴) اور (۵) سے ہم اخذ کرتے ہیں

مسز(ع ± و) = (مسز ع ± مسز و) / (۱ ± مسز ع مسز و)، .... (۶)

ممز(ع ± و) = (ممز ع ممز و ± ۱) / (ممز و ± ممز ع)، .... (۷)

۲۶۱ — چونکہ جبز(ع + و) + جبز(ع − و) = ۲ جبز ع جمز و،

جبز(ع + و) − جبز(ع − و) = ۲ جمز ع جبز و،

جمز(ع + و) + جمز(ع − و) = ۲ جمز ع جمز و،

اور جمز(ع + و) − جمز(ع − و) = ۲ جبز ع جبز و،

اسلئے ع، و کو علی الترتیب $\frac{1}{2}$(ع + و)، $\frac{1}{2}$(ع − و) میں بدلنے سے (324) حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

جبز ع + جبز و = ۲ جبز $\frac{1}{2}$(ع + و) جمز $\frac{1}{2}$(ع − و)،

جبز ع − جبز و = ۲ جمز $\frac{1}{2}$(ع + و) جبز $\frac{1}{2}$(ع − و)،

جمز ع + جمز و = ۲ جمز $\frac{1}{2}$(ع + و) جمز $\frac{1}{2}$(ع − و)،

جمز ع − جمز و = ۲ جبز $\frac{1}{2}$(ع + و) جبز $\frac{1}{2}$(ع − و) ...... (۸)

یہ ضابطے دو زائدی جیوب یا جیوب التمام کو جمع کرنے یا تفریق کرنے کے لئے ہیں۔

ضِعفوں یا تحت ضِعفوں کیلئے ضابطے

۲۶۲ — دائری تفاعلوں کے ضابطوں کے جواب میں ضِعفوں یا تحت ضِعفوں کے زائدی تفاعلوں کے درمیان مماثل رشتے، ضابطوں (۴) (۵) (۶)، اور (۸) سے اخذ کئے جا سکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{جبز}\ ۲\text{ء} = ۲\ \text{جبز ء} \cdot \text{جمز ء}\text{،}$$

$$\text{جمز}\ ۲\text{ء} = \text{جمز}^{۲}\text{ء} + \text{جبز}^{۲}\text{ء} = ۲\ \text{جمز}^{۲}\text{ء} - ۱ = ۱ + ۲\ \text{جبز}^{۲}\text{ء}\text{،}$$

$$\text{مسز}\ ۲\text{ء} = \frac{۲\ \text{مسز ء}}{۱ + \text{مسز}^{۲}\text{ء}}\text{،}\quad \text{جبز}\ ۳\text{ء} = ۳\ \text{جبز ء} + ۴\ \text{جبز}^{۳}\text{ء}\text{،}$$

$$\text{جمز}\ ۳\text{ء} = ۴\ \text{جمز}^{۳}\text{ء} - ۳\ \text{جمز ء}\text{،}$$

$$\text{مسز}\ ۳\text{ء} = \frac{۳\ \text{مسز ء} + \text{مسز}^{۳}\text{ء}}{۱ + ۳\ \text{مسز}^{۲}\text{ء}}\text{،}\quad \text{جمز}\ \tfrac{۱}{۲}\text{ء} = \sqrt{\frac{۱ + \text{جمز ء}}{۲}}\text{،}$$

$$\text{جبز}\ \tfrac{۱}{۲}\text{ء} = \sqrt{\frac{\text{جمز ء} - ۱}{۲}}\text{،}\quad \text{مسز}\ \tfrac{۱}{۲}\text{ء} = \sqrt{\frac{\text{جمز ء} - ۱}{\text{جمز ء} + ۱}} = \frac{\text{جبز ء}}{۱ + \text{جمز ء}}$$

زائدی تفاعلوں کے لئے سلسلے

۲۶۳ — چونکہ $\text{قو}^{\text{ء}} = \text{جمز ء} + \text{جبز ء}$، $\text{قو}^{-\text{ء}} = \text{جمز ء} - \text{جبز ء}$
اس لئے جمز ء، جبز ء کے لئے سلسلے، ء کی قوتوں میں، یہ ہیں

$$\text{جمز ء} = ۱ + \frac{\text{ء}^{۲}}{۲!} + \frac{\text{ء}^{۴}}{۴!} + \dots\text{،}\quad \text{جبز ء} = \text{ء} + \frac{\text{ء}^{۳}}{۳!} + \frac{\text{ء}^{۵}}{۵!} + \dots$$

دفعہ ۲۴۳ کے مطابق ہم دیکھتے ہیں کہ جمز ء = ۱ + ب، جبز ء = ء + س

(335)

جہاں

$$|\text{ب}| < \frac{1}{2}|\text{ع}|^{2}\,\text{نو}^{|\text{ع}|}\,،\quad |\text{س}| < \frac{1}{6}|\text{ع}|^{3}\,\text{نو}^{|\text{ع}|}$$

نیز $(\text{جمز}\,\text{ع} \pm \text{جبز}\,\text{ع})^{\text{م}}$ کی صدر قیمت ہمیشہ ہے

$$\text{جمز}\,\text{م}\,\text{ع} \pm \text{جبز}\,\text{م}\,\text{ع}$$

خواہ م کچھ ہی ہو، یہ دائری تفاعلوں کے لئے ڈیموائر کے مسئلہ کا جواب ہے۔ ہم اس مسئلہ کو بیان کر سکتے ہیں اس طرح

$$\text{جمز}\,\text{م}\,\text{ع} = \frac{1}{2}\left\{(\text{جمز}\,\text{ع}+\text{جبز}\,\text{ع})^{\text{م}} + (\text{جمز}\,\text{ع}-\text{جبز}\,\text{ع})^{\text{م}}\right\}،$$

$$\text{جبز}\,\text{م}\,\text{ع} = \frac{1}{2}\left\{(\text{جمز}\,\text{ع}+\text{جبز}\,\text{ع})^{\text{م}} - (\text{جمز}\,\text{ع}-\text{جبز}\,\text{ع})^{\text{م}}\right\}$$

۲۶۴ — ان آخری جملوں سے پھیلاؤ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جبز}\,\text{م}\,\text{ع} = \text{م}\,\text{جمز}^{\text{م}-1}\text{ع}\,\text{جبز}\,\text{ع} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{\lfloor 3}\,\text{جمز}^{\text{م}-3}\text{ع}\,\text{جبز}^{3}\text{ع} + \ldots،$$

$$\text{جمز}\,\text{م}\,\text{ع} = \text{جمز}^{\text{م}}\text{ع} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{\lfloor 2}\,\text{جمز}^{\text{م}-2}\text{ع}\,\text{جبز}^{2}\text{ع} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)(\text{م}-3)}{\lfloor 4}\,\text{جمز}^{\text{م}-4}\text{ع}$$
$$\times\,\text{جبز}^{4}\text{ع} + \ldots\ldots$$

دائری تفاعلوں کی صورت کی مانند ان سلسلوں سے جبز م ع، جمز م ع کے پھیلاؤ، جبز ع کی قوتوں میں حاصل کئے جا سکتے ہیں: لیکن مختلف سروں کو اکٹھا کرنے کے کام کو دہرانا غیر ضروری ہے کیونکہ ہم دفعہ ۲۱۴، چودھویں باب کے ضابطہ میں طہ کی بجائے خ ع درج کر کے نتیجہ کو فوراً حاصل کر سکتے ہیں۔ چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\text{جبز}\,\text{م}\,\text{ع} = \text{م}\,\text{جبز}\,\text{ع} + \frac{\text{م}(\text{م}^{2}-1^{2})}{\lfloor 3}\,\text{جبز}^{3}\text{ع} + \frac{\text{م}(\text{م}^{2}-1^{2})(\text{م}^{2}-3^{2})}{\lfloor 5}\,\text{جبز}^{5}\text{ع} + \ldots،$$

$$\text{جمزم}\,\text{ء} = 1 + \frac{\text{م}^2}{\lfloor 2} \text{جمز}^2\text{ء} + \frac{\text{م}^2(\text{م}^2 - 2^2)}{\lfloor 4} \text{جمز}^4\text{ء} + \cdots$$

یہ سلسلے م کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں بشرطیکہ وہ مستدق ہوں جو ہو جائیں گے اگر جبز ء ≥ ۱۔ اگر جبز ء = ۱ رکھا جائے تو

$$\text{ء} = \text{لوک}\,(1 + \sqrt{2})$$

۲۶۵ ــ جبزم ء کے سلسلہ سے ء کے لئے ایک سلسلہ جبز ء کی قوتوں میں ماخوذ ہوتا ہے جیساکہ دائری تفاعلوں کی صورت میں ظہ کیلئے اخذ کیا گیا تھا۔ چنانچہ م کی پہلی قوتوں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ء} = \text{جبز}\,\text{ء} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\,\text{جبز}^3\text{ء} + \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \times \frac{1}{5}\,\text{جبز}^5\text{ء} - \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \times \frac{1}{7}\,\text{جبز}^7\text{ء} + \cdots$$

یہ سلسلہ مستدق ہے اگر جبز ء ≥ ۱ یا اگر ء ≥ لوک (۱ + √۲)۔ بالخصوص

$$\text{لوک}\,(1 + \sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \times \frac{1}{5} - \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \times \frac{1}{7} + \cdots$$

(326)

زائدی تفاعلوں کی دوریت

۲۶۶ ــ تفاعلات جمز ء، جبز ء خیالی دور ۲ π خ رکھتے ہیں کیونکہ

$$\text{ق}^{\text{ء}} = \text{ق}^{\text{ء} + 2\pi\text{خ}}$$

پس
$$\text{جمز}\,\text{ء} = \text{جمز}\,(\text{ء} + 2\,\text{خ}\,\pi\,\text{ک})،$$
$$\text{جبز}\,\text{ء} = \text{جبز}\,(\text{ء} + 2\,\text{خ}\,\pi\,\text{ک})،$$

جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ چونکہ $\text{ق}^{\text{ء}+\pi\text{خ}} = -\text{ق}^{\text{ء}}$، $\text{ق}^{-(\text{ء}+\pi\text{خ})} = -\text{ق}^{-\text{ء}}$

اس لئے
$$\text{جمز}\,(\text{ء} + \text{خ}\,\pi) = -\text{جمز}\,\text{ء}،$$
$$\text{جبز}\,(\text{ء} + \text{خ}\,\pi) = -\text{جبز}\,\text{ء}،$$

اس لیے　　مسنز(ع + خ π) = مسنز ع

یا　　مسنز ع کا دَور خ π ہے جو جنز ع، جمز ع کے دَور کا صرف نصف ہے۔ دلیلوں ۰، $\frac{۱}{۲}$ π خ، π خ، $\frac{۳}{۲}$ π خ کے جواب میں جنز ع، جمز ع، مسنز ع کی حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں:

	۰	$\frac{۱}{۲}$ π خ	π خ	$\frac{۳}{۲}$ π خ
جنز	۰	خ	۰	- خ
جمز	۱	۰	-۱	۰
مسنز	۰	∞ × خ	۰	∞ × خ
ممنز	∞	۰	∞	۰
قطز	۱	∞	-۱	∞
قمنز	∞	- خ	∞	خ

جس طرح دائری تفاعل حقیقی دَور کے سادہ ترین یک دَوری تفاعل ہیں عین اسی طرح زائدی تفاعل خیالی دَور کے سادہ ترین یک دَوری تفاعل ہیں۔

قائم الزاویہ قطع زائد کے قطاع کا رقبہ

۲۶۷۔ فرض کرو کہ نیم قاطع محور ا اور مرکز و کے ایک قائم الزاویہ زائد پر کوئی نقطہ ق ہے اور فرض کرو کہ ق کا معیّن ق ل ہے تب قائم الزاویہ زائد کی خاصیت کی رو سے و ل² - ق ل² = ا²، اب اگر ہم فرض کریں و ل = ا جمز ع تو ل ق = ا جنز ع جہاں ہم ع کو مثبت یا منفی لیتے ہیں بموجب اس کے کہ معیّن ل ق مثبت یا منفی طور پر ناپا گیا ہو۔ اب ہم رقبہ ا ق پر غور کرتے ہیں جو و ا، و ق، اور منحنی کی قوس ا ق سے محدود ہے۔ دائری قطاع کی صورت کے مطابق جو دفعہ ۱۲ میں زیر بحث آچکی ہے ہم قوس ا ق میں ایک کھلا مستقیم الاضلاع

کثیر الاضلاع اب اپ$_1$پ$_2$..... پ$_ر$..... پ$_{ن-1}$ ق بناتے ہیں اور رقبہ و ا ق کے ناپ کی تعریف جو و ا، و ق اور قوس ا ق سے محدود ہے اس طرح کرتے ہیں کہ وہ بند کثیر الاضلاع و ا پ$_1$ پ$_2$... پ$_{ن-1}$ ق و کے رقبہ کے ناپ کی انتہا ہے بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہو جبکہ اندرونی کثیر الاضلاع (327) کے ضلعوں کی تعداد غیر معیّن طور پر اس طرح بڑھائی جائے کہ بڑے سے بڑے ضلع کی انتہا صفر کی طرف مستدق ہو بشرطیکہ یہ انتہا، مقررہ شرط کے تحت کثیر الاضلاعوں کے تمام تواتروں کے لئے ایک یگانہ قیمت رکھے۔ فرض کرو کہ نقطہ پ$_ر$ کے جواب میں ع کی قیمت ع$_ر$ ہے اور فرض کرو کہ زاویہ پ$_ر$ و ا کے دائری ناپ کو طہ$_ر$ تعبیر کرتا ہے، فرض کرو کہ نقطہ ق کے جواب میں یہ مقداریں ع اور طہ ہیں۔

مس طہ$_ر$ = مسز ع$_ر$، اسلئے

جب طہ$_ر$ = $\frac{\text{جبز ع}_ر}{(\text{جمز ۲ ع}_ر)^{\frac{1}{2}}}$ ، اور جم طہ$_ر$ = $\frac{\text{جمز ع}_ر}{(\text{جمز ۲ ع}_ر)^{\frac{1}{2}}}$

ان قیمتوں سے اور جب طہ $_{\text{ر}+1}$، جم طہ $_{\text{ر}+1}$ کی متناظر قیمتوں سے ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$\text{جب}\,(\text{طہ}_{\text{ر}+1}-\text{طہ}_{\text{ر}})=\frac{\text{جبز}\,(\text{ع}_{\text{ر}+1}-\text{ع}_{\text{ر}})}{(\text{جمز}\,2\,\text{ع}_{\text{ر}}\,\text{جمز}\,2\,\text{ع}_{\text{ر}+1})^{\frac{1}{2}}}$$

اب $\text{وپ}_{\text{ر}}=\text{ا}\,(\text{جمز}^2\,\text{ع}_{\text{ر}}+\text{جبز}^2\,\text{ع}_{\text{ر}})^{\frac{1}{2}}=\text{ا}\,\text{جمز}^{\frac{1}{2}}\,2\,\text{ع}_{\text{ر}}$

اور $\text{وپ}_{\text{ر}+1}=\text{ا}\,\text{جمز}^{\frac{1}{2}}\,2\,\text{ع}_{\text{ر}+1}$

اسلئے $\triangle\,\text{وپ}_{\text{ر}}\,\text{پ}_{\text{ر}+1}=\frac{1}{2}\,\text{وپ}_{\text{ر}}\times\text{وپ}_{\text{ر}+1}\,\text{جب}\,(\text{طہ}_{\text{ر}+1}-\text{طہ}_{\text{ر}})$

$$=\frac{1}{2}\,\text{ا}^2\,\text{جبز}\,(\text{ع}_{\text{ر}+1}-\text{ع}_{\text{ر}})$$

پس اُس مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کے رقبہ کا ناپ جو وا، وق اور $\text{اپ}_1\,\text{پ}_2\ldots\text{پ}_{\text{ن}-1}\,\text{ق}$ کے ضلعوں سے محدود ہے یہ ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{ا}^2\times\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1}\text{جبز}\,(\text{ع}_{\text{ر}+1}-\text{ع}_{\text{ر}})$$

جہاں $\text{ع}_0=0$، $\text{ع}_{\text{ن}}=\text{ع}$ -

(328)

یہ ناپ دفعہ ۲۶۳ میں ثابت شدہ مسئلہ کی رو سے

$$\frac{1}{2}\,\text{ا}^2\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1}\left\{(\text{ع}_{\text{ر}+1}-\text{ع}_{\text{ر}})+\text{ل}_{\text{ر}}(\text{ع}_{\text{ر}+1}-\text{ع}_{\text{ر}})^3\,\text{و}^{\text{ع}_{\text{ر}+1}-\text{ع}_{\text{ر}}}\right\}$$

کے مساوی ہے جہاں اعداد $\text{ل}_{\text{ر}}$ سب کے سب $\frac{1}{2}$ سے کم ہیں۔

ضلع $\text{پ}_{\text{ر}}\,\text{پ}_{\text{ر}+1}$ کا طول ہے

$$\text{ا}\left\{(\text{جمز}\,\text{ع}_{\text{ر}+1}-\text{جمز}\,\text{ع}_{\text{ر}})^2+(\text{جبز}\,\text{ع}_{\text{ر}+1}-\text{جبز}\,\text{ع}_{\text{ر}})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

جو $= ۲ ا$ جمز$\tfrac{۱}{۲}$ (ع$_{ر}$ + ع$_{ر+۱}$) جبز $\tfrac{۱}{۲}$ (ع$_{ر+۱}$ − ع$_{ر}$)

نیز ع$_{ر+۱}$ − ع$_{ر}$ > جبز (ع$_{ر+۱}$ − ع$_{ر}$) اسلئے نسبت (ع$_{ر+۱}$ − ع$_{ر}$) \ پ$_{ر}$پ$_{ر+۱}$

> ا$^{-۱}$ جبز$\tfrac{۱}{۲}$ (ع$_{ر+۱}$ − ع$_{ر}$) \ جمز$\tfrac{۱}{۲}$ (ع$_{ر}$ + ع$_{ر+۱}$) > ا$^{-۱}$ جمز $\tfrac{۱}{۲}$ ع

اب چونکہ (ع$_{ر+۱}$ − ع$_{ر}$) \ پ$_{ر}$پ$_{ر+۱}$ ایک مستقل عدد سے جو ر پر اور کسی مخصوص کثیر الاضلاع پر منحصر نہیں ہے کم ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ کثیر الاضلاعوں کے کسی تواتر کے ایک کثیر الاضلاع میں عددوں ع$_{ر+۱}$ − ع$_{ر}$ میں سے بڑے سے بڑا عدد صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جیسے کثیر الاضلاع کا بڑے سے بڑا ضلع صفر کی طرف مستدق ہو۔ اسلئے کثیر الاضلاع میں ہم فرض کرسکتے ہیں

ع$_{ر+۱}$ − ع$_{ر}$ > کہ$_{ن}$

ر کی تمام قیمتوں کے لئے، جہاں کہ$_{ن}$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جیسے ضلعوں کی تعداد غیر معین طور پہ بڑھا دیجاتی ہے۔

اب ہم دیکھتے ہیں کہ مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کے رقبہ کا ناپ

$\tfrac{۱}{۲}$ ا^{۲} $\sum_{ر=۰}^{ن-۱}$ (ع$_{ر+۱}$ − ع$_{ر}$)

یا $\tfrac{۱}{۲}$ ا^{۲} ع

سے اسقدر کم فرق رکھتا ہے جو

$\tfrac{۱}{۱۲}$ ا^{۲} کہ$_{ن}^{۲}$ جو کہ$_{ن}$ $\sum_{ر=۰}^{ن-۱}$ (ع$_{ر+۱}$ − ع$_{ر}$)

یا $\tfrac{۱}{۱۲}$ ا^{۲} کہ$_{ن}^{۲}$ جو کہ$_{ن}$ ع

سے کم ہے اور یہ کہ$_{ن}$ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے پس

یہ ثابت ہو چکا کہ مقررہ شرط کے تحت کسی تواتر کے مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کے ناپ کی یگانہ انتہا ½ ا۲ ع ہے ۔ اسلئے قطاع و ا ق کا رقبہ جو و ا، و ق اور قائم الزاویہ زائدہ کی قوس ا ق سے محدود ہے ½ ا۲ ع ہے ۔
کسی قطاع کا رقبہ جسکے سرے ع، عَ سے تعبیر ہوتے ہیں ضرور ½ ا۲ (ع - عَ) ہے ۔
یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس قائم الزاویہ کی دوسری شاخ پر کے نقطوں کو تعبیر کرنے میں ع کو خ π - ع میں بدلنا چاہیئے کیونکہ

جمز (خ π - ع) = - جمز ع،

اور

جبز (خ π - ع) = جبز ع

۲۶۸ ـــ اگر ہم نصف قطر و ا = ا کا ایک دائرہ کھینچیں اور اس دائرہ پر کوئی نقطہ پ لیں جسکا معیّن م پ ہو[1] تو زاویہ پ و ا کو ط سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے (329)

رقبہ و ا پ = ½ ا۲ ط

فرض کرو کہ پ پر کا مماس پ ن ہے، تب

و م = ا جم ط، م پ = ا جب ط، ن پ = ا س ط، م ا = سہم ط

[1] اس دفعہ کی شکل گرین ہل کے رسالہ موسومہ "A chapter on the Integ. Calculus" میں سے نقل کی گئی ہے

ن سے ن ق، و ا پر عمود اور ن پ کے مساوی کھینچو تب و ن^2 ـ ن ق^2 = ا^2، اِس لئے ق کا طریق نیم محور ا کا ایک قائم الزاویہ قطع زائد ہے۔ اب قطاع و ا ق کے رقبہ کو $\frac{1}{2}$ ا^2 ع سے تعبیر کرو تو حسب ثبوت دفعہ سابق و ن = ا جمز ع، ن ق = ا جنز ع۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ جس طرح دائرہ پر کے کسی نقطہ پ کا معیّن اور فصلہ علی الترتیب ا جب طہ، ا جم طہ سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں $\frac{1}{2}$ ا^2 طہ دائری قطاع و ا پ کا رقبہ ہے عین اسی طرح قائم قطع زائد پر کے نقطہ ق کا معین اور فصلہ علی الترتیب ا جنز ع، ا جمز ع سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں $\frac{1}{2}$ ا^2 ع قطاع و ا ق کا رقبہ ہے۔ اس طرح زائدی جیب اور جیب التمام قائم زائد کے حوالے سے ایسی خاصیت رکھتے ہیں جو دائرہ کے حوالے سے جیب اور جیب التمام کی خاصیت کے بالکل مماثل ہے۔ یہی وجہ ہے کہ قبل الذکر تفاعلوں کو زائدی تفاعل کہا جاتا ہے عین ایسے ہی جیسے کہ بعد الذکر تفاعلوں کو دائری تفاعل کہتے ہیں۔ (330)

۲۶۹۔ دفعہ سابق کی شکل میں جب ہم قائم زائد کے نقطہ ق پر غور کرتے ہیں جو دائرہ کے نقطہ پ کے متناظر ہے تو حاصل ہوتا ہے

ا مس طہ = ن ق = ا جنز ع، اور ا قط طہ = و ن = ا جمز ع،

اسلئے متناظر نقطوں کی دلیلیں طہ، ع، رشتوں مس طہ = جنز ع، قط طہ = جمز ع کو پورا کرتی ہیں۔ اب چونکہ

$$\text{مسنز}\ \tfrac{1}{2}\,ع = \frac{\text{جنز}\ ع}{1 + \text{جمز}\ ع}$$

اسلئے

$$\text{مسنز}\ \tfrac{1}{2}\,ع = \frac{\text{مس طہ}}{1 + \text{قط طہ}} = \frac{\text{جب طہ}}{1 + \text{جم طہ}} = \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طہ}$$

یا دلیلیں طہ اور ع، رشتہ مسنز $\frac{1}{2}$ ع = مس $\frac{1}{2}$ طہ کو پورا کرتی ہیں۔

چونکہ ۵ و ق م > قطاع و ا ق > ۵ و ا ق

اسلئے مسز ع < ع < جتز ع

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $\frac{\text{مسز ع}}{\text{ع}}$ ، $\frac{\text{جتز ع}}{\text{ع}}$ کی انتہائیں جبکہ ع کو لاانتہا گھٹا دیا جائے ہر ایک اکائی ہے کیونکہ جتز ۰ = ۱ ۔

۲۷۰ ـــ چونکہ و^ع = جتز ع + جبز ع

= قط طہ + مس طہ

اسلئے ع = لوک_و (قط طہ + مس طہ)

= لوک_و مس ($\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ طہ)

دلیل طہ کو مختلف نام دئے جا چکے ہیں ، چنانچہ کیلے (Cayley)[1] اس کو ع کا گوڈرمینی (Guder mannian) تفاعل کہتا ہے اور اسے گڈ ع (gd u) سے تعبیر کرتا ہے ، اس طرح طہ = گڈ ع ، ع = گڈ^{-۱} طہ = لوک مس ($\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ طہ) ۔ یہ نام گڈرمن (Gudermann) کے اعزاز میں دیا گیا تھا جس نے اسکو ع کے طول بلد (Longitude) سے موسوم کیا تھا ۔ لیمبرٹ (Lambert) نے طہ کو علوی (Transcendent) زاویہ کہا اور ہویل (Houel)[2] نے ع کا زائدی حیطہ کہا اور لکھا حطز ع (amhu) ۔ صفر درجے سے ۹۰° تک ۔۳۰ کے وقفوں سے طہ کی قیمتوں کے لئے لوک مس ($\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ طہ) کی قیمتوں کی ایک جدول جسمیں یہ قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک دی گئی ہیں لیجنڈر (Legendre) کی کتاب

(Théorie des fonctions Elliptiques, vol. II Table IV.)

میں ملیگی ۔ اس باب کے آخر میں جو جدول ایک درجہ کے وقفوں سے دی گئی ہے اسکو لیجنڈر کی جدول سے پروفیسر کیلے نے اخذ کیا تھا[3] ۔

---

[1] دیکھو (Crelle's journal, 1833.)

[2] دیکھو (Théorie des fonctions complexes)

[3] دیکھو (Quarterly journal, vol. xx.p.220)

(331) اِس جدول سے ء کے زائدی تفاعلوں کی عددی قیمتیں رشتوں

جبز ء = مس طہ ، جمز ء = قط طہ

کے ذریعہ زاویوں کے طبعی ماسوں یا قاطعوں کی جدول استعمال کرکے معلوم کرسکتے ہیں۔

زائدی تفاعلوں اور انکے اطلاقات کے موضوع پر مزید معلومات کی خواہش ہو تو دیکھو لائے سانٹ (Laisant) کا "Essai sur les Fonctions Hyperboiiques" in the Memoires de la Societe des Sciences de Bordeaux, vol. x., اور نیز حسب ذیل مقالات
"Die hyperbolischen Functionen" by E. Heis,
"Die Lehre von den gewohnlichen und verallgemeinerten Hyperbol-funktionen" by Gunther.

ملتف دلیلوں کے دائری تفاعلوں کیلئے جملے

۲۷ـ ملتف دلیل کے دائری تفاعلوں کو زائدی تفاعلوں کی ترقیم استعمال کرکے آسانی کے ساتھ شکل عہ + خ بہ میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں عہ اور بہ حقیقی مقداریں ہیں۔

چنانچہ جب (لا + خ ما) = جب لا جم خ ما + جم لا جب خ ما

اسلئے جب (لا + خ ما) = جب لا جمز ما + خ جم لا جبز ما ...... (۹)

اسی طرح جم (لا + خ ما) = جم لا جمز ما − خ جب لا جبز ما ...... (۱۰)

نیز مس (لا + خ ما) = $\dfrac{\text{جب (لا + خ ما) جم (لا − خ ما)}}{\text{جم (لا + خ ما) جم (لا − خ ما)}}$

= $\dfrac{\text{جب ۲ لا + جب ۲ خ ما}}{\text{جم ۲ لا + جم ۲ خ ما}}$

اسلئے مس (لا + خ ما) = $\dfrac{\text{جب ۲ لا + خ جبز ۲ ما}}{\text{جم ۲ لا + جمز ۲ ما}}$ ...... (۱۱)

مختلف دلیلوں کے مقلوب دائری تفاعل

۲۷۲ — ہم اول تفاعل جب$^{-1}$ (لا + خ ما) پر غور کرینگے۔ فرض کرو
جب$^{-1}$ (لا + خ ما) = عہ + خ بہ، تب

لا + خ ما = جب (عہ + خ بہ) = جب عہ جمز بہ + خ جم عہ جبز بہ

یا لا = جب عہ جمز بہ، ما = جم عہ جبز بہ

اسلئے بہ کو معلوم کرنیکی مساوات ہے

لا^{2} / جمز^{2} بہ + ما^{2} / جبز^{2} بہ = ۱

یا لا^{2} (جمز^{2} بہ − ۱) + ما^{2} جمز^{2} بہ = جمز^{2} بہ (جمز^{2} بہ − ۱)

(332)

اگر ہم جمز^{2} بہ کی یہ دو درجی مساوات حل کریں تو

جمز^{2} بہ = $\frac{1}{2}$ (لا^{2} + ما^{2} + ۱) ± $\frac{1}{2}$ $\sqrt{\text{(لا}^{2}\text{ + ما}^{2}\text{ + ۱)}^{2}\text{ − ۴ لا}^{2}}$

اسلئے جمز بہ = ± $\frac{1}{2}$ $\sqrt{\text{لا}^{2}\text{ + ما}^{2}\text{ + ۲ لا + ۱}}$ ± $\frac{1}{2}$ $\sqrt{\text{لا}^{2}\text{ + ما}^{2}\text{ − ۲ لا + ۱}}$

اور چونکہ جمز بہ مثبت ہے اسلئے

جمز بہ = $\frac{1}{2}$ $\sqrt{\text{(لا + ۱)}^{2}\text{ + ما}^{2}}$ ± $\frac{1}{2}$ $\sqrt{\text{(لا − ۱)}^{2}\text{ + ما}^{2}}$

اگر لا مثبت ہے۔ جمز بہ کی اس قیمت کے جواب میں جب عہ کی قیمت ہے

لا \ جمز بہ یا $\frac{1}{2}$ $\sqrt{\text{(لا + ۱)}^{2}\text{ + ما}^{2}}$ ∓ $\frac{1}{2}$ $\sqrt{\text{(لا − ۱)}^{2}\text{ + ما}^{2}}$

اب چونکہ جمز بہ > ۱ > جب عہ اسلئے

جمز بہ = $\frac{1}{2}$ $\sqrt{\text{(لا + ۱)}^{2}\text{ + ما}^{2}}$ + $\frac{1}{2}$ $\sqrt{\text{(لا − ۱)}^{2}\text{ + ما}^{2}}$ = ع،

جب عہ = $\frac{1}{2}\sqrt{(لا+1)^2+ما^2} - \frac{1}{2}\sqrt{(لا-1)^2+ما^2}$ = و ،

پس جمز بہ، جب عہ کی قیمتیں مندرجہ صدر ہیں خواہ لا مثبت ہو یا منفی۔

دو درجی جمز بہ = ع سے حاصل ہوتا ہے بہ = ± لوک $\{ع + \sqrt{ع^2 - 1}\}$ ،

اسلئے جب$^{-1}$ (لا + خ ما) = ک π + (-۱)^{ک} جب$^{-1}$ و ± خ لوک $\{ع + \sqrt{ع^2 - 1}\}$

جہاں ک ایک صحیح عدد ہے اور جب$^{-1}$ و، عہ کی صدر قیمت ہے

جو اس شرط جب عہ = و کو پورا کرتی ہے۔ مبہم علامت کی تعین کیلئے

رکھو لا = ۰ تو جب$^{-1}$ خ ما = ک π ± خ لوک $(\sqrt{1+ما^2} + ما)$، اسلئے

خ ما = ± جم ک π جب [خ لوک $(\sqrt{1+ما^2} + ما)$]

$$= \pm(-1)^{ک} \frac{1}{2خ}\left\{ما + \sqrt{ما^2+1} - \frac{1}{ما + \sqrt{ما^2+1}}\right\} = \pm(-1)^{ک}\, خ\, ما$$

اسلئے مبہم علامت وہی ہونی چاہئے جو (-۱)^{ک} کی ہے، یا

جب$^{-1}$ (لا + خ ما) = ک π + (-۱)^{ک} جب$^{-1}$ و + (-۱)^{ک} خ لوک $\{ع + \sqrt{ع^2 - 1}\}$ ... (۱۲)

جہاں ع = $\frac{1}{2}\sqrt{(لا+1)^2+ما^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(لا-1)^2+ما^2}$

اور و = $\frac{1}{2}\sqrt{(لا+1)^2+ما^2} - \frac{1}{2}\sqrt{(لا-1)^2+ما^2}$

اگر ہم جب$^{-1}$ و + خ لوک $\{ع + \sqrt{ع^2 - 1}\}$ کو جب$^{-1}$ (لا + خ ما) کی صدر قیمت

خیال کریں اور اِسے جب$^{-1}$ (لا + خ ما) سے تعبیر کریں تو عام قیمت ہے

ک π + (-۱)^{ک} جب$^{-1}$ (لا + خ ما)

جو وہی جملہ ہے جو حقیقی دلیلوں کے لئے حاصل ہوا تھا۔

ایک خاص صورت لا > ۱، ما = ۰ کی ہے، اس صورت میں ع = لا، و = ۱ اور جب^-۱ لا کی صدر قیمت ½ π + خر لوک{لا + √(لا^۲ − ۱)} ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ جب^-۱ لا کی کوئی حقیقی قیمت نہیں ہو سکتی جبکہ لا > ۱۔

(383) **۲۷۳** — ثانیاً فرض کرو کہ جم^-۱ (لا + خر ما) = عہ + خر بہ تو پہلی صورت کی طرح حاصل ہوتا ہے

لا = جم عہ جمز بہ، ما = − جب عہ جبز بہ

اور حسب سابق معلوم ہوتا ہے کہ

جمز بہ = ½ √((لا + ۱)^۲ + ما^۲) + ½ √((لا − ۱)^۲ + ما^۲) = ع،

جم عہ = ½ √((لا + ۱)^۲ + ما^۲) − ½ √((لا − ۱)^۲ + ما^۲) = و،

اس لئے جم^-۱ (لا + خر ما) = ۲ک π ± جم^-۱ و ± خر لوک{ع + √(ع^۲ − ۱)}

آخری رقم کی علامت کی تعیین کے لئے رکھو لا = ۰ تو

خر ما = جم[± ½ π ± خر لوک(ما + √(ما^۲ + ۱))] = ∓ جب{± خر لوک(ما + √(ما^۲ + ۱))} = (∓)(± خر ما)

پس ہم دیکھتے ہیں کہ دوسری مبہم علامت پہلی سے مختلف ہونی چاہئے، یا

جم^-۱ (لا + خر ما) = ۲ک π ± {جم^-۱ و − خر لوک(ع + √(ع^۲ − ۱))} ...(۱۳)

اگر جم^-۱ و − خر لوک(ع + √(ع^۲ − ۱)) سے جم^-۱ (لا + خر ما) کی صدر قیمت تعبیر ہو تو عام قیمت ۲ک π ± جم^-۱ (لا + خر ما) ہے۔

۴۷۲ — فرض کرو کہ $\text{مس}^{-1}(\text{لا} + \text{خ ما}) = \text{عہ} + \text{خ بہ}$، تب

$$\text{لا} + \text{خ ما} = \frac{\text{جب ۲عہ} + \text{خ جبز ۲بہ}}{\text{جم ۲عہ} + \text{جمز ۲بہ}}$$

اسلئے $\text{لا} = \frac{\text{جب ۲عہ}}{\text{جم ۲عہ} + \text{جمز ۲بہ}}$، $\text{ما} = \frac{\text{جبز ۲بہ}}{\text{جم ۲عہ} + \text{جمز ۲بہ}}$،

اسلئے $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \frac{\text{جب}^2\text{ ۲عہ} + \text{جبز}^2\text{ ۲بہ}}{(\text{جم ۲بہ} + \text{جمز ۲بہ})^2} = \frac{\text{جمز}^2\text{ ۲بہ} - \text{جم}^2\text{ ۲عہ}}{(\text{جم ۲عہ} + \text{جمز ۲بہ})^2}$

$$= \frac{\text{جمز ۲بہ} - \text{جم ۲عہ}}{\text{جمز ۲بہ} + \text{جم ۲عہ}}$$

یا $\text{۱} - \text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \frac{\text{۲ جم ۲عہ}}{\text{جمز ۲بہ} + \text{جم ۲عہ}}$،

اور $\text{۱} + \text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \frac{\text{۲ جمز ۲بہ}}{\text{جمز ۲بہ} + \text{جم ۲عہ}}$

اسلئے $\text{مس ۲عہ} = \frac{\text{۲ لا}}{\text{۱} - \text{لا}^2 - \text{ما}^2}$، اور $\text{مسز ۲بہ} = \frac{\text{۲ ما}}{\text{۱} + \text{لا}^2 + \text{ما}^2}$

اب چونکہ $\frac{\text{قو}^{\text{۲بہ}} - \text{قو}^{-\text{۲بہ}}}{\text{قو}^{\text{۲بہ}} + \text{قو}^{-\text{۲بہ}}} = \frac{\text{۲ ما}}{\text{۱} + \text{لا}^2 + \text{ما}^2}$

اسلئے $\text{قو}^{\text{۴بہ}} = \frac{\text{لا}^2 + (\text{ما} + \text{۱})^2}{\text{لا}^2 + (\text{ما} - \text{۱})^2}$

یا $\text{بہ} = \frac{1}{4}\,\text{لوک}\left\{\frac{\text{لا}^2 + (\text{ما} + \text{۱})^2}{\text{لا}^2 + (\text{ما} - \text{۱})^2}\right\}$

اسلئے $\text{مس}^{-1}(\text{لا} + \text{خ ما})$ کی قیمتیں

مس$^{-1}$ (لا + خ ما) = ک π + ½ مس$^{-1}$ $\frac{۲\ \text{لا}}{۱ - \text{لا}^۲ - \text{ما}^۲}$

+ ¼ خ لوک $\left\{ \frac{\text{لا}^۲ + (\text{ما} + ۱)^۲}{\text{لا}^۲ + (\text{ما} - ۱)^۲} \right\}$، ...... (۱۴)

سے ملتی ہیں۔

مقلوب زائدی تفاعل

۲۷۵۔ اگر جبز ع = ی تو ع کو ی کی مقلوب زائدی جیب کہتے ہیں اور اسے جبز$^{-1}$ ی سے ظاہر کرتے ہیں۔ ایسی ہی تعریف جمز$^{-1}$ ی اور مسز$^{-1}$ ی کے لئے ہے۔

(334) اگر ی = جبز ع = - خ جب خ ع تو خ ی = جب خ ع یا ع = $\frac{۱}{خ}$ جب$^{-1}$ (خ ی)

اسی طرح اگر ی = جمز ع = جم خ ع تو ع = $\frac{۱}{خ}$ جم$^{-1}$ ی، نیز اگر ی = مسز ع

تو ع = $\frac{۱}{خ}$ مس$^{-1}$ (خ ی)۔ پس مقلوب زائدی تفاعل مقلوب دائری تفاعلوں کی رقوم میں ان مساواتوں

جبز$^{-1}$ ی = - خ جب$^{-1}$ (خ ی)،

جمز$^{-1}$ ی = - خ جم$^{-1}$ (ی)،

مسز$^{-1}$ ی = - خ مس$^{-1}$ (خ ی)

سے بیان ہو سکتے ہیں۔

۲۷۶۔ ان جملوں کے ذریعہ جو ہم نے ملتف دلیل کے مقلوب دائری تفاعلوں کے لئے معلوم کئے ہیں مقلوب زائدی تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔ لیکن ہم ان کو بلاواسطہ ہی معلوم کریں گے۔

(۱) اگر ی = جبز ع تو و^ع - و$^{-ع}$ = ۲ ی۔ اسکو و^ع کی قیمت

معلوم کرنیکے لئے دو درجی کے طور پر حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{وٴ} = \text{ی} \pm \sqrt{1 + \text{ی}^2}$$

اس لئے $\text{ع} = 2\,\text{خ ک}\,\pi + \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{ی} + \sqrt{1 + \text{ی}^2}\right)$

یا $\text{ع} = 2\,\text{خ ک}\,\pi + \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{ی} - \sqrt{1 + \text{ی}^2}\right)$

ع کی یہ دونوں قیمتیں جملہ $\text{خ ک}\,\pi + (-1)^{\text{ک}}\left(\text{ی} + \sqrt{1 + \text{ی}^2}\right)$ میں شامل ہیں۔

پس جبز^{-1} ی کی عام قیمت $\text{خ ک}\,\pi + (-1)^{\text{ک}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{ی} + \sqrt{1 + \text{ی}^2}\right)$ ہے اور اسکی صدر قیمت $\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{ی} + \sqrt{1 + \text{ی}^2}\right)$ ہے۔ اس صدر قیمت کو بالعموم جبز^{-1} ی سے تعبیر کرتے ہیں۔

(۲) اگر ی = جمز ع تو $\text{و}^{\text{ع}} + \text{و}^{-\text{ع}} = 2\,\text{ی}$، اسلئے

$\text{وٴ} = \text{ی} \pm \sqrt{\text{ی}^2 - 1}$، اس طرح $\text{ع} = 2\,\text{خ ک}\,\pi \pm \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^2 - 1}\right)$

پس جمز^{-1} ی کی عام قیمت $2\,\text{خ ک}\,\pi \pm \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^2 - 1}\right)$ ہے، اسکی صدر قیمت جو بالعموم جمز^{-1} ی سے تعبیر کیجاتی ہے $\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^2 - 1}\right)$ ہے۔

(۳) اگر ی = مسنز ع تو $\dfrac{\text{و}^{2\text{ع}} - 1}{\text{و}^{2\text{ع}} + 1} = \text{ی}$، یا $\text{و}^{2\text{ع}} = \dfrac{1 + \text{ی}}{1 - \text{ی}}$

اسلئے $\text{ع} = \text{خ ک}\,\pi + \frac{1}{2}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\dfrac{1 + \text{ی}}{1 - \text{ی}}\right)$، یہ مسنز^{-1} ی کی عام قیمت ہے اور اسکی صدر قیمت $\frac{1}{2}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\dfrac{1 + \text{ی}}{1 - \text{ی}}\right)$ ہے۔

(۴) اسی طرح ممز$^{-1}$ی، قطز$^{-1}$ی، تمز$^{-1}$ی کی صدر قیمتوں کے لئے علی الترتیب جملے حاصل ہوتے ہیں

$\frac{1}{2}$ لوک$_{و}$ $\left(\frac{ی+1}{ی-1}\right)$، لوک$_{و}$ $\frac{1+\sqrt{1-ی^2}}{ی}$، لوک$_{و}$ $\frac{1+\sqrt{1+ی^2}}{ی}$

کعبی مساواتوں کا حل

(335)

۲۷۷ — دفعہ ۱۷۱ میں یہ دکھایا جاچکا ہے کہ جب کعبی لا^3+ق لا + ر = ۰ کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں اور ق منفی ہو تو اصلیں ہیں

$\sqrt{-\frac{4}{3}ق}$ × جب ط، $\sqrt{-\frac{4}{3}ق}$ × جب(ط + $\frac{2}{3}\pi$)، $\sqrt{-\frac{4}{3}ق}$ × جب(ط + $\frac{4}{3}\pi$)

جہاں، جب ۳ ط = $\left(-\frac{27 ر^2}{4 ق^3}\right)^{\frac{1}{2}}$۔ اب ہم یہ دکھائنگے کہ کعبی کو اس صورت میں کس طرح حل کرنا چاہئے جبکہ اسکی دو اصلیں خیالی ہوں۔ اس صورت میں شرط

$$۲۷ ر^2 + ۴ ق^3 > ۰$$

پوری ہوتی ہے۔

(۱) ق کو مثبت فرض کرو اور کعبی

$$۴ جبز^3 ۶ + ۳ جبز ۶ = جبز ۳ ۶$$

پر غور کرو۔ فرض کرو لا = ا جبز ۶، تب لا اس مساوات

$$لا^3 + \frac{3}{4} ا^2 لا - \frac{1}{4} ا^3 جبز ۳ ۶ = ۰$$

کو پورا کرتا ہے۔ یہ کعبی، کعبی لا^3+ ق لا + ر = ۰ پر منطبق ہوگا اگر

$$ق = \frac{۳}{۴} ل^{۲}،\quad ر = -\frac{۱}{۴} ل^{۳} \text{جبز} ۳ ع،\quad \text{یا جبز} ۳ ع = -۴ \left(\frac{۲۷ ر^{۲}}{۶۴ ق^{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

اب کعبی $۴ \text{ جبز}^{۳} ع + ۳ \text{ جبز} ع = \text{جبز} ۳ ع$ کی اصلیں ہیں

$$\text{جبز} ع،\ \text{جبز}\left(ع + \frac{۲}{۳} \pi خ\right)،\ \text{جبز}\left(ع + \frac{۴}{۳} \pi خ\right)$$

اسلئے کعبی $لا^{۳} + ق\ لا + ر = ۰$ کی اصلیں ہیں

$$\sqrt{\frac{۴}{۳} ق}\ \text{جبز} ع،\ \sqrt{\frac{۴}{۳} ق}\ \text{جبز}\left(ع + \frac{۲}{۳} \pi خ\right)،\ \sqrt{\frac{۴}{۳} ق}\ \text{جبز}\left(ع + \frac{۴}{۳} \pi خ\right)$$

یا

$$\sqrt{\frac{۴}{۳} ق}\ \text{جبز} ع،\ \sqrt{\frac{۱}{۳} ق}\left(-\text{جبز} ع \pm خ \sqrt{۳}\ \text{جمز} ع\right)$$

جہاں $\text{جبز} ۳ ع = -\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲۷ ر^{۲}}{ق^{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ ۔ اگر ق اور ر کی عددی قیمتیں دی گئی ہیں تو عدد ۳ ع کو زائدی جیوب کی جدول سے معلوم کیا جاتا ہے اور پھر انہی جدولوں سے جبز ع، جمز ع معلوم کئے جاتے ہیں۔ پس اس طرح اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔

(۲) اگر ق منفی ہو تو مساوات

$$۴ \text{ جمز}^{۳} ع - ۳ \text{ جمز} ع = \text{جمز} ۳ ع$$

پر غور کرو۔ سابقہ صورت کی طرح یہ معلوم ہوگا کہ اگر $ق = -\frac{۳}{۴} ل^{۲}،$ $ر = -\frac{۱}{۴} ل^{۳} \text{جمز} ۳ ع$ تو وہ کعبی جو $ل \text{ جمز} ع$ سے پورا ہوتا ہے $لا^{۳} + ق\ لا + ر = ۰$ ہے۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ہیں

$$\sqrt{-\frac{۴}{۳} ق}\ \text{جمز} ع،\ \sqrt{-\frac{۴}{۳} ق}\ \text{جمز}\left(ع + \frac{۲}{۳} \pi خ\right)،\ \sqrt{-\frac{۴}{۳} ق}\ \text{جمز}\left(ع + \frac{۴}{۳} \pi خ\right)$$

یا $\sqrt{-\frac{4}{3}ق\,جمزء}$ ، $\sqrt{-\frac{1}{3}ق}\,(-جمزء \pm \sqrt{3}\,جبزء)$

جہاں جمز ۳ء $= -\frac{1}{2}\left(-۲۷\frac{ر^2}{ق^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ۔پس حسب صورت سابقہ ہم کعبی کی اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنیکے لئے جبکہ ق اور ر دیے گئے ہوں زائدی تفاعلوں کی جدولیں استعمال کر سکتے ہیں۔

(336)

۲۷۸ — ط کی دی ہوئی قیمتوں کے جواب میں ع کی قیمتوں کی جدول

ط		ع = لوک$_و$ مس$(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}ط)$	ط		ع = لوک$_و$ مس$(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}ط)$
°۰	٫۰	٫۰	°۱۵	٫۲۶۱۷۹۹۴	٫۲۶۴۸۴۲۲
°۱	٫۰۱۷۴۵۳۳	٫۰۱۷۴۵۴۲	°۱۶	٫۲۷۹۲۵۲۷	٫۲۸۲۹۵۴۵
°۲	٫۰۳۴۹۰۶۶	٫۰۳۴۹۱۳۷	°۱۷	٫۲۹۶۷۰۶۰	٫۳۰۱۱۵۷۷
°۳	٫۰۵۲۳۵۹۹	٫۰۵۲۳۸۳۸	°۱۸	٫۳۱۴۱۵۹۳	٫۳۱۹۴۵۸۳
°۴	٫۰۶۹۸۱۳۲	٫۰۶۹۸۶۹۹	°۱۹	٫۳۳۱۶۱۲۶	٫۳۳۷۸۶۲۹
°۵	٫۰۸۷۲۶۶۵	٫۰۸۷۳۷۷۴	°۲۰	٫۳۴۹۰۶۵۹	٫۳۵۶۳۷۸۵
°۶	٫۱۰۴۷۱۹۸	٫۱۰۴۹۱۱۷	°۲۱	٫۳۶۶۵۱۹۱	٫۳۷۵۰۱۲۱
°۷	٫۱۲۲۱۷۳۰	٫۱۲۲۴۷۸۱	°۲۲	٫۳۸۳۹۷۲۴	٫۳۹۳۷۷۱۰
°۸	٫۱۳۹۶۲۶۳	٫۱۴۰۰۸۲۲	°۲۳	٫۴۰۱۴۲۵۷	٫۴۱۲۶۶۲۶
°۹	٫۱۵۷۰۷۹۶	٫۱۵۷۷۲۹۶	°۲۴	٫۴۱۸۸۷۹۰	٫۴۳۱۶۹۴۷
°۱۰	٫۱۷۴۵۳۲۹	٫۱۷۵۴۲۵۸	°۲۵	٫۴۳۶۳۳۲۳	٫۴۵۰۸۷۵۳
°۱۱	٫۱۹۱۹۸۶۲	٫۱۹۳۱۷۶۶	°۲۶	٫۴۵۳۷۸۵۶	٫۴۷۰۲۱۲۷
°۱۲	٫۲۰۹۴۳۹۵	٫۲۱۰۹۸۶۷	°۲۷	٫۴۷۱۲۳۸۹	٫۴۸۹۷۱۵۴
°۱۳	٫۲۲۶۸۹۲۸	٫۲۲۸۸۶۵۰	°۲۸	٫۴۸۸۶۹۲۲	٫۵۰۹۳۹۲۳
°۱۴	٫۲۴۴۳۴۶۱	٫۲۴۶۸۱۴۵	°۲۹	٫۵۰۶۱۴۵۵	٫۵۲۹۲۵۲۷

ط	طہ	ع = لوکِ مس$_{و}$ $(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}$ط$)$
°۳۰	،۵۲۳۵۹۸۸	،۵۴۹۳۰۶۱
°۳۱	،۵۴۱۰۵۲۱	،۵۶۹۵۶۲۷
°۳۲	،۵۵۸۵۰۵۴	،۵۹۰۰۳۲۹
°۳۳	،۵۷۵۹۵۸۷	،۶۱۰۷۲۷۵
°۳۴	،۵۹۳۴۱۱۹	،۶۳۱۶۵۸۱
°۳۵	،۶۱۰۸۶۵۲	،۶۵۲۸۳۶۶
°۳۶	،۶۲۸۳۱۸۵	،۶۷۴۲۷۵۵
°۳۷	،۶۴۵۷۷۱۸	،۶۹۵۹۸۸۰
°۳۸	،۶۶۳۲۲۵۱	،۷۱۷۹۸۸۰
°۳۹	،۶۸۰۶۷۸۴	،۷۴۰۲۹۰۱
°۴۰	،۶۹۸۱۳۱۷	،۷۶۲۹۰۹۵
°۴۱	،۷۱۵۵۸۵۰	،۷۸۵۸۶۳۰
°۴۲	،۷۳۳۰۳۸۳	،۸۰۹۱۶۷۲
°۴۳	،۷۵۰۴۹۱۶	،۸۳۲۸۴۰۶
°۴۴	،۷۶۷۹۴۴۹	،۸۵۶۹۰۲۶
°۴۵	،۷۸۵۳۹۸۲	،۸۸۱۳۷۳۶
°۴۶	،۸۰۲۸۵۱۵	،۹۰۶۲۷۵۵
°۴۷	،۸۲۰۳۰۴۷	،۹۳۱۶۳۱۶
°۴۸	،۸۳۷۷۵۸۰	،۹۵۷۴۶۶۹
°۴۹	،۸۵۵۲۱۱۳	،۹۸۳۸۰۷۹
°۵۰	،۸۷۲۶۶۴۶	۱،۰۱۰۶۸۳۲
°۵۱	،۸۹۰۱۱۷۹	۱،۰۳۸۱۲۳۵
°۵۲	،۹۰۷۵۷۱۲	۱،۰۶۶۱۶۱۷
°۵۳	،۹۲۵۰۲۴۵	۱،۰۹۴۸۳۳۵
°۵۴	،۹۴۲۴۷۷۸	۱،۱۲۴۱۷۷۲
°۵۵	،۹۵۹۹۳۱۱	۱،۱۵۴۲۳۴۶
°۵۶	،۹۷۷۳۸۴۴	۱،۱۸۵۰۵۰۷
°۵۷	،۹۹۴۸۳۷۷	۱،۲۱۶۶۷۴۸
°۵۸	۱،۰۱۲۲۹۱۰	۱،۲۴۹۱۶۰۶
°۵۹	۱،۰۲۹۷۴۴۳	۱،۲۸۲۵۶۶۸
°۶۰	۱،۰۴۷۱۹۷۶	۱،۳۱۶۹۵۷۹
°۶۱	۱،۰۶۴۶۵۰۸	۱،۳۵۲۴۰۴۸
°۶۲	۱،۰۸۲۱۰۴۱	۱،۳۸۸۹۸۶۰
°۶۳	۱،۰۹۹۵۵۷۴	۱،۴۲۶۷۸۸۲
°۶۴	۱،۱۱۷۰۱۰۷	۱،۴۶۵۹۰۸۳
°۶۵	۱،۱۳۴۴۶۴۰	۱،۵۰۶۴۵۴۲
°۶۶	۱،۱۵۱۹۱۷۳	۱،۵۴۸۵۴۷۲
°۶۷	۱،۱۶۹۳۷۰۶	۱،۵۹۲۳۲۳۷
°۶۸	۱،۱۸۶۸۲۳۹	۱،۶۳۷۹۳۸۷
°۶۹	۱،۲۰۴۲۷۷۲	۱،۶۸۵۵۶۸۵
°۷۰	۱،۲۲۱۷۳۰۵	۱،۷۳۵۴۱۵۲
°۷۱	۱،۲۳۹۱۸۳۸	۱،۷۸۷۷۱۲۰
°۷۲	۱،۲۵۶۶۳۷۱	۱،۸۴۲۷۳۰۰
°۷۳	۱،۲۷۴۰۹۰۴	۱،۹۰۰۷۸۶۷
°۷۴	۱،۲۹۱۵۴۳۶	۱،۹۶۲۲۵۷۲
°۷۵	۱،۳۰۸۹۹۶۹	۲،۰۲۷۵۸۹۴

ط		$ء = لوک_و مس(\frac{۱}{۴}\pi + \frac{۱}{۲}ط)$	ط		$ء = لوک_و مس(\frac{۱}{۴}\pi + \frac{۱}{۲}ط)$
°۷۶	۱،۳۲۶۴۵۰۲	۲،۰۹۷۳۲۴۰	°۸۴	۱،۴۶۶۰۷۶۶	۲،۹۴۸۷۰۰۲
°۷۷	۱،۳۴۳۹۰۳۵	۲،۱۷۲۱۲۱۸	°۸۵	۱،۴۸۳۵۲۹۹	۳،۱۳۱۳۰۱۳
°۷۸	۱،۳۶۱۳۵۶۸	۲،۲۵۲۸۰۲۷	°۸۶	۱،۵۰۰۹۸۳۲	۳،۳۵۴۶۷۳۵
°۷۹	۱،۳۷۸۸۱۰۱	۲،۳۴۰۴۰۰۷	°۸۷	۱،۵۱۸۴۳۶۴	۳،۶۴۲۵۳۳۴
°۸۰	۱،۳۹۶۲۶۳۴	۲،۴۳۶۲۴۶۰	°۸۸	۱،۵۳۵۸۸۹۷	۴،۰۴۸۱۲۵۴
°۸۱	۱،۴۱۳۷۱۶۷	۲،۵۴۲۰۹۰۴	°۸۹	۱،۵۵۳۳۴۳۰	۴،۷۴۱۳۴۸۸
°۸۲	۱،۴۳۱۱۷۰۰	۲،۶۶۰۳۰۶۱	°۹۰	۱،۵۷۰۷۹۶۳	∞
°۸۳	۱،۴۴۸۶۲۳۳	۲،۷۹۴۲۱۹۰			

(337)

سولهویں باب پر مثالیں

۱ — ثابت کرو کہ

۸ جیبز ن لا جبز^{۲} لا = ۲ جبز (ن + ۲) لا − ۴ جبز ن لا + ۲ جبز (ن − ۲) لا

۲ — اگر جم (ع + خ بہ) = جم فہ + خ جب فہ تو ثابت کرو کہ جب فہ = ± جب^{۲} ع
= ± جبز^{۲} بہ

۳ — اگر جم (طہ + خ فہ) جم (ع + خ بہ) = ۱ تو ثابت کرو کہ

مسز^{۲} فہ جمز^{۲} بہ = جب^{۲} ع ، اور مسز^{۲} بہ جمز^{۲} فہ = جب^{۲} طہ

۴ — اگر مس ما = مس ع مسز بہ ، مس ی = مم ع مسز بہ
تو ثابت کرو کہ مس (ما + ی) = جبز ۲ بہ قمز ۲ ع

۵ — فوجب (ع + خ بہ) کو شکل ا + خ ب میں تحویل کرو۔

۶ — اگر لوک و جب (طہ + خ فہ) = عہ + خ بہ

تو ثابت کرو کہ ۲ جم ۲ طہ = ۲ جمز ۲ فہ − ۴ لو عہ

اور جم (طہ − یہ) = $\text{لو}^{۲\,\text{فہ}}$. جم (طہ + یہ)

۷ — اگر مس (لا + خ ما) = جب (ع + خ و)

تو ثابت کرو کہ ممز و جمز ۲ ما = مم ع جب ۲ لا

۸ — $\{\text{جم (طہ + خ فہ) + خ جب (طہ − خ فہ)}\}^{\text{عہ + خ بہ}}$ کو شکل

ا + خ ب میں بیان کرو ۔

۹ — ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{مس ۲ طہ + مسز ۲ فہ}}{\text{مس ۲ طہ − مسز ۲ فہ}}\right) + \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{مس طہ − مسز فہ}}{\text{مس طہ + مسز فہ}}\right) = \text{مس}^{-1}(\text{مم طہ ممز فہ})$$

۱۰ — اگر ع = جم عہ − $\frac{1}{3}$ جم ۳ عہ + $\frac{1}{5}$ جم ۵ عہ − ....،

و = جب عہ − $\frac{1}{3}$ جب ۳ عہ + $\frac{1}{5}$ جب ۵ عہ ...،

تو ثابت کرو کہ ع = $\frac{1}{4}\pi$ جبکہ ۰ ≥ عہ < $\frac{1}{2}\pi$، اور جمز ۲ و = قط عہ

۱۱ — ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ

$$1 + \frac{\text{جم ۴ طہ}}{\lfloor 4} + \frac{\text{جم ۸ طہ}}{\lfloor 8} + \frac{\text{جم ۱۲ طہ}}{\lfloor 12} + \cdots\cdots$$

کا مجموعہ $\frac{1}{2}$ {جم (جم طہ) جمز (جب طہ) + جم (جب طہ) جمز (جم طہ)} ہے۔

۱۲ — ثابت کرو کہ

$$\sum_{\text{ن}=0}^{\text{ن}=\infty} \frac{(-1)^{\text{ن}}}{\lfloor 2\text{ن}} \cdot \frac{\text{جب (۲ م + ۱) ن طہ}}{\text{جب ن طہ}}$$

$$= 2\sum_{\text{پ}=1}^{\text{پ}=\text{م}} \{\text{جم (جم پ طہ) جمز (جب پ طہ)}\} + \text{جم عہ}$$

لا ایک حقیقی عدد ہو مستدق نہیں ہوتا اگر ف $\leqslant$ ۱، لیکن مستدق ہوتا ہے اگر ف $>$ ۱۔ کیونکہ $\Sigma \frac{1}{ن^ف}$ متسع ہے جبکہ ف $\leqslant$ ۱ اور مستدق ہے جبکہ ف $>$ ۱۔

حاصل ضرب $(1 + \frac{ی}{1})(1 + \frac{ی}{2}) \cdots (1 + \frac{ی}{ن}) \cdots$ یقیناً متسع ہے

اگر ی کا حقیقی حصہ مثبت ہو، اور یہ حاصل ضرب مستدق نہیں ہوتا اگر ی کا حقیقی حصہ صفر ہو۔ جب ی کا حقیقی حصہ منفی ہو تو حاصل ضرب صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستدق خیال کیا جاتا ہے۔ کیونکہ

لوک$_و$ $(1 + \frac{ی}{ن}) = \frac{ی}{ن} - \frac{ی^2}{2 ن^2}(1 + ضن)$ جہاں $|ضن|$ ن کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لئے ایک مستقل عدد سے کم ہے، اسلئے Σ لوک$_و(1+\frac{ی}{ن})$ کا حقیقی حصہ $-\infty$ کی طرف متسع ہوتا ہے جبکہ ی کا حقیقی حصہ منفی ہو، پس

اوپر کا نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔ یہ ان واقعات پر مبنی ہے کہ $\Sigma \frac{1}{ن}$ متسع ہے

اور $\Sigma \frac{1}{ن^2}$ مستدق۔

(343)

جیب اور جیب التمام کو لامتناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرنا

۲۸۲ — اب ہم وہ جملے معلوم کرینگے جو جیب اور جیب التمام کو لامتناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرتے ہیں جبکہ زاویہ کا دائری ناپ لا ہو۔ ہم اول لا کو حقیقی اور مثبت لینگے۔

اب

$$\text{جب لا} = 2 \text{ جب } \frac{لا}{2} \text{ جب } \frac{لا + \pi}{2}$$

$$= 2^3 \text{ جب } \frac{لا}{4} \text{ جب } \frac{لا + \pi}{4} \text{ جب } \frac{لا + 2\pi}{4} \text{ جب } \frac{لا + 3\pi}{4}$$

اور اس عمل کو جاری رکھنے سے

$$\text{جب لا} = ۲^{\text{ن}-۱}\ \text{جب}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\ \text{جب}\ \frac{\text{لا}+\pi}{\text{ن}}\ \text{جب}\ \frac{\text{لا}+۲\pi}{\text{ن}} \ldots \text{جب}\ \frac{\text{لا}+(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}$$

جہاں ن، ۲ کی کوئی مثبت صحیح قوت ہے۔ پس

$$\text{جب لا} = ۲^{\text{ن}-۱}\ \text{جب}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\ \text{جم}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \left(\text{جب}^۲ \frac{\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^۲ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)$$

$$\left(\text{جب}^۲ \frac{۲\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^۲ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right) \ldots \left(\text{جب}^۲ \frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)$$

اور چونکہ $\text{نہایۃ}_{\text{لا}=۰}\ \text{جب لا قم}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}} = \text{ن}$، اسلئے

$$\text{ن} = ۲^{\text{ن}-۱}\ \text{جب}^۲ \frac{\pi}{\text{ن}}\ \text{جب}^۲ \frac{۲\pi}{\text{ن}} \ldots \text{جب}^۲ \frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}$$

پس عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب لا}}{\text{ن جب}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\ \text{جم}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}} = \left(۱ - \frac{\text{جب}^۲ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲ \frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲ \frac{۲\pi}{\text{ن}}}\right) \ldots\ldots \left(۱ - \frac{\text{جب}^۲ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲ \frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}}\right)$$

یہ دفعہ ۸۷ کے مسئلہ (۱۹) کی وہ خاص صورت ہے جبکہ ن، ۲ کی ایک قوت ہو۔ بلاشبہ ہم اُس عام مسئلہ کو اختیار کرسکتے تھے۔
فرض کرو $\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲) = \text{ر}$، تب اگر م کوئی عدد ہو ر سے چھوٹا تو

$$\text{جب لا} = \text{ن جب}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\ \text{جم}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \left(۱ - \frac{\text{جب}^۲ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲ \frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲ \frac{۲\pi}{\text{ن}}}\right) \ldots \left(۱ - \frac{\text{جب}^۲ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲ \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right) \text{ب،}$$

کیونکہ عددوں کے کسی جٹ کے مجموعہ کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ سے بڑھ نہیں سکتا۔ اب اگر سلسلہ $\Sigma |ع|$ مستدق ہو تو دفعہ ۲۸۰ میں جو کچھ ثابت ہوا ہے اس کی بموجب لاانتہاہی حاصل ضرب $\Pi (۱ + |ع|)$ مستدق ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی مقررہ عدد ص کے جواب میں ن متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے

$$(۱+|ع_{ن}|)(۱+|ع_{ن+۱}|)\cdots(۱+|ع_{ن+ر}|)-۱ < ص$$

اسلئے ر کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے

$$|(۱+ع_{ن})(۱+ع_{ن+۱})\cdots\cdots(۱+ع_{ن+ر})-۱| < ص$$

اور اسلئے حاصل ضرب $\Pi (۱ + ع)$ مستدق ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ $\Pi (۱ + ع)$ مستدق ہو لیکن سلسلہ $\Sigma |ع|$ منتشر، ایسی صورت میں حاصل ضرب $\Pi (۱ + ع)$ کو نا مطلقاً مستدق یا نیم مستدق کہتے ہیں۔

مسئلہ بالا سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ لاانتہاہی حاصل ضرب

$$(۱ + ل_{۱} ی)(۱ + ل_{۲} ی)\cdots(۱ + ل_{ن} ی)\cdots\cdots$$

مستدق ہے اگر

$$|ل_{۱}|+|ل_{۲}|+\cdots\cdots+|ل_{ن}|+\cdots\cdots$$

ایک مستدق سلسلہ ہو۔

(342) فرض کرو کہ حقیقی عددوں کا ایک تواتر $ب_{۱}، ب_{۲}، \ldots ب_{ن}، \ldots$ ہے جو سب کے سب ہم علامت ہیں اور فرض کرو کہ $نہا_{ن=\infty} ب_{ن} = ۰$،

لیکن فرض کرو کہ سلسلہ

$$ب_{۱} + ب_{۲} + \cdots\cdots + ب_{ن} + \cdots\cdots$$

متسع ہے ۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لامتناہی حاصل ضرب Π (۱ + خ بن)
مستدق نہیں ہے ۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$۱ + خ\, ب_ن = (۱ + ب_ن^۲)^{\frac{۱}{۲}}\, و^{\pm خ ف_ن}$$ جہاں مس فن = ا بن ا

اور ± خ فن میں اوپر کی مثبت علامت لینی چاہئے اگر بن مثبت
ہے اور منفی علامت لینی چاہئے اگر بن منفی ہے ۔ اگر ضہ اختیاری
طور پر منتخب ایک مثبت عدد ایک سے کم ہو تو ن کی تمام کافی طور پر
بڑی قیمتوں کے لئے فن > (۱ - ضہ) مس فن ، اور اس لئے
Σ فن مستدق نہیں ہو سکتا ۔ پس یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ Π (۱+خ بن)
مستدق نہیں ہو سکتا اگرچہ $\Pi (۱ + ب_ن^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ مستدق ہوگا اگر سلسلہ
$\Sigma\, ب_ن^۲$ مستدق ہو ۔ اس مسئلہ کے جواز کے لئے یہ صریحاً کافی ہے کہ
تمام عدد بن سوائے ایک محدود جسٹ کے ہم علامت ہونے چاہئیں

اگر ی ، ملتف عدد لا + خ ما ہو اور عدد ا۱ ، ا۲ ... ان ....
سب کے سب مثبت ہوں اور ایسے ہوں کہ Σ ان متسع ہے تو حاصل ضرب
Π (۱ + ان ی) یقیناً متسع ہے اگر ی کا حقیقی حصہ مثبت ہو ۔ کیونکہ
رقموں ۱ + ان ی کے مقیاسوں کا حاصل ضرب ، حاصل ضرب Π (۱
+ ان لا) سے بڑا ہے اور یہ ثانی الذکر حاصل ضرب متسع ہے جبکہ
لا مثبت ہو ۔

حاصل ضرب $\left(۱ + \frac{لا}{ق_۱}\right)\left(۱ + \frac{لا}{ق_۲}\right) \cdots \left(۱ + \frac{لا}{ق_ن}\right) \cdots$ جبکہ

اگر یہ سلسلہ مستدق ہے تو لامتناہی حاصل ضرب صفر سے مختلف ایک معین انتہا کی طرف مستدق ہوتا ہے، اسکا عکس بھی درست ہے اگر یہ لامتناہی حاصل ضرب صفر کی طرف مستدق ہو تو سلسلہ یا لا-∞ کی طرف منتشر ہوتا ہے اور اس لئے ہم اس صورت کو حسب سابق خارج کرتے ہیں۔

اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ لامتناہی سلسلہ کا استدقاق لامتناہی حاصل ضرب کے استدقاق کے مماثل ہے ہم دیکھتے ہیں کہ سلسلہ کے استدقاق کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ہر صہ کے جواب میں ن منتخب ہو سکے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے

$$|\text{لوک}_{\text{و}}(ی_{ن+۱} + ی_{ن+۲} \ldots ی_{ن+ر})| \text{ یا } |\text{لوک}_{\text{و}}(۱ + غ_{ن،ر})| < \text{صہ}$$

اگر یہ شرط پوری ہو تو دفعہ ۲۳۰ (و) میں ثابت کردہ مسئلہ

$$|و^{ی} - ۱| < |ی|\left(۱ + \tfrac{۱}{۲}|ی|و^{|ی|}\right)$$

کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے $|غ_{ن،ر}| < \text{صہ}(۱ + \tfrac{۱}{۲}\,\text{صہ}\,و^{\text{صہ}})$ - اب اگر ضہ اختیاری طور پر منتخبہ کوئی مثبت عدد ہو تو صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

$\text{صہ}(۱ + \tfrac{۱}{۲}\,\text{صہ}\,و^{\text{صہ}}) < \text{ضہ}$، اور اسلئے ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے $|غ_{ن،ر}|$ یا $|ی_{ن+۱} + ی_{ن+۲} \ldots ی_{ن+ر}|$

$< \text{ضہ}$، اس لئے لامتناہی حاصل ضرب مستدق ہے۔ اس کے بالعکس مان لو کہ ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

$|غ_{ن،ر}| < \text{صہ}$ - دفعہ ۲۴۹ (۱) میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ اگر

ا ی ا > ا تو

$$|\text{لوک}_{و}(۱+ی)| < |ی|\left(۱+\frac{۱}{۲}\,\frac{|ی|}{۱-|ی|}\right)$$

اس لئے $|\text{لوک}_{و}(۱+غ_{ن،ر})| < \text{صہ}\left(۱+\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{صہ}}{۱-\text{صہ}}\right)$

یا $\quad |\text{لوک}_{و}(ی_{ن+۱}\,ی_{ن+۲}\,\ldots\,ی_{ن+ر})| < \text{ضہ}$ (340)

بشرطیکہ $\text{صہ}\left(۱+\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{صہ}}{۱-\text{صہ}}\right) < \text{ضہ}$، اور اگر ضہ مقررہ ہے تو صہ متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ یہ شرط پوری ہو۔ پس سلسلہ کے استدقاق کی شرط پوری ہو چکی۔

۲۸۰ — فرض کرو کہ حقیقی مثبت عددوں کا ایک تواتر $ع_۱، ع_۲، \ldots ع_ن \ldots$ ہے جنمیں سے ہر عدد ایک سے کم ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$(۱+ع_۱)(۱+ع_۲)\ldots(۱+ع_ن)\ldots \text{ یا } \prod_{۱}^{\infty}(۱+ع)$$

اور $$(۱-ع_۱)(۱-ع_۲)\ldots(۱-ع_ن)\ldots \text{ یا } \prod_{۱}^{\infty}(۱-ع)$$

دونوں مستدق ہوتے ہیں اگر سلسلہ $ع_۱+ع_۲+\ldots+ع_ن+\ldots$ مستدق ہو اور مستدق نہیں ہوتے اگر یہ سلسلہ متسع ہو۔

چونکہ

$$(۱+ع_۱)(۱+ع_۲)\ldots(۱+ع_ن) > ۱+ع_۱+ع_۲+\ldots+ع_ن$$

اسلئے یہ واضح ہے کہ حاصل ضرب $\prod(۱+ع)$ متسع ہوتا ہے اگر سلسلہ $ع_۱+ع_۲+\ldots$ متسع ہو۔

نیز

$$\frac{۱}{(۱-ع_۱)(۱-ع_۲)\cdots(۱-ع_ن)} > (۱+ع_۱)(۱+ع_۲)\cdots(۱+ع_ن)$$

پس اگر $\sum ع$ متبع ہو تو حاصل ضرب $(۱-ع_۱)(۱-ع_۲)\cdots(۱-ع_ن)$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستدق خیال کیا جاتا ہے۔

پھر اگر $\sum ع$ مستدق ہو تو فرض کرو کہ ص اختیاری طور پر منتخبہ ایک مثبت عدد ہے جو ایک سے کم ہے تو ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے

$$ع_{ن+۱}+ع_{ن+۲}+\cdots+ع_{ن+ر} < ص$$

پس حسب دفعہ ۲۲۶

$$(۱-ع_{ن+۱})(۱-ع_{ن+۲})\cdots(۱-ع_{ن+ر})$$

$$> ۱-(ع_{ن+۱}+ع_{ن+۲}+\cdots+ع_{ن+ر}) > ۱-ص$$

اور اسلئے $\left|(۱-ع_{ن+۱})(۱-ع_{ن+۲})\cdots(۱-ع_{ن+ر})-۱\right| < ص$

اور اس طرح وہ شرط جو لامتناہی حاصل ضرب $\prod(۱-ع)$ کے استدقاق کے لئے دفعہ ۲۷۹ میں حاصل ہوئی تھی پوری ہوتی ہے۔

نیز

$$(۱+ع_{ن+۱})(۱+ع_{ن+۲})\cdots(۱+ع_{ن+ر})$$

$$< \frac{۱}{(۱-ع_{ن+۱})(۱-ع_{ن+۲})\cdots(۱-ع_{ن+ر})} < \frac{۱}{۱-ص}$$

اور اسلئے $\left|(1+\epsilon_{n+1})(1+\epsilon_{n+2})\cdots(1+\epsilon_{n+r})-1\right| < \frac{\text{ص}}{1-\text{ص}}$

پس اگر ضہ اختیاری طور پر منتخبہ ہو تو ہم صہ کو متعین کر سکتے ہیں ایسا کہ صہ $\backslash$ (۱ − صہ) < ضہ اور اسلئے ن متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، ...... کے لئے

$$\left|(1+\epsilon_{n+1})(1+\epsilon_{n+2})\cdots(1+\epsilon_{n+r})-1\right| < \text{ض}$$

اس لئے حاصل ضرب $\Pi(1+\epsilon)$ مستدق ہے۔ یہ واضح ہے کہ اس شرط کی بجائے کہ $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n, \ldots$ سب کے سب ایک سے کم ہوں یہ وسیع شرط رکھی جا سکتی ہے کہ ان عددوں کے ایک محدود جٹ کے سوا باقی سب عدد ایک سے کم ہوں۔ کیونکہ ہم $\Pi(1+\epsilon)$ یا $\Pi(1-\epsilon)$ سے اجزائے ضربی کی ایک محدود تعداد اسکے استدقاق کو متاثر کئے بغیر علٰحدہ کر سکتے ہیں۔

(341)

۲۸۱ — اب لامتناہی حاصل ضرب

$$(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)\cdots(1+\epsilon_n)\cdots$$

پر غور کرو جہاں $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ مختلف عدد ہیں۔ ہم یہ دکھائینگے کہ $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n, \ldots$ کے مقیاسوں کا سلسلہ

$$|\epsilon_1| + |\epsilon_2| + \cdots + |\epsilon_n| + \cdots$$

مستدق ہو تو اوپر کا لامتناہی حاصل ضرب بھی مستدق ہے۔ اِس صورت میں لامتناہی حاصل ضرب کو مطلقاً مستدق کہتے ہیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\left|(1+\epsilon_n)(1+\epsilon_{n+1})\cdots(1+\epsilon_{n+r})-1\right|$$

$$\geqq (1+|\epsilon_n|)(1+|\epsilon_{n+1}|)\cdots(1+|\epsilon_{n+r}|)-1$$

مقیاس کو تعبیر کرتا ہے تو اس لامتناہی حاصل ضرب کے استدقاق کے لئے یہ ضروری اور کافی ہے کہ $|ض_{ن}|$ اور $ط_{ن}$ دونوں معین قیمتوں کی طرف مستدق ہوں جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے۔ اگر ن کے ساتھ $|ض_{ن}|$ بھی لاانتہا بڑھے تو اس لامتناہی حاصل ضرب کو متسع کہتے ہیں۔ دیگر صورتوں میں جبکہ یہ حاصل ضرب مستدق نہ ہو اسکو اہتزازی حاصل ضرب کہتے ہیں، لیکن اہتزازی حاصل ضربوں کو اکثر متسع کہا جاتا ہے۔

وہ ضروری اور کافی شرط کہ لامتناہی حاصل ضرب $ی_{۱} ی_{۲} ... ی_{ن}$ ... ایک معین انتہا (صفر سے مختلف) کی طرف مستدق ہو یہ ہے کہ اختیاری طور پر منتخبہ ہر مثبت عدد صہ کے جواب میں ایک صحیح عدد ن منتخب ہوسکے ایسا کہ ر کی تمام قیمتوں ۱، ۲، ۳، ... کے لئے

$$|ی_{ن+۱}\ ی_{ن+۲}\ ی_{ن+۳} \ldots ی_{ن+ر} - ۱| < صہ$$

یہ ثابت کرنیکے لئے کہ یہ شرط ضروری ہے مان لو کہ $ض_{ن}$، $ض$ کی طرف مستدق ہوتا ہے جو صفر سے مختلف ایک عدد ہے۔ تب عددوں $|ض_{۱}|$، $|ض_{۲}|$، ... $|ض_{ن}|$ ... کے ایک محدود جٹ کے سوا باقی سب عدد $|ض| - ضہ$ سے بڑے ہیں جہاں ضہ اختیاری طور پر منتخبہ ایک مثبت عدد ہے ایسا کہ $|ض| - ضہ > ۰$۔ نیز ان عددوں میں سے کوئی عدد معدوم نہیں ہوتا، اس لئے ایک مثبت عدد ک موجود ہے جو سب عددوں $|ض_{۱}|$، $|ض_{۲}|$، ...، $|ض_{ن}|$، ... سے چھوٹا ہے۔ اب چونکہ $ض_{ن}$ ایک معین انتہا کی طرف مستدق ہوتا ہے صہ کے جواب میں ن منتخب ہوسکتا ہے ایسا کہ $|ض_{ن+ر} - ض_{ن}| < صہ\ ز$

(339)

کی تمام قیمتوں ۱، ۲، ۳، ... کے لئے۔

پس $|ی_{ن+۱}\, ی_{ن+۲}\, ی_{ن+۳} \ldots ی_{ن+ر} - ۱| < ک\, صہ \,/\, |ی_۱\, ی_۲ \ldots ی_ن| < صہ$

اور اسلئے مذکورہ شرط ضروری ہے۔

پھر یہ ثابت کرنیکے لئے کہ یہ شرط کافی ہے مان لو کہ وہ پوری ہوتی ہے۔ تب صہ کی کسی مقررہ قیمت کے جواب میں ن مقرر ہو سکتا ہے ایسا کہ $ی_{ن+۱}\, ی_{ن+۲} \ldots ی_{ن+ر} = ۱ + غ_{ن،ر}$ جہاں $ر = ۱، ۲، \ldots$ کے لئے $|غ_{ن،ر}| < صہ$۔ تب $ض_{ن+ر} = ض_ن (۱ + غ_{ن،ر})$ اور اس لئے ر کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے $|ض_{ن+ر}| < |ض_ن| (۱ + صہ)$۔ پس یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ اعداد $|ض_۱|$، $|ض_۲|$، $|ض_۳|$، ....، $|ض_ن|$، .... سب کے سب ایک ثابت مثبت عدد ل سے کم ہیں۔ اب چونکہ $|ی_{ن+۱}\, ی_{ن+۲} \ldots ی_{ن+ر} - ۱| < صہ$ اسلئے $|ض_{ن+ر} - ض_ن| < ل\, صہ$ جہاں $ر = ۱، ۲، ۳، \ldots$

اور چونکہ صہ کو کافی چھوٹا لینے سے ل صہ اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ $ض_ن$ ایک معین انتہا کی طرف مستدق ہونا چاہئے۔

لامتناہی حاصل ضرب $ی_۱\, ی_۲\, ی_۳ \ldots ی_ن \ldots$ کے استدقاق پر غور کرنیکا آسان طریقہ سلسلہ

$$لوک_و\, ی_۱ + لوک_و\, ی_۲ + \ldots + لوک_و\, ی_ن + \ldots$$

پر غور کرنیکا ہے۔

جہاں عہ دائری ناپ کی اکائی ہے۔

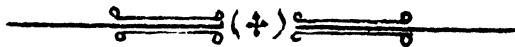
١٣ — یولر کا مسئلہ $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \text{جم } \frac{1}{2} \text{ لا جم } \frac{1}{4} \text{ لا جم } \frac{1}{8} \text{ لا} \ldots\ldots$

سے اخذ کرو

$$(1) \quad \frac{1}{\text{لوگ}_{\text{و}} \text{لا}} = \frac{1}{\text{لا} - 1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \text{لا}^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + \text{لا}^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 + \text{لا}^{\frac{1}{8}}} + \ldots\ldots,$$

$$(2) \quad \frac{1}{\text{لا}^2} = \text{قم}^2 \text{ لا} + \frac{1}{2^2} \text{ قطر}^2 \frac{1}{2} \text{ لا} + \frac{1}{4^2} \text{ قطر}^2 \frac{1}{4} \text{ لا} + \frac{1}{8^2} \text{ قطر}^2 \frac{1}{8} \text{ لا} + \ldots\ldots$$

(888)

سترھواں باب

لامتناہی حاصل ضرب

لامتناہی حاصل ضربوں کا استدقاق

۲۷۹ — فرض کرو کہ حقیقی یا مختلف عددوں کا ایک تواتر $ی_1$، $ی_2$، ... $ی_ن$، ... ہے جو کسی مقررہ قانون کی بموجب بنتا ہے۔ ان عددوں میں سے پہلے ن عددوں کے حاصل ضرب $ض_ن = ی_1 ی_2 ... ی_ن$ پر غور کرو۔

اگر $ض_ن$، صفر سے مختلف ایک معین انتہا ض کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ ض، لامتناہی حاصل ضرب $ی_1 ی_2 ... ی_ن ...$ کی انتہا یا انتہائی قیمت ہے اور یہ لامتناہی حاصل ضرب **مستدق** ہے۔

مستدق لامتناہی حاصل ضربوں کی جماعت سے اُن حاصل ضربوں کو خارج کر دینا سہولت بخش ہے جن کے لئے $ض_ن$ صفر کی طرف مستدق ہو۔

اگر $ض_ن = |ض_ن| (جم\ طن + خ\ جب\ طن)$ جہاں $|ض_ن|$ $ض_ن$ کے

جہاں
$$\text{ب} = \left(\text{۱} - \frac{\text{جب}^{\text{۲}} \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^{\text{۲}} \frac{(\text{م}+\text{۱})\pi}{\text{ن}}}\right) \cdots \left(\text{۱} - \frac{\text{جب}^{\text{۲}} \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^{\text{۲}} \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)$$

(344) اب ن کو ۲ لا \ π سے بڑا لیکر م کو منتخب کیا جا سکتا ہے ایسا کہ لا < (م+۱) π ، تب ب مثبت ہے اور ایک سے کم۔ نیز دفعہ ۲۲۶ کے مطابق

$$\text{ب} > \text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \left\{ \text{قم}^{\text{۲}} \frac{(\text{م}+\text{۱})\pi}{\text{ن}} + \cdots + \text{قم}^{\text{۲}} \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}} \right\}$$

اب ہم دفعہ ۹۶ مثال (۱) میں یہ دکھا چکے ہیں کہ اگر ط < $\frac{1}{2}\pi$ تو

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} > \frac{\text{جب} \frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi}$$

پس اگر ف < $\frac{\text{ن}}{\text{۲}}$ تو $\text{قم}^{\text{۲}} \frac{\text{ف}\pi}{\text{ن}} < \frac{\text{ن}^{\text{۲}}}{\text{۴ف}^{\text{۲}}}$ ، نیز $\text{جب}^{\text{۲}} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ن}^{\text{۲}}}$

اسلئے
$$\text{ب} > \text{۱} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۴}} \left\{ \frac{1}{(\text{م}+\text{۱})^{\text{۲}}} + \frac{1}{(\text{م}+\text{۲})^{\text{۲}}} + \cdots + \frac{1}{\text{ر}^{\text{۲}}} \right\}$$

$$> \text{۱} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۴}} \left\{ \frac{1}{\text{م}(\text{م}+\text{۱})} + \frac{1}{(\text{م}+\text{۱})(\text{م}+\text{۲})} + \cdots + \frac{1}{\text{ر}(\text{ر}-\text{۱})} \right\}$$

$$> \text{۱} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۴}} \left(\frac{1}{\text{م}} - \frac{1}{\text{ر}} \right) > \text{۱} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۴م}}$$

چونکہ ب ، ایک اور $\text{۱} - \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۴م}}$ کے درمیان ہے اسلئے ہم رکھ سکتے ہیں

$\text{ب} = ۱ - \frac{\text{طہ لا}^۲}{۴\,\text{م}}$ جہاں طہ، صفر اور ایک کے درمیان ہے تب

$$\text{جب لا} = \text{ن جب}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جم}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\text{م}\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱ - \frac{\text{طہ لا}^۲}{۴\,\text{م}}\right)$$

جہاں م، $\frac{۱}{۲}$ن سے کم کوئی عدد ہے ایسا کہ $\text{لا} < (\text{م}+۱)\pi$ ۔

اب فرض کرو کہ ن لاانتہا بڑا ہو جاتا ہے لیکن م ثابت رہتا ہے تو چونکہ حاصل ضرب میں کی ہر جیب کی بجائے متناظر دائری ناپ رکھا جا سکتا ہے اور چونکہ جم $\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ کی انتہا ایک ہے اسلئے

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{۲^۲\pi^۲}\right)\cdots\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\text{م}^۲\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{\text{طہ}_۱\,\text{لا}^۲}{۴\,\text{م}}\right)$$

جہاں $\text{طہ}_۱$، طہ کی انتہائی قیمت ہے جبکہ ن کو لاانتہا بڑا لیا جاتا ہے اور اسلئے $\text{طہ}_۱$ ایسا ہے کہ $۰ \leq \text{طہ}_۱ \leq ۱$ ۔

(345)

اب م کو کافی طور پر بڑا لینے سے ہم جزو ضربی $۱ - \frac{\text{طہ}_۱\,\text{لا}^۲}{۴\,\text{م}}$ کو ایک کے اتنا قریب لا سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں، اسلئے جب لا کے لئے لاانتہاہی حاصل ضرب کے طور پر جملہ حاصل ہوتا ہے[1]

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{۲^۲\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{۳^۲\pi^۲}\right)\cdots \quad (۱)$$

[1] اس دفعہ کی تحقیق "Schlömilch" سے منسوب ہے، دیکھو اسکی کتاب Compendium der höheren Analysis, vol. 1

یہ قید کہ لا مثبت ہونا چاہیئے صریحاً اٹھالی جاسکتی ہے۔

۲۸۳ — اگر ن جفت ہو تو دفعہ ۸۶ کے ضابطہ (۱۷)

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{3\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)$$

سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{(2\text{م}-1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\text{طہ}\,\text{لا}^2}{\text{م}^2}\right)$$

جہاں م کوئی محدود عدد ہے ایسا کہ $2\,\text{لا} < (2\text{م}+1)\pi$، اور طہ صفر اور ایک کے درمیان ہے۔ پس جم لا کے لئے لامتناہی حاصل ضرب کے طور پر ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\cdots، \quad (2)$$

۲۸۴ — ضابطہ (۱) اور (۲) کی اہمیت کے مدنظر ہم ان کا دوسرا ثبوت دینگے جو سیرٹ[1] کی ٹرگنومیٹری سے لیا گیا ہے۔ ضابطوں

$$\text{جب لا} = \text{ن جب}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جم}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\frac{1}{2}(\text{ن}-2)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)،$$

$$\text{جم لا} = \prod_{\text{ر}=1}^{\frac{1}{2}\text{ن}} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)$$

(346) کو جو ن کی جفت قیمتوں کے لئے درست ہیں لیکر ہم ان کو ضابطہ

$1 - \frac{\text{جب}^2\text{عہ}}{\text{جب}^2\text{بہ}} = \text{جم}^2\text{عہ}\left(1 - \frac{\text{مس}^2\text{عہ}}{\text{مس}^2\text{بہ}}\right)$ کے ذریعہ حسب ذیل شکلوں میں

[1] Serret's Trigonometry

تحویل کر سکتے ہیں

$$\text{جب لا} = \text{ن جم}^{\text{ن}} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \text{مس} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-2)} \left(1 - \frac{\text{مس}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}} \right)،$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}\text{ن}} \left(1 - \frac{\text{مس}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^2 \frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}} \right)$$

اب دفعہ ۹۶ مثال (۱) میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب، طہ، صفر سے $\frac{1}{2}\pi$ تک بڑھتا ہے، $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$ گھٹتا ہے اور $\frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}}$ بڑھتا ہے، اس لئے

$$\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{عہ}}{\text{جب}^2 \text{بہ}} \right) > \left(1 - \frac{\text{عہ}^2}{\text{بہ}^2} \right) > \left(1 - \frac{\text{مس}^2 \text{عہ}}{\text{مس}^2 \text{بہ}} \right)$$

جہاں ہر جملہ کی مطلق قیمت لینی چاہئے۔ فرض کرو کہ ن اسقدر بڑا ہے کہ $\pm \frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \frac{1}{2}\pi$

تب $\pm \text{جب} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \pm \frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \pm \text{مس} \frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ اور $\pm \text{جم} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} < 1$ جہاں علامتیں ایسی لینی چاہئیں کہ ہر جملہ اپنی حسابی قیمت رکھے۔ جب لا کے دو جملوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\pm \text{جب لا} > \pm \text{لا} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-2)} \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2\pi^2} \right)،$$

$$\text{اور } \pm \text{جب لا} > \pm \text{جم}^{\text{ن}} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \times \text{لا} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-2)} \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2\pi^2} \right)$$

اور جم لا کے دو جملوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\pm \text{جم لا} < \pm \prod_{ر=1}^{ر=\frac{1}{2}ن} \left(1 - \frac{4 لا^2}{(2ر-1)^2 \pi^2}\right)$$

$$\text{اور} \quad \pm \text{جم لا} < \pm \text{جم}^ن \frac{لا}{ن} \prod_{ر=1}^{ر=\frac{1}{2}ن} \left(1 - \frac{4 لا^2}{(2ر-1)^2 \pi^2}\right)$$

اب ہم جانتے ہیں کہ $\text{جم}^ن \frac{لا}{ن} = 1 - ص_ن$ جہاں $ص_ن$ ایک عدد ہے جو صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے۔ اسلئے

$$\text{جب لا} = لا\left(1 - \frac{لا^2}{\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{لا^2}{ن^2\pi^2}\right)\left(1 - ط_ن\right)$$

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{4 لا^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4 لا^2}{3^2 \pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{4 لا^2}{(2ن-1)^2 \pi^2}\right)\left(1 - طَ_ن\right)$$

(347) جہاں $ط_ن$، $طَ_ن$ صفر کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے، پس اس طرح ضابطے (۱) اور (۲) حاصل ہوتے ہیں۔ اگر ہم ضابطوں

$$\text{جب لا} = ن \text{ جب } \frac{لا}{ن} \prod_{ر=1}^{ر=\frac{1}{2}(ن-1)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{لا}{ن}}{\text{جب}^2 \frac{ر\pi}{ن}}\right)$$

$$\text{جم لا} = \text{جم } \frac{لا}{ن} \prod_{ر=1}^{ر=\frac{1}{2}(ن-1)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 لا}{\text{جب}^2 \frac{(2ر-1)\pi}{2ن}}\right)$$

کو جو ن کی طاق قیمت کے لئے درست ہیں استعمال کرتے اور ان سے ضابطے

$$\text{جب لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\left(1-\frac{\text{مس}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^2\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right),$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\left(1-\frac{\text{مس}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^2\frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)$$

حاصل کرتے تو استدلال بالا سے وہی نتیجے حاصل ہوتے۔

۲۸۵ — اب ہم ملتف عدد ی = لا + خ ر ا کی صورت پر غور کرینگے دفعہ ۲۸۲ کے مطابق ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جب ی} = \text{ن}\,\text{جب}\frac{\text{ی}}{\text{ن}}\,\text{جم}\frac{\text{ی}}{\text{ن}}\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{2\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\text{م}\pi}{\text{ن}}}\right)\text{ب},$$

$$\text{جہاں}\quad \text{ب} = \left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{(\text{م}+1)\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)$$

جہاں ن ایک جفت عدد ہے اور $\text{ر} = \frac{1}{2}(\text{ن}-2)$۔ ہمیں ب کی قیمت کے لئے حدود متعین کرنا ہے۔ فرض کرو کہ جب $\frac{\text{ی}}{\text{ن}}$ کا مقیاس غہ سے تعبیر ہوتا ہے، تب دفعہ ۲۸۱ کے مطابق، چونکہ کسی عددوں کے مجموعہ کا مقیاس انکے مقیاسوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے، ہم دیکھتے ہیں کہ (ب - ۱) کا مقیاس جملہ

$$\left(1+\frac{\text{غہ}^2}{\text{جب}^2\frac{(\text{م}+1)\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(1+\frac{\text{غہ}^2}{\text{جب}^2\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)-1$$

(348) سے کم ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ و^ا غہ^۲ > ۱ + ا غہ^۲ اگر ا کوئی مثبت عدد ہو، اسلئے

(ب - ۱) کا مقیاس < و^{غہ^۲ (قم^۲ (م+۱)π/ن + ... + قم^۲ رπ/ن)} - ۱

اور یہ < و^{۱/۴ غہ^۲ ن^۲ {۱/(م(م+۱)) + ۱/((م+۱)(م+۲)) + ... + ۱/(ر(ر+۱))}} - ۱،

یا < و^{۱/۴ غہ^۲ ن^۲ {۱/م - ۱/(م+۱) + ۱/(م+۱) - ۱/(م+۲) + ... + ۱/ر ...}} - ۱،

اسلئے (ب - ۱) کا مقیاس < و^{۱/۴ غہ^۲ ن^۲ (۱/م - ۱/ر)} - ۱

یا < و^{۱/۴ غہ^۲ ن^۲/م} - ۱

پس (ب - ۱) کا مقیاس صفر اور و^{۱/۴ غہ^۲ ن^۲/م} - ۱ کے درمیان واقع ہے۔

اب

غہ^۲ = جب^۲ لا/ن جمز^۲ ما/ن + جم^۲ لا/ن جیبز^۲ ما/ن = جب^۲ لا/ن + جبز^۲ ما/ن

اسلئے غہ^۲ ن^۲ کی انتہائی قیمت لا^۲ + ما^۲ ہے اور اسلئے (ب - ۱) کے مقیاس کی انتہا جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے صفر اور و^{(لا^۲ + ما^۲)/(۴م)} - ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہے، اور چونکہ و^{(لا^۲ + ما^۲)/(۴م)} کو م کے کافی بڑا لینے سے ایک کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں اسلئے م کو کافی بڑا لینے سے (ب - ۱) کے مقیاس کو جتنا چاہیں اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں۔ جب ن کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو جب ی کے جملہ کی

ہر جیب آخر لامر اپنی دلیل کے مساوی ہو جاتی ہے، اسلئے

$$\text{جب ی} = \text{ی}\left(1-\frac{\text{ی}^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{ی}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{ی}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

اسی طرح ضابطہ

$$\text{جم ی} = \left(1-\frac{4\text{ی}^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\text{ی}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\text{ی}^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

کو ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۲۸۶ — ضابطے (۱) اور (۲) مطلق استدقاق کی اُس شرط کو جو دفعہ ۲۸۱ میں بیان ہوئی ہے پورا کرتے ہیں کیونکہ یہ دو سلسلے $\frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\text{ن}^2}$ اور $\frac{4\text{لا}^2}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2\text{ر}-1)^2}$ مستدق ہیں۔ اِن ضابطوں میں سے کسی حاصل ضرب کا ہر دو درجی جزو ضربی دو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، چنانچہ

(349)

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(1+\frac{\text{لا}}{\pi}\right)\left(1-\frac{\text{لا}}{\pi}\right)\left(1+\frac{\text{لا}}{2\pi}\right)\left(1-\frac{\text{لا}}{2\pi}\right)\cdots,$$

$$\text{جم لا} = \left(1+\frac{2\text{لا}}{\pi}\right)\left(1-\frac{2\text{لا}}{\pi}\right)\left(1+\frac{2\text{لا}}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2\text{لا}}{3\pi}\right)\cdots\cdots$$

جنکو شکلوں

$$\text{جب لا} = \text{لا}\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\text{جم لا} = \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{2\text{لا}}{(2\text{ر}-1)\pi}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اِن آخری شکلوں میں حاصل ضرب نیم مستدق ہیں کیونکہ حسب ذیل حاصل ضرب

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)،\ \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)،\ \prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{2\,\text{لا}}{(2\text{ر}-1)\pi}\right)،\ \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{2\,\text{لا}}{(2\text{ر}-1)\pi}\right)$$

متسع ہیں اسوجہ سے کہ سلسلے $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\text{ر}}$ ، $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2\text{ر}-1}$ متسع ہیں۔

کسی نیم مستدق حاصل ضرب میں نیم مستدق سلسلہ کی خاصیت کے مماثل یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اجزائے ضربی کی ترتیب کو بدل دینے سے حاصل ضرب کی قیمت پر اثر پڑتا ہے۔ ہم ضابطوں (۳) اور (۴) کو صحیح خیال کر سکتے ہیں صرف اسوقت جبکہ یہ فرض کرلیا گیا ہو کہ ر کی مثبت قیمتوں کی تعداد اسکی منفی قیمتوں کی تعداد کے مساوی لیگئی ہے، اِس طرح (۳) اور (۴) کو ان شکلوں

$$\text{جب لا} = \text{لانہا}_{\text{ن}=\infty}\prod_{-\text{ن}}^{\text{ن}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)،\ \text{جم لا} = \text{لانہا}_{\text{ن}=\infty}\prod_{-\text{ن}}^{\text{ن}}\left(1+\frac{2\,\text{لا}}{(2\text{ر}-1)\pi}\right)$$

کا اختصار سمجھنا چاہیئے۔

۲۸۷ — ویرسٹراس (Weierstrass) نے[1] یہ ثابت کیا ہے کہ متسع حاصل ضرب

$$\text{ی}\left(1+\frac{\text{ی}}{\pi}\right)\left(1+\frac{\text{ی}}{2\pi}\right)\left(1+\frac{\text{ی}}{3\pi}\right)\ldots\ldots$$

مستدق بنایا جا سکتا ہے اگر اسکے ہر جزو ضربی کو ایک قوت نما جزو ضربی سے ضرب دیا جائے۔ چنانچہ حاصل ضرب

$$\text{ی}\left\{\left(1+\frac{\text{ی}}{\pi}\right)\text{و}^{-\frac{\text{ی}}{\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{\text{ی}}{2\pi}\right)\text{و}^{-\frac{\text{ی}}{2\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{\text{ی}}{3\pi}\right)\text{و}^{-\frac{\text{ی}}{3\pi}}\right\}\ldots\ldots$$

[1] دیکھو برلن اکاڈیمی کی "Abhandlungen" بابتہ سنہ ۱۸۷۶ء۔

مطلقاً مستدق ہے۔

(350) چونکہ حسب دفعہ ۲۳۰ (۱)

$$و^{\frac{ی}{ن\pi}} = 1 - \frac{ی}{ن\pi} + \frac{ی^2}{2ن^2\pi^2}(1+ع_ن)$$

جہاں $|ع_ن|$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے، اسلئے اگر صہ اختیاری طور پر منتخبہ کوئی مثبت عدد ہو تو $|ع_ن| < صہ$، ن کی تمام قیمتوں کے لئے جو صہ پر منحصر کسی خاص قیمت سے بڑی ہوں۔ اب

$$\left(1+\frac{ی}{ن\pi}\right)و^{\frac{ی}{ن\pi}} = \left(1+\frac{ی}{ن\pi}\right)\left\{1 - \frac{ی}{ن\pi} + \frac{ی^2}{2ن^2\pi^2}(1+ع_ن)\right\}$$

$$= 1 - \frac{ی^2}{2ن^2\pi^2}(1-ع_ن) + \frac{ی^3}{2ن^3\pi^3}(1+ع_ن)$$

وہ سلسلہ جسکی عام رقم

$$\frac{ی^2}{2ن^2\pi^2}\left\{1-ع_ن - \frac{ی}{ن\pi}(1+ع_ن)\right\}$$

ہے مطلقاً مستدق ہے کیونکہ ن کی کافی طور پر بڑی سب قیمتوں کیلئے سلسلے $\Sigma \frac{1}{ن^2}$، $\Sigma \frac{1}{ن^3}$ مستدق ہیں، اور $|ع_ن| < صہ$، $|1 \pm ع_ن| < 1 + صہ$۔ اسلئے بموجب اُس مسئلے کے جو دفعہ ۲۸۱ میں ثابت ہو چکا ہے وہ لاانتناہی حاصل ضرب جسکی عام رقم

$$1-\frac{ی^2}{2ن^2\pi^2}(1-ع_ن)+\frac{ی^3}{3ن^3\pi^3}(1+ع_ن)$$

یا $$\left(1+\frac{ی}{ن\pi}\right)و^{-\frac{ی}{ن\pi}}$$

ہے مطلقاً مستدق ہے۔

اگر ف (ی) سے مطلقاً مستدق حاصل ضرب $\prod_1^\infty\left(1+\frac{ی}{ن\pi}\right)و^{-\frac{ی}{ن\pi}}$ کی انتہا اور ف(-ی) سے $\prod_1^\infty\left(1-\frac{ی}{ن\pi}\right)و^{\frac{ی}{ن\pi}}$ کی انتہا تعبیر ہو تو

$$ف(ی)\,ف(-ی)=\frac{جب\,ی}{ی}$$

اوپر کا یہ نتیجہ جملہ

$$فہ(ی)=\left(1-\frac{ی}{\pi}\right)\left(1-\frac{ی}{2\pi}\right)\dots\left(1-\frac{ی}{ن\pi}\right)\left(1+\frac{ی}{\pi}\right)\left(1+\frac{ی}{2\pi}\right)\dots\left(1+\frac{ی}{م\pi}\right)$$

کی قیمت محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے جبکہ م اور ن کو لاانتہا بڑا بنایا گیا ہو لیکن اس طور پر کہ ان کی نسبت ایک معین محدود انتہا رکھے۔

اگر $س_ن$، سلسلہ $1^{-1}+2^{-1}+3^{-1}+\dots+ن^{-1}$ کو تعبیر کرے تو ہم دیکھتے ہیں کہ

جب ی = ی نہا فہ (ی) $و^{\frac{ی}{\pi}(س_ن-س_م)}$،

اب یہ بہت مشہور ہے کہ $س_ن - لوک_و\,ن$ کی انتہا جبکہ ن لامتناہی ہو

محدود عدد ...۵۷۷۲۱۵۶۰ ہے جسکو یولر کا مستقل کہتے ہیں،
اس لئے س ن - س م کی انتہائی قیمت جبکہ م اور ن لامتناہی
ہوں لوک $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ کی انتہائی قیمت ہے۔ پس

$$\text{نہا فہ (ی)} = \text{ک}^{\frac{\text{ی}}{\pi}} \times \frac{\text{جب ی}}{\text{ی}}$$

جہاں ک = نہا $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ اور نہا فہ (ی) کی قیمت = $\frac{\text{جب ی}}{\text{ی}}$ صرف
اسوقت جبکہ م اور ن مساوی ہوتے ہوئے لامتناہی ہو جائیں۔

۲۸۸ — جم لا کے ضابطہ (۲) یا (۴) کو (۱) یا (۳) سے ضابطہ
جم لا = جب ۲ لا \ ۲ جب لا کے ذریعہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{\text{جب ۲لا}}{\text{۲ جب لا}} = \text{۲ لا} \prod_{\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\text{۲لا}}{\text{ر}\pi}\right) \Big\backslash \text{۲لا} \prod_{\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)$$

شمار کنندہ کے وہ اجزائے ضربی جنکے لئے ر جفت ہے نسب نما کے
اجزائے ضربی کے ساتھ کٹ جاتے ہیں، اس لئے اگر ہم شمار کنندہ
کے حاصل ضرب کو $\prod_{\text{۲ن}}^{\text{۲ن}} \left(1 + \frac{\text{۲لا}}{\text{ر}\pi}\right)$ کی انتہا اور نسب نما کے حاصل ضرب
کو $\prod_{\text{ن}}^{\text{ن}} \left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)$ کی انتہا خیال کریں جبکہ ن لامتناہی ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \prod_{\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\text{۲ لا}}{(\text{۲س} + 1)\pi}\right)$$

جو (۲) یا (۴) کے مماثل ہے۔ حاصل ضربوں کے استدقاق کی شرط
سے یہ واضح ہے کہ ایک حاصل ضرب میں ن کی بجائے ۲ن
لینے سے اس حاصل ضرب کی انتہائی قیمت پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ
ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے۔

۲۸۹ — ضابطوں $\text{جب لا} = \text{جم}\left(\frac{1}{2}\pi - \text{لا}\right)$، $\text{جم لا} = \text{جب}\left(\frac{1}{2}\pi - \text{لا}\right)$ کی مدد سے جب لا کے لئے حاصل ضربی ضابطہ جم لا کے ضابطہ سے اخذ کیا جا سکتا ہے یا اسکے بالعکس۔ ضابطہ (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{\pi - 2\,\text{لا}}{\pi(2\,\text{ر} - 1)}\right) = \prod_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\,\text{ر}\,\pi - 2\,\text{لا}}{\pi(2\,\text{ر} - 1)}\right)$$

$$= \prod_{-\infty}^{\infty}\frac{2\,\text{ر}}{2\,\text{ر} - 1} \times \text{لا} \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{\text{لا}}{\text{ر}\,\pi}\right)$$

جہاں جزو ضربی لا، ر = ۰ کے جواب میں ہے۔ لا = ۰ کیلئے $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ کی نہایت لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لازماً $\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{2\,\text{ر}}{2\,\text{ر} - 1} = 1$، پس

$$\text{جب لا} = \text{لا} \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{\text{لا}}{\text{ر}\,\pi}\right)$$

(352) **۲۹۰ —** جب لا اور جم لا کے حاصل ضربی ضابطوں کو ہم ایسی شکل میں رکھ سکتے ہیں کہ اس سے اِن کے دوری (Periodic) ہونیکی خاصیت ظاہر ہو جو تفاعلوں جب لا اور جم لا میں پائی جاتی ہے۔

فرض کرو $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لا} \prod_{-\text{ن}}^{\text{ن}}\left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{ر}\,\pi}\right)$

تو

$$\text{ف}(\text{لا} + \pi) = (\text{لا} + \pi)\left(1 + \frac{\text{لا} + \pi}{\pi}\right)\left(1 + \frac{\text{لا} + \pi}{2\pi}\right)\cdots\cdots$$

$$\left(1 + \frac{\text{لا} + \pi}{\text{ن}\,\pi}\right)\left(1 - \frac{\text{لا} + \pi}{\pi}\right)\cdots\left(1 - \frac{\text{لا} + \pi}{\text{ن}\,\pi}\right)$$

$$= -\text{لا}\left(1 + \frac{\text{لا}}{\pi}\right)\left(1 + \frac{\text{لا}}{2\pi}\right)\cdots\left(1 + \frac{\text{لا}}{\pi(\text{ن} + 1)}\right)\left(1 - \frac{\text{لا}}{\pi}\right)\cdots\cdots$$

$$\ldots\ldots\left(1-\frac{\text{لا}}{(\text{ن}-1)\pi}\right)\frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}$$

$$=-\frac{\text{لا}+(\text{ن}+1)\pi}{\text{ن}\pi-\text{لا}}\ \text{ف}\,(\text{لا})\text{،}$$

اب جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو نہا ف (لا + π) = - نہا ف (لا)
جو مساوات جب (لا + π) = - جب لا ہے۔ اسی طرح ضابطہ (۴)
کو ایسی شکل میں رکھا جا سکتا ہے کہ اس سے خاصیت

$$\text{جم}\,(\text{لا}+\pi)=-\text{جم لا}$$

کا اظہار ہو۔

تفاعل جب لا معدوم ہوتا ہے جبکہ لا = ۰، ± π، ± ۲π، .....
اور یہ قیمتیں ضابطہ (۳) کے اجزائے ضربی لا، $1\pm\frac{\text{لا}}{\pi}$، $1\pm\frac{\text{لا}}{2\pi}$، ..... کے
جواب میں ہیں، نیز دفعہ ۲۳۵ میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ لا کی کسی خیالی
قیمت کے لئے جب لا معدوم نہیں ہوتا، اسی طرح اگر یہ مان لیا جائے کہ
جب لا کو لامتناہی حاصل ضرب

$$\text{ا}\ \frac{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})\ldots\ldots\ldots}{\text{ب ج}\ \ldots\ldots\ldots}$$

کی شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے تو ا، ب، ج، ..... کی قیمتیں لازماً صفر، π،
- π، ۲π، - ۲π، ..... ہونی چاہئیں۔ پھر ا کی قیمت، لا = ۰ رکھکر
حاصل کیجاتی ہے اور مسئلہ نہا $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ = ۱ کو استعمال کر کے ضابطہ (۱)
یا (۳) حاصل کیا جاتا ہے۔ لیکن اس ضابطہ کے اس ثبوت کی در اصل
کوئی قدر و قیمت نہیں کیونکہ بغیر ثبوت کے ہمیں یہ ماننے کا کوئی حق نہیں ہے
کہ جب لا مطلوبہ شکل میں بیان ہو سکتا ہے۔

۲۹۱ — ضابطے (۱) اور (۲) خیالی دلیل خ ما کی صورت میں

جو شکلیں اختیار کرتے ہیں ان پر غور کرنا ضروری ہے ۔ اس صورت میں جیب ما کے لئے لامتناہی حاصل ضرب ملتے ہیں

$$\text{جب ما} = \text{ما}\left(1-\frac{\text{ما}^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{ما}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{ما}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \quad (5)$$

$$\text{جم ما} = \left(1-\frac{4\,\text{ما}^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\,\text{ما}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\,\text{ما}^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots \quad (6)$$

(353)

یولر نے ضابطوں (۱)، (۲)، (۵)، (۶) کو اس متماثلہ

$$\text{ی}^{2\text{م}}-1 = \text{م}(\text{ی}^2-1)\prod_{\text{ن}=1}^{\text{ن}=\text{م}-1}\left\{\frac{1-2\,\text{ی}\,\text{جم}\frac{\text{ن}\pi}{\text{م}}+\text{ی}^2}{2-2\,\text{جم}\frac{\text{ن}\pi}{\text{م}}}\right\}$$

کی مدد سے سب سے اول حاصل کیا تھا۔ رکھو $\text{ی} = 1+\frac{\text{لا}}{\text{م}}$ تو یہ متماثلہ ہو جاتی ہے

$$\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^{\text{م}}-\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^{-\text{م}} = \frac{2\,\text{لا}+\frac{\text{لا}^2}{\text{م}}}{1+\frac{\text{لا}}{\text{م}}}\prod_{\text{ن}=1}^{\text{ن}=\text{م}-1}\left\{1+\frac{\text{لا}^2}{\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)\left(2\,\text{م}\,\text{جب}\frac{\text{ن}\pi}{2\,\text{م}}\right)^2}\right\}$$

اب اگر م کو لاانتہا بڑا کر دیا جائے تو یہ متماثلہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{2}\left(\text{ق}^{\text{لا}}-\text{ق}^{-\text{لا}}\right) = \text{لا}\prod_{\text{ن}=1}^{\text{ن}=\infty}\left(1+\frac{\text{لا}^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right)$$

جو ضابطہ (۵) ہے۔

انتہائی اس تخمین کے لئے دفعہ ۲۸۵ کی طرح ٹھیک تحقیقات کی ضرورت ہے۔

ضابطہ (۱)، لا کو خ لا میں تبدیل کر کے اخذ کیا گیا تھا، اور اسی طرح ضابطے (۲) اور (۶)، $\text{ی}^{2\text{م}}+1$ کے ان جملوں سے حاصل کئے گئے تھے جو اجزائے ضربی

میں ہیں۔

مثالیں

۲۹۲ — (۱) π کے لئے ویالیس (Wallis) کے جملہ کی تحقیق کرو۔

جب لا کے اجزائے ضربی والے جملہ میں لا = $\frac{۱}{۲}\pi$ رکھو تو یہ تقریبی ضابطہ

$$۱ = \frac{\pi}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{۲^۲}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۴^۲}\right)\cdots\left(۱ - \frac{۱}{(۲ن)^۲}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ ن بڑا ہو۔ اس کو لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sqrt{\frac{۱}{۲}\pi(۲ن + ۱)} = \frac{۲ \times ۴ \times ۶ \cdots ۲ن}{۱ \times ۳ \times ۵ \cdots (۲ن - ۱)}$$

اور یہ ویالیس کا ضابطہ ہے۔

(۲) جمز ما − جم عہ ، جم لا − جم عہ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

جمز ما − جم عہ = ۲ جب $\frac{۱}{۲}$(عہ + خ ما) جب $\frac{۱}{۲}$(عہ − خ ما)

$$= \frac{۱}{۲}(عہ^۲ + ما^۲)\prod_{۱}^{\infty}\left\{۱ - \frac{(عہ + خ ما)^۲}{۴ن^۲\pi^۲}\right\}$$
$$\times\left\{۱ - \frac{(عہ - خ ما)^۲}{۴ن^۲\pi^۲}\right\}$$

اور ما = ۰ رکھنے سے

$$۱ - \text{جم عہ} = \frac{۱}{۲}عہ^۲\prod_{۱}^{\infty}\left(۱ - \frac{عہ^۲}{۴ن^۲\pi^۲}\right)^۲$$

پس

$$\frac{\text{جمز ما} - \text{جم عہ}}{۱ - \text{جم عہ}} = \left(۱ + \frac{ما^۲}{عہ^۲}\right)\prod_{۱}^{\infty}\left(۱ + \frac{خ ما}{۲ن\pi + عہ}\right)\left(۱ - \frac{خ ما}{۲ن\pi - عہ}\right)$$
$$\times\left(۱ + \frac{خ ما}{۲ن\pi - عہ}\right)\left(۱ - \frac{خ ما}{۲ن\pi + عہ}\right)$$

اس لئے

$$\text{جمز ما} - \text{جم عہ} = ۲\,\text{جب}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\left(1 + \frac{\text{ما}^2}{\text{عہ}^2}\right)\prod_{1}^{\infty}\left\{1 + \frac{\text{ما}^2}{(۲\text{ن}\pi + \text{عہ})^2}\right\}$$
$$\times\left\{1 + \frac{\text{ما}^2}{(۲\text{ن}\pi - \text{عہ})^2}\right\}$$

اس میں ما کی بجائے خ لا رکھنے سے

(854)

$$\text{جم لا} - \text{جم عہ} = ۲\,\text{جب}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{عہ}^2}\right)\prod_{1}^{\infty}\left\{1 - \frac{\text{لا}^2}{(۲\text{ن}\pi + \text{عہ})^2}\right\}$$
$$\times\left\{1 - \frac{\text{لا}^2}{(۲\text{ن}\pi - \text{عہ})^2}\right\}$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{1}{\pi^2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{۴\pi^2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{۹\pi^2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{۱۶\pi^2} + \cdots$$
$$= \frac{1}{4}\pi - \text{مس}^{-1}\left(\text{مسز}\frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{مم}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

چونکہ
$$\text{جب}(\text{لا} + \text{خ ما}) = (\text{لا} + \text{خ ما})\prod_{1}^{\infty}\left\{1 - \frac{(\text{لا} + \text{خ ما})^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right\}$$

اس لئے لوکارثم لینے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{لوک}(\text{جب لا جمز ما} + \text{خ جم لا جبز ما}) = \text{لوک}(\text{لا} + \text{خ ما})$$
$$+ \sum_{1}^{\infty}\text{لوک}\left\{1 - \frac{\text{لا}^2 - \text{ما}^2}{\text{ن}^2\pi^2} - \text{خ}\,\frac{۲\,\text{لا ما}}{\text{ن}^2\pi^2}\right\}$$

اس مساوات کی طرفین کے خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{مس}^{-1}(\text{مسز ما مم لا}) = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \sum_{1}^{\infty}\text{مس}^{-1}\frac{۲\,\text{لا ما}}{\text{ن}^2\pi^2 - \text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

فرض کرو

$$\text{لا} = \text{ما} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تو $\sum_{1}^{\infty}$ مس$^{-1}$ $\frac{1}{ن^2 \pi^2}$ = $\frac{1}{4}$ π − مس$^{-1}$ (مسنر $\frac{1}{2\pi}$. م $\frac{1}{2\pi}$)

قوت نما تفاعل کو لامتناہی حاصل ضرب کے طور پر بیان کرنا

۲۹۲ (ل) - اُس صورت میں جسمیں |ی| < ۱ قوت نما تفاعل ولا کو میا تھوز (Mathews) [ل] نے مطلوبہ شکل میں بیان کیا ہے -

فرض کرو کہ ی، ایک مستدق سلسلہ $\sum_{ن=1}$ کن لوک$_و$ (۱ + ی^ن) کا انتہائی مجموعہ ہے - تب ہمیں حاصل ہوتا ہے ک$_1$ = ۱، اور ن > ۱ کیلئے

$$ک_ن + \sum \frac{(-1)^{ضہ-1}}{ضہ} ک_{ضہ} = ۰$$

جہاں ضہ، ن کا کوئی مناسب صحیح عددی جزو ضربی ہے اور ضہ = $\frac{ن}{ضہ}$، ضہ کی ہر ایسی قیمت کے جواب میں ایک رقم ملتی ہے - اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$ن ک_ن = \sum (-1)^{ضہ} ضہ ک_{ضہ} = \sum (-1)^{ن/ضہ} ضہ ک_{ضہ}$$

اور تمام عددوں ک ن کی قیمتوں کو مساواتوں کے اُس جٹ سے معلوم کرنا ہوگا جنکا نمونہ یہ مساوات ہے - اب استقراء سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

(۱) اگر ن = ۲^م تو ک$_ن$ = $\frac{1}{2}$

(۲) اگر ن، مہ مختلف طاق مفرد عددوں کا حاصل ضرب ف$_1$ ف$_2$ .... ف$_{مہ}$ ہو

تو ک$_ن$ = (−۱)^{مہ} ن

[ل] Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. xiv, Page 238.

(355) (۳) اگر ن = ۲ف‌ف ... ف م تو ک ن = (−۱)^م ۲^(−م+۱) ÷ ن

(۴) اگر ن کا ایک جزو ضربی طاق عدد کا مربع ہو تو ک ن = ۰
اب یہ واقعہ کہ ک ن کی اُن قیمتوں کے ساتھ جو حسب تشریح بالا حاصل ہوتی ہیں سلسلہ

Σ ک ن لوک و (۱ + ی^ن)

|ی| > ۱ کے لئے مستدق ہوتا ہے آسانی کے ساتھ دیکھا جا سکتا ہے۔ پس ی کی سب قیمتوں کے لئے ایسی کہ |ی| > ۱ قوت نما تفاعل و^ی اِس لامتناہی حاصل ضرب

$$\prod_{1}^{\infty} (۱ + ی^ن)^{ک_ن} = (۱ + ی)(۱ + ی^۲)^{\frac{1}{2}}(۱ + ی^۳)^{-\frac{1}{3}}(۱ + ی^۴)^{\frac{1}{2}}\dots$$

سے تعبیر ہوتا ہے' یا چونکہ ۱ = (۱ − ی)^{½}(۱ + ی)^{½}(۱ + ی^۲)^{½}... اسلئے عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$و^ی = \left(\frac{۱ + ی}{۱ - ی}\right)^{\frac{1}{2}} \prod \left(\frac{۱ + ی^ف}{۱ - ی^ف}\right)^{\frac{۱}{۲ف}(−۱)^م} ، \quad |ی| > ۱$$

جہاں ف، م غیر مساوی طاق مفردوں کا حاصل ضرب ہے اور ف کی سب قیمتیں جو اِس شکل کی ہیں لگئی ہیں۔

مماس، مماس التمام، قاطع، اور قاطع التمام کے لئے سلسلے

۲۹۳ – چونکہ جب ی = ی $\prod_{1}^{\infty}\left(۱ - \frac{ی^۲}{ن^۲ \pi^۲}\right)$
اِس لئے اگر ی، π کا ضعف نہیں ہے تو

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{جب ی} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ی} + \sum_{1}^{\infty} \text{لوک}_{\text{و}}\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right)$$

فرض کرو کہ ھ ایک مثبت حقیقی عدد ہے۔ تب ی کو ی + ھ میں تبدیل کرنے سے اور پھر ان دو جملوں کو تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{جب (ی + ھ)}}{\text{جب ی}} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی}}\right) + \sum_{\text{ن}=1}^{\text{ن}+\infty}\left\{\text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} - \text{ن}\pi}\right) + \text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} + \text{ن}\pi}\right)\right\}$$

اب دفعہ ۲۴۹ (۱) کا مسئلہ استعمال کرنے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی}}\right) = \frac{\text{ھ}}{\text{ی}} - \frac{1}{2}\frac{\text{ھ}^2}{\text{ی}^2}(1 + \text{و}_{.})،$$

$$\text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} - \text{ن}\pi}\right) = \frac{\text{ھ}}{\text{ی} - \text{ن}\pi} - \frac{1}{2}\frac{\text{ھ}^2}{(\text{ی} - \text{ن}\pi)^2}(1 + \text{و}_{\text{ن}})،$$

$$\text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} + \text{ن}\pi}\right) = \frac{\text{ھ}}{\text{ی} + \text{ن}\pi} - \frac{1}{2}\frac{\text{ھ}^2}{(\text{ی} + \text{ن}\pi)^2}(1 + \text{ط}_{\text{ن}})،$$

جہاں $\text{و}_{.}$، $\text{و}_{\text{ن}}$، $\text{ط}_{\text{ن}}$ سب کے سب صفر کی طرف مستدق ہوتے ہیں (356)
جبکہ ھ کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے۔ مزید براں اگر ی کی کوئی ثابت قیمت ہو جو صفر نہیں ہے یا π کا مثبت یا منفی صحیح عددی ضعف تو ھ کی کافی طور پر چھوٹی سب قیمتوں کے لئے عدد $|\text{و}_{.}|$، $|\text{و}_1|$، $|\text{و}_2|$ ... اور $|\text{ط}_1|$، $|\text{ط}_2|$، ... سب کے سب کسی اختیاری طور پر منتخبہ مثبت عدد ھ سے کم ہیں کیونکہ $|\text{ی}|$، $|\text{ی} - \text{ن}\pi|$، $|\text{ی} + \text{ن}\pi|$ کے مقیاس کسی ثابت عدد سے جو ن پر منحصر نہیں ہے بڑے ہیں۔

پس اب

$$\frac{1}{\text{ھ}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{جب}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جب ی}}$$

$$=\left[\frac{1}{\text{ی}}-\frac{1}{2}\frac{\text{ھ}}{\text{ی}^2}(1+\text{و})\right]+\sum_{\text{ن}=1}^{\infty}\left[\frac{2\text{ی}}{\text{ی}^2-\text{ن}^2\pi^2}-\frac{1}{2}\text{ھ}\frac{1+\text{و}_{\text{ن}}}{(\text{ی}-\text{ن}\pi)^2}-\frac{1}{2}\text{ھ}\frac{1+\text{ط}_{\text{ن}}}{(\text{ی}+\text{ن}\pi)^2}\right]$$

جہاں بائیں جانب کا سلسلہ مستدق ہوتا ہے جبکہ ی ، π کا ضعف نہ ہو

فرض کرو کہ ی ہے ایسا کہ $(\text{ر}-1)\pi<|\text{ی}|<\text{ر}\pi$ جہاں ر کوئی مثبت صحیح عدد ہے ، تب اگر $\text{ی}^2/\text{ر}^2\pi^2=\text{ضہ}<1$ تو ن کی سب قیمتوں کے لئے جو ر سے بڑی یا اسکے مساوی ہوں

$|\text{ی}|^2/\text{ن}^2\pi^2\leqslant\text{ضہ}$ ۔ اب

$$\left|\frac{1}{\text{ن}^2\pi^2-\text{ی}^2}\right|=\frac{1}{\text{ن}^2\pi^2}\cdot\frac{1}{|1-\text{ی}^2/\text{ن}^2\pi^2|}\leqslant\frac{1}{\text{ن}^2\pi^2}\cdot\frac{1}{1-\text{ضہ}}$$

بشرطیکہ $\text{ن}\geqslant\text{ر}$ ، پس چونکہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم ن^{-2} ہے مستدق ہے اسلئے وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{1}{\text{ن}^2\pi^2-\text{ی}^2}$ ہے مطلقاً مستدق ہے ۔

اب چونکہ وہ دو سلسلے جنکی عام رقمیں ہیں

$$\frac{2\text{ی}}{\text{ی}^2-\text{ن}^2\pi^2}\ ,\quad\frac{2\text{ی}}{\text{ی}^2-\text{ن}^2\pi^2}-\frac{1}{2}\text{ھ}\frac{1+\text{و}_{\text{ن}}}{(\text{ی}-\text{ن}\pi)^2}-\frac{1}{2}\text{ھ}\frac{1+\text{ط}_{\text{ن}}}{(\text{ی}+\text{ن}\pi)^2}$$

دونوں مستدق ہیں اسلئے وہ سلسلہ بھی جسکی عام رقم ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{ه}\,\frac{1+\text{و}^{\text{ن}}}{(\text{ی}-\text{ن}\pi)^2}+\frac{1}{2}\,\text{ه}\,\frac{1+\text{ط}^{\text{ن}}}{(\text{ی}+\text{ن}\pi)^2}$$

ہے مستدق ہے۔ اگر ه کافی طور پر چھوٹا ہو تو اس عام رقم کا مقیاس

$$<\frac{1}{2}\,\text{ه}\,(1+\text{ص})\left\{\frac{1}{|\text{ی}-\text{ن}\pi|^2}+\frac{1}{|\text{ی}+\text{ن}\pi|^2}\right\}$$

اب $|\text{ی}-\text{ن}\pi| \geqslant \text{ن}\pi-|\text{ی}| \geqslant \text{ن}\pi-(\text{ر}+1)\pi$، اسلئے

$$\frac{1}{|\text{ی}-\text{ن}\pi|^2} < \frac{1}{(\text{ن}-\text{ر}-1)^2\pi^2}$$

جہاں $\text{ن} > \text{ر}+1$، پس یہ مستنبط ہوتا ہے کہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم (357)

$\frac{1}{|\text{ی}-\text{ن}\pi|^2}$ ہے مستدق ہے۔ اسی طرح وہ سلسلہ جس کی عام

$\frac{1}{|\text{ی}+\text{ن}\pi|^2}$ ہے مستدق ہے۔

اب ہم دیکھتے ہیں کہ اُس سلسلہ کے مجموعہ کا مقیاس جسکی عام رقم $\frac{1}{2}\,\text{ه}\,\frac{1+\text{و}^{\text{ن}}}{(\text{ی}-\text{ن}\pi)^2}+\frac{1}{2}\,\text{ه}\,\frac{1+\text{ط}^{\text{ن}}}{(\text{ی}+\text{ن}\pi)^2}$ ہے عدد $\frac{1}{2}\,\text{ه}\,(1+\text{ص})\,\text{ا}(\text{ی})$ سے متجاوز نہیں ہوتا جہاں $\text{ا}(\text{ی})$ ایک مثبت عدد ہے جو صرف ی پر منحصر ہے، یہ مقیاس لاانتہا گھٹتا ہے جبکہ ه کو لاانتہا گھٹا دیا جاتا ہے۔ اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\underset{\text{ه}=0}{\text{نہا}}\;\frac{1}{\text{ه}}\,\text{لوک}_{\text{ع}}\,\frac{\text{جب}(\text{ی}+\text{ه})}{\text{جب ی}} \rightarrow \frac{1}{\text{ی}}+\sum_{\text{ن}=1}\frac{2\,\text{ی}}{\text{ی}^2-\text{ن}^2\pi^2}$$

چونکہ $\frac{\text{جب}(ی+ھ)}{\text{جب } ی}$ = جم ھ + جب ھ مم ی = ۱ + ھ مم ی (۱ + ضا)

جہاں |ضا|، ھ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے، اسلئے

$\frac{1}{ھ}$ لوک$_{و}$ $\frac{\text{جب}(ی+ھ)}{\text{جب } ی}$ = $\frac{1}{ھ}$ لوک$_{و}$ {۱ + ھ مم ی (۱ + ضا)}

= مم ی (۱ + ضا) (۱ + ضاَ)

جہاں |ضاَ|، ھ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ پس

نہیا$_{ھ=.}$ $\frac{1}{ھ}$ لوک$_{و}$ $\frac{\text{جب}(ی+ھ)}{\text{جب } ی}$ = مم ی

اب یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب، ی کوئی حقیقی یا ملتف عدد ہو جو π کا صحیح عددی ضعف نہیں ہے تو مم ی اس مستدق سلسلہ

$$\frac{1}{ی} + \frac{1}{ی+\pi} + \frac{1}{ی-\pi} + \frac{1}{ی+2\pi} + \frac{1}{ی-2\pi} + \dots \quad (7)$$

کا، یا

$$\frac{1}{ی} + 2ی \sum_{ن=1} \frac{1}{ی^2 - ن^2\pi^2} \dots\dots\dots \quad (8)$$

کا مجموعہ ہے۔

شکل (۷) میں سلسلہ بالا نیم مستدق ہے اور شکل (۸) میں وہ مطلقاً مستدق ہے، بجز ی = .، $\pm \pi$، $\pm 2\pi$، ... کے اور ان قیمتوں کے لئے یہ سلسلہ منتشر ہے۔

مندرجۂ صدر تحقیق کی ضرورت جتانے کے لئے یہ بتانا کافی ہے کہ اگر ف (ی)، مستدق سلسلہ $ع_1(ی) + ع_2(ی) + \dots + ع_ن(ی) + \dots$ کا مجموعہ ہو تو ہمیں یہ مان لینے کا کوئی حق نہیں ہے کہ

$$\text{نہیا}_{ھ=.} \frac{ف(ی+ھ) - ف(ی)}{ھ} = \sum_{1}^{\infty} \text{نہیا}_{ھ=.} \frac{ع_ر(ی+ھ) - ع_ر(ی)}{ھ}$$

(358)

فرض کرو کہ اِس سلسلہ کا باقی م رقموں کے بعد $\text{ب}_\text{م}(\text{ی})$ ہے تو

$$\text{ف}(\text{ی}) = \text{ع}_۱(\text{ی}) + \text{ع}_۲(\text{ی}) + \ldots\ldots + \text{ع}_\text{م}(\text{ی}) + \text{ب}_\text{م}(\text{ی})$$

$$\text{ف}(\text{ی}+\text{ھ}) = \text{ع}_۱(\text{ی}+\text{ھ}) + \text{ع}_۲(\text{ی}+\text{ھ}) + \ldots + \text{ع}_\text{م}(\text{ی}+\text{ھ}) + \text{ب}_\text{م}(\text{ی}+\text{ھ})$$

اسلئے
$$\text{نہا}_{\text{ھ}=۰} \frac{\text{ف}(\text{ی}+\text{ھ}) - \text{ف}(\text{ی})}{\text{ھ}} = \sum_۱^\text{م} \text{نہا}_{\text{ھ}=۰} \frac{\text{ع}_\text{ر}(\text{ی}+\text{ھ}) - \text{ع}_\text{ر}(\text{ی})}{\text{ھ}} + \text{نہا}_{\text{ھ}=۰} \frac{\text{ب}_\text{م}(\text{ی}+\text{ھ}) - \text{ب}_\text{م}(\text{ی})}{\text{ھ}}$$

اب چونکہ دیا ہوا سلسلہ مستدق ہے $\text{ب}_\text{م}(\text{ی})$، $\text{ب}_\text{م}(\text{ی}+\text{ھ})$ لا انتہا چھوٹے ہو جاتے ہیں جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن یہ نتیجہ نکلنا ضروری نہیں کہ $\text{نہا}_{\text{ھ}=۰} \frac{\text{ب}_\text{م}(\text{ی}+\text{ھ}) - \text{ب}_\text{م}(\text{ی})}{\text{ھ}}$ بھی لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔

صرف اسوقت جبکہ یہ انتہا یعنی $\text{نہا}_{\text{ھ}=۰} \frac{\text{ب}_\text{م}(\text{ی}+\text{ھ}) - \text{ب}_\text{م}(\text{ی})}{\text{ھ}}$ لا انتہا چھوٹی ہو مشتق سلسلہ کو ف (ی) کے مشتق تفاعل کے طور پر استعمال کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً اگر $\text{ب}_\text{م}(\text{ی})$ کی شکل $\frac{۱}{\text{م}}$ جب م ی ہوتی تو ہم دیکھتے کہ

$$\text{نہا} \frac{\text{ب}_\text{م}(\text{ی}+\text{ھ}) - \text{ب}_\text{م}(\text{ی})}{\text{ھ}} = ۱ \text{ جم م ی}$$

جو صفر کی طرف مستدق نہیں ہوتا جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن قیمتوں ± ۱ کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔

۲۹۴ ــ جملہ

$$\text{جم ی} = \left(۱ - \frac{۴\text{ی}^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{۴\text{ی}^۲}{۳^۲\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{۴\text{ی}^۲}{۵^۲\pi^۲}\right)\ldots\ldots$$

سے دفعہ ماسبق کے مماثل طریقہ استعمال کرکے ہم لامتناہی سلسلہ

$$\text{مس ی} = \frac{1}{\text{ی}+\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{\text{ی}+\frac{3}{2}\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\frac{3}{2}\pi} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{\text{ی}+\frac{1}{2}(2\text{م}-1)\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\frac{1}{2}(2\text{م}-1)\pi} + \cdots \quad (9)$$

$$\text{یا مس ی} = 8\,\text{ی} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2\text{م}-1)^2\pi^2 - 4\text{ی}^2} \quad \ldots\ldots (10)$$

حاصل کرتے ہیں۔ سلسلہ (۹) نیم مستدق ہے لیکن سلسلہ (۱۰) مطلقاً مستدق ہے ی کی سب قیمتوں کے لئے بجز $\pm\frac{1}{2}\pi$، $\pm\frac{3}{2}\pi$، $\pm\frac{5}{2}\pi$، ... کے۔

۲۹۵ — ضابطوں $\text{قم ی} = \text{م}\,\frac{1}{2}\text{ی} - \text{م ی}$، یا $\text{قم ی} = \frac{1}{2}\text{م}\,\frac{1}{2}\text{ی} + \frac{1}{2}\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{ی}$ کے ذریعہ قم ی کے لئے سلسلہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ پہلے ضابطہ کو لیکر اس میں مماس التماموں کی بجائے ان کے سلسلے درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{قم ی} = \left[\frac{2}{\text{ی}} + \frac{2}{\text{ی}+2\pi} + \frac{2}{\text{ی}-2\pi} + \frac{2}{\text{ی}+4\pi} + \frac{2}{\text{ی}-4\pi} + \cdots\right]$$

$$- \left[\frac{1}{\text{ی}} + \frac{1}{\text{ی}+\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\pi} + \frac{1}{\text{ی}+2\pi} + \frac{1}{\text{ی}-2\pi} + \cdots\right]$$

پس قم ی

$$= \frac{1}{\text{ی}} - \frac{1}{\text{ی}+\pi} - \frac{1}{\text{ی}-\pi} + \frac{1}{\text{ی}+2\pi} + \frac{1}{\text{ی}-2\pi} - \frac{1}{\text{ی}+3\pi} - \frac{1}{\text{ی}-3\pi} + \cdots$$

$$\ldots\ldots,\ldots\ldots (11)$$

یا قم ی = $\frac{1}{ی} + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{ر} ۲ ی}{(ی^۲ - ر^۲ \pi^۲)}$ ، .... (۱۲)

ضابطہ (۱۱) میں ی کو ی + $\frac{1}{۲}\pi$ میں تبدیل کرو تو

قط ی = $\left(\frac{1}{ی + \frac{1}{۲}\pi} - \frac{1}{ی - \frac{1}{۲}\pi}\right) - \left(\frac{1}{ی + \frac{۳}{۲}\pi} - \frac{1}{ی - \frac{۳}{۲}\pi}\right)$

+ .... (۱۳)

یا قط ی = $۴ \sum \frac{(-1)^{ر-1} (۲ ر - 1) \pi}{(۲ ر - 1)^۲ \pi^۲ - ۴ ی^۲}$ ، .... (۱۴)

اس سلسلہ کی عام رقم جبکہ ر بڑا ہو قیمت $\frac{(-1)^{ر-1}}{۲ ر - 1}$ کے قریب آتی ہے،

اس لئے یہ سلسلہ صرف نیم مستدق ہے ۔

مماس التمامی اور مماسی سلسلے حسب ذیل طریقہ پر بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں

جب (ی + ھ) اور جب ی کے لئے لامتناہی حاصل ضربوں کے جو جملے ہیں انکو استعمال کرو تو عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{جب (ی + ھ)}{جب ی} = \left(1 + \frac{ھ}{ی}\right)\left(\frac{\pi^۲ - ی^۲ - ھ^۲ - ۲ ھ ی}{\pi^۲ - ی^۲}\right)\left(\frac{۲^۲\pi^۲ - ی^۲ - ھ^۲ - ۲ ھ ی}{۲^۲\pi^۲ - ی^۲}\right)$

....

اب اگر ہم مان لیں کہ بائیں جانب کا حاصل ضرب عمل ضرب کی تکمیل سے ھ کی قوتوں میں پھیلایا جا سکتا ہے اور اگر ہم دائیں جانب کو شکل جم ھ + جیب ھ مم ی میں رکھیں تو ھ کی قوتوں میں پھیلانے اور مساوات کی طرفین میں ھ کے سروں کو مساوی رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

مم ی = $\frac{1}{ی} + \frac{۲ ی}{ی^۲ - \pi^۲} + \frac{۲ ی}{ی^۲ - ۲^۲\pi^۲} + \ldots\ldots$ ، (۸)

ہم نے یہ جو مان لیا ہے کہ وہ لامتناہی حاصل ضرب جسکے سر معمولی عمل ضرب سے حاصل شدہ لامتناہی سلسلے ہیں ھ کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں

ترتیب دیا جاسکتا ہے اِسکی واجبیت کے لئے اُن شرطوں کی تحقیق کرنی ہوگی کہ ایسے عمل سے صحیح نتیجہ پیدا ہو، لیکن اس کے لئے بعض عام مسئلوں کی ضرورت پڑیگی جنکو بیان کرنے کی یہاں گنجائش نہیں ہے۔

مماسی سلسلہ بھی اسی طرح لامتناہی حاصل ضرب

$$\frac{\text{جم}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جم ی}}=\left(\frac{\pi^2-۴\text{ی}^2-۴\text{ھ}^2-۸\text{ھ ی}}{\pi^2-۴\text{ی}^2}\right)\left(\frac{۳^2\pi^2-۴\text{ی}^2-۴\text{ھ}^2-۸\text{ھ ی}}{۳^2\pi^2-۴\text{ی}^2}\right)\cdots$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اگر ی کے مماس التمام کو شکل

$$\prod\left(۱-\frac{۴\text{ی}^2}{(۲\text{م}-۱)^2\pi^2}\right)\Big\backslash\ \text{ی}\prod\left(۱-\frac{\text{ی}^2}{\text{م}^2\pi^2}\right)$$

میں بیان کیا جائے اور اِس جملہ کو جزوی کسروں میں تحویل کیا جائے جنکے نسب نما جملہ $\text{ی}\prod\left(۱-\frac{\text{ی}^2}{\text{م}^2\pi^2}\right)$ کے اجزائے ضربی ہوں تو ہمیں سلسلہ (۸) حاصل ہونا چاہئے، یہ بات مس ی، قط ی، قم ی پر بھی اسی طرح صادق آتی ہے۔ یہ سلسلے گلیشر نے بالراست اِس عمل تحویل کی تکمیل سے حاصل کئے تھے[۵]

دلیل کی قوتوں میں مماس، مماس التمام، قاطع اور قاطع التمام کو بیان کرنا

(360)

۲۹۶ — دفعہ ۲۹۳ میں یہ دکھایا جاچکا ہے کہ

$$\text{مم ی}=\frac{۱}{\text{ی}}-\sum_{\text{ر}}^{\text{م}}\frac{۲\text{ی}}{\text{ر}^2\pi^2-\text{ی}^2}+\text{ب}_\text{م}$$

جہاں $\text{ب}_\text{م}$ ایک عدد ہے جسکو م کے کافی بڑا لینے سے اسقدر

---

[۵] دیکھو Quarterly Journal, vol. xvii: Glaisher

چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں - اب اگر ی کا مقیاس ر π سے کم ہو تو

$$\frac{1}{\text{ر}^2\pi^2-\text{ی}^2}=\frac{1}{\text{ر}^2\pi^2}\left(1+\frac{\text{ی}^2}{\text{ر}^2\pi^2}+\frac{\text{ی}^4}{\text{ر}^4\pi^4}+\cdots+\frac{\text{ی}^{2\text{س}}}{\text{ر}^{2\text{س}}\pi^{2\text{س}}}+\cdots\right)$$

پس اگر ہم یہ فرض کریں کہ ی کا مقیاس π سے کم ہے تو کسروں $\frac{1}{\text{ر}^2\pi^2-\text{ی}^2}$ میں سے ہر ایک کو اس طریقہ پر پھیلا سکتے ہیں اور چونکہ ان میں سے ہر سلسلہ مطلقاً مستدق ہے ہم نتیجہ کو ی کی قوتوں میں ترتیب دے سکتے ہیں اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{م ی}=\frac{1}{\text{ی}}-\frac{2\text{ی}}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{\text{م}^2}\right)-\frac{2\text{ی}^3}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{\text{م}^4}\right)$$

$$-\cdots-\frac{2\text{ی}^{2\text{ن}-1}}{\pi^{2\text{ن}}}\left(\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{2^{2\text{ن}}}+\cdots+\frac{1}{\text{م}^{2\text{ن}}}\right)-\cdots$$

$$\cdots+\text{ب}_\text{م}$$

فرض کرو کہ $\text{م}_{2\text{ن}}$ سے مستدق سلسلہ

$$\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{2^{2\text{ن}}}+\cdots+\frac{1}{\text{م}^{2\text{ن}}}+\cdots\cdots$$

کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، تب $\text{م}_{2\text{ن}}=\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{2^{2\text{ن}}}+\cdots+\frac{1}{\text{م}^{2\text{ن}}}\cdots$ $+\,\text{ص}_{2\text{ن}}$ جہاں $\text{ص}_{2\text{ن}}$ ایک عدد ہے جو م کو کافی بڑا لینے سے اسقدر چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں۔

تب $\text{م ی}=\frac{1}{\text{ی}}-\frac{2\text{ی}}{\pi^2}\text{م}_2-\frac{2\text{ی}^3}{\pi^4}\text{م}_4-\cdots\cdots-\frac{2\text{ی}^{2\text{ن}-1}}{\pi^{2\text{ن}}}\text{م}_{2\text{ن}}-\cdots$

$$+\ \text{ب}_{\text{م}} + \frac{۲\text{ی}}{\pi^{۲}}\text{صہ}_{۲} + \frac{۲\text{ی}^{۳}}{\pi^{۴}}\text{صہ}_{۴} + \ldots + \frac{۲\text{ی}^{۲ن-۱}}{\pi^{۲ن}}\text{صہ}_{۲ن} + \ldots$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{صہ}_{۲} > \text{صہ}_{۴} > \text{صہ}_{۶} \ldots$، پس

$$\frac{۲\text{ی}}{\pi^{۲}}\text{صہ}_{۲} + \frac{۲\text{ی}^{۳}}{\pi^{۴}}\text{صہ}_{۴} + \ldots\ldots$$

کا مقیاس $< \text{صہ}_{۲}\left(\frac{۲|\text{ی}|}{\pi^{۲}} + \frac{۲|\text{ی}|^{۳}}{\pi^{۴}} + \ldots\ldots\right)$

خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستدق ہے کیونکہ مق ی $< \pi$،
اسلئے م کو کافی بڑا لینے سے $\sum \frac{۲\text{ی}^{۲ن-۱}}{\pi^{۲ن}}\text{صہ}_{۲ن}$ کے مقیاس کو اتنا چھوٹا (361)
بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ پس مم ی کے لئے یہ لامتناہی سلسلہ ملتا ہے

$$\text{مم ی} = \frac{۱}{\text{ی}} - \frac{۲\text{ی}}{\pi^{۲}}\text{صہ}_{۲} - \frac{۲\text{ی}^{۳}}{\pi^{۴}}\text{صہ}_{۴} - \frac{۲\text{ی}^{۵}}{\pi^{۶}}\text{صہ}_{۶} - \ldots \quad (۱۵)$$

جو ی کی سب قیمتوں کے لئے درست ہے ایسی کہ مق ی $< \pi$،
اور بالخصوص $\pm\pi$ کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے۔

مسئلہ

$$\text{مس ی} = ۸\sum_{۱}^{\text{م}} \frac{\text{ی}}{(۲\text{ر}-۱)^{۲}\pi^{۲} - ۴\text{ی}^{۲}} + \text{بَ}_{\text{م}}$$

سے اسی طریقہ پر مس ی کے لئے سلسلہ ی کی صعودی قوتوں میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس سلسلہ کو مماثلہ مس ی = مم ی - ۲مم ۲ی کے ذریعہ بھی (۱۵) سے اخذ کر سکتے ہیں۔ اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$\text{مس ی} = \frac{۲(۲^{۲}-۱)\text{ی}}{\pi^{۲}}\text{صہ}_{۲} + \frac{۲(۲^{۴}-۱)\text{ی}^{۳}}{\pi^{۴}}\text{صہ}_{۴} + \frac{۲(۲^{۶}-۱)\text{ی}^{۵}}{\pi^{۶}}\text{صہ}_{۶} + \ldots،\quad (۱۶)$$

جو درست ہے اگر ی کا مقیاس $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہو، اور بالخصوص $\pm\frac{1}{2}\pi$ کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے۔

ضابطہ قم ی = مم $\frac{1}{2}$ ی - مم ی میں مم $\frac{1}{2}$ ی، مم ی کی بجائے انکی قیمتیں (۱۵) سے لیکر درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{قم ی} = \frac{1}{\text{ی}} + (2-1)\frac{\text{ی}}{2\pi^2}\text{م}_2 + \frac{2^3-1}{2^3}\times\frac{\text{ی}^3}{\pi^4}\text{م}_4 + \frac{2^5-1}{2^5}\times\frac{\text{ی}^5}{\pi^6}\text{م}_6 + \ldots\ldots \quad (17)$$

جو درست رہتا ہے اگر مق ی $<\pi$۔

۲۹۷ — ی کی قوتوں میں قط ی کے لئے سلسلہ حاصل کرنیکے لئے ضابطہ

$$\text{قط ی} = 4\pi\left(\frac{1}{\pi^2-4\text{ی}^2} - \frac{3}{3^2\pi^2-4\text{ی}^2} + \frac{5}{5^2\pi^2-4\text{ی}^2} - \ldots + \frac{(-1)^{\text{م}-1}(2\text{م}-1)}{(2\text{م}-1)^2\pi^2-4\text{ی}^2}\right) + \text{بَ}_\text{م}$$

استعمال کیا جاتا ہے جبکہ یہ فرض کرلیا گیا ہو کہ ی کا مقیاس $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہے۔ ہر کسر کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{قط ی} = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{\text{م}-1}}{2\text{م}-1}\right\} + \frac{4^2}{\pi^3}\text{ی}^2\left\{\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots + \frac{(-1)^{\text{م}-1}}{(2\text{م}-1)^3}\right\} + \ldots + \frac{2^{2\text{ن}+2}}{\pi^{2\text{ن}+1}}\text{ی}^{2\text{ن}}\left\{\frac{1}{1^{2\text{ن}+1}} - \frac{1}{3^{2\text{ن}+1}} + \ldots + \frac{(-1)^{\text{م}-1}}{(2\text{م}-1)^{2\text{ن}+1}} + \ldots\right\} + \ldots + \text{بَ}_\text{م}$$

(362)

اب فرض کرو کہ $ص_{۲ن+۱}$ سے لامتناہی سلسلہ

$$\frac{۱}{۱^{۲ن+۱}} - \frac{۱}{۳^{۲ن+۱}} + \frac{۱}{۵^{۲ن+۱}} - \ldots\ldots$$

کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، اور فرض کرو پہلی م رقموں کے بعد کا باقی $صہ_{۲ن+۱}$ ہے، تب

$$قطی = \frac{۲}{\pi} ص_۱ + \frac{۲^۲}{\pi^۳} ی^۲ ص_۳ + \ldots + \frac{۲^{۲ن+۲}}{\pi^{۲ن+۱}} ی^{ن} ص_{۲ن+۱} + \ldots$$

$$+ ب \frac{}{م} + \frac{۲}{\pi} صہ_۱ + \frac{۲^۲}{\pi^۳} ی^۲ صہ_۳ + \ldots\ldots$$

فرض کرو کہ عددوں $صہ_۱$، $صہ_۲$، $صہ_۳$... میں سے بڑے سے بڑا عدد $\bar{صہ}$ ہے تو $\frac{۲}{\pi} صہ_۱ + \frac{۲^۲}{\pi^۳} ی^۲ صہ_۳ + \ldots$ کا مقیاس، سلسلہ

$$\frac{۲}{\pi} + \frac{۲^۲}{\pi^۳} |ی|^۲ + \frac{۲^۶}{\pi^۵} |ی|^۴ + \ldots\ldots$$

کے مجموعے سے $\bar{صہ}$ گنا سے کم ہے، یہ آخری سلسلہ مستدق ہے کیونکہ ی کا مقیاس بموجب فرض $\frac{۱}{۲}\pi$ سے کم ہے۔

پس یہ ثابت ہو چکا کہ اس سلسلہ کا باقی جو ہم نے قطی کے لئے حاصل کیا ہے ایک عدد ہے جس کا مقیاس لا انتہا گھٹتا ہے جیسے م بڑھتا ہے، اس لئے قطی کے لئے لامتناہی سلسلہ ملتا ہے

$$قطی = \frac{۲}{\pi} ص_۱ + \frac{۲^۲}{\pi^۳} ی^۲ ص_۳ + \frac{۲^۶}{\pi^۵} ی^۴ ص_۵ + \ldots\ldots \quad (۱۸)$$

جو درست ہے اگر حق ی $< \frac{1}{2}\pi$ ۔

۲۹۸ — جبر و مقابلہ کا یہ ایک مشہور مسئلہ ہے کہ تفاعل $\frac{ی}{و^{ی}-1}$ کو

جہاں $و^{ی}$ اپنی صدر قیمت رکھتا ہے شکل

$$1 - \frac{1}{2}ی + \frac{ب_1}{\underline{|2}}ی^{2} - \frac{ب_2}{\underline{|4}}ی^{4} + \dots + (-1)^{ن-1}\frac{ب_ن}{\underline{|2ن}}ی^{2ن} + \dots$$

کے ایک سلسلہ میں پھیلایا جا سکتا ہے جہاں $ب_1، ب_2، \dots ب_ن \dots$
خاص عدد ہیں جنکو برنولی (Bernouilli) کے عدد کہتے ہیں،
اور نیز یہ کہ یہ پھیلاؤ ی کی اُن تمام قیمتوں کے لئے درست ہے جنکے لئے
سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

اگر ہم اِس کو $و^{ی}-1$ سے ضرب دیں تو

$$ی = \left\{ی + \frac{ی^{2}}{\underline{|2}} + \dots + \frac{ی^{2ن}}{\underline{|2ن}} + \dots\right\}\left\{1 - \frac{1}{2}ی + \frac{ب_1}{\underline{|2}}ی^{2} - \frac{ب_2}{\underline{|4}}ی^{4} + \dots + (-1)^{ن-1}\frac{ب_ن}{\underline{|2ن}}ی^{2ن} + \dots\right\}$$

جہاں $|ی|$ کو اتنا چھوٹا لیا گیا ہے کہ بائیں جانب کے دونوں سلسلے
مطلقاً مستدق ہیں۔ اِن سلسلوں کو باہم ضرب دیکر حاصل ضرب کو ی
کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں ترتیب دے سکتے ہیں۔ یہ محصلہ
سلسلہ مطلقاً مستدق ہوگا، اسلئے ی کی پہلی قوت سے اعلیٰ تر قوتوں کے
سروں کو صفر کے مساوی رکھنے سے مساواتوں کا ایک سلسلہ ملتا ہے

(363)

$$\frac{ب_۱}{|\underline{۲}} - \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{|\underline{۲}} + \frac{۱}{|\underline{۳}} = ۰ ،\quad -\frac{ب_۲}{|\underline{۴}} + \frac{ب_۱}{|\underline{۲}}\cdot\frac{۱}{|\underline{۳}} - \frac{۱}{|\underline{۴}}\cdot\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{|\underline{۵}} = ۰$$

وغیرہ، جنکی عام شکل ہے

$$\frac{ب_ن}{|\underline{۲ن}} - \frac{۱}{|\underline{۳}}\cdot\frac{ب_{ن-۱}}{|\underline{۲ن-۲}} + \dots + \frac{(-۱)^{ن}}{|\underline{۲ن-۱}}\cdot\frac{ب_۱}{|\underline{۲}}$$

$$-\frac{(-۱)^{ن-۱}}{|\underline{۲ن}}\cdot\frac{۱}{۲} + \frac{(-۱)^{ن}}{|\underline{۲ن+۱}} = ۰$$

ان مساواتوں کے ذریعہ عددوں $ب_۱$، $ب_۲$، ... کو محسوب کیا جا سکتا ہے، چنانچہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$ب_۱ = \frac{۱}{۶}،\ ب_۲ = \frac{۱}{۳۰}،\ ب_۳ = \frac{۱}{۴۲}،\ ب_۴ = \frac{۱}{۳۰}،\ ب_۵ = \frac{۵}{۶۶}،$$

$$ب_۶ = \frac{۶۹۱}{۲۷۳۰}،\ ب_۷ = \frac{۷}{۶}،$$ وغیرہ

۲۹۹ — مم ی، مس ی، قم ی کے پھیلاؤں میں (جو ی کی قوتوں میں حاصل کئے جا چکے ہیں) سروں کو برنولی کے عددوں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

چونکہ
$$مم\ ی = خ\,\frac{قو^{خی} + قو^{-خی}}{قو^{خی} - قو^{-خی}} = خ\left(۱ + \frac{۲}{قو^{۲خی} - ۱}\right)$$

اسلئے اگر مق ی کافی چھوٹا ہو تو

$$مم\ ی = \frac{۱}{ی} - \frac{۲^۲ ب_۱}{|\underline{۲}}\,ی - \frac{۲^۴ ب_۲}{|\underline{۴}}\,ی^۳ - \dots - \frac{۲^{۲ن} ب_ن}{|\underline{۲ن}}\,ی^{۲ن-۱} - \dots \quad (۱۹)$$

نیز قم ی = مم $\frac{1}{2}$ ی − مم ی، اسلئے

$$قم\ ی = \frac{1}{ی} + \frac{2(2-1)ب_1}{|\underline{2}} ی + \frac{2(2^3-1)ب_2}{|\underline{4}} ی^3 + \dots$$

$$+ \frac{2(2^{2ن-1}-1)ب_ن}{|\underline{2ن}} ی^{2ن-1} + \dots ، \dots (20)$$

نیز چونکہ مس ی = مم ی − ۲ مم ۲ ی، اسلئے

$$مس\ ی = \frac{2^2(2^2-1)ب_1}{|\underline{2}} ی + \frac{2^4(2^4-1)ب_2}{|\underline{4}} ی^3 + \dots$$

$$+ \frac{2^{2ن}(2^{2ن}-1)ب_ن}{|\underline{2ن}} ی^{2ن-1} + \dots ، \dots (21)$$

یہ ثابت کیا جاچکا ہے کہ سلسلے (۱۹) اور (۲۰) مستدق ہیں اگر مق ی $< \pi$ اور سلسلہ (۲۱) مستدق ہے اگر مق ی $< \frac{1}{2}\pi$۔ سلسلے (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) علی الترتیب سلسلوں (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) کے مماثل ہونے چاہئیں، پس (۱۹) کے سروں کو (۱۵) کے سروں کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{2}{\pi^2} م_2 = \frac{2^2}{|\underline{2}} ب_1 ، \quad \frac{2}{\pi^4} م_4 = \frac{2^4}{|\underline{4}} ب_2 ، \dots \quad \frac{2}{\pi^{2ن}} م_{2ن}$$

$$= \frac{2^{2ن}}{|\underline{2ن}} ب_ن ،$$

اس لئے دفعہ ۲۹۸ میں دی ہوئی ب۱، ب۲، . . . کی قیمتوں کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$م_2 = \frac{\pi^2}{6} ، \quad م_4 = \frac{\pi^4}{90} ، \quad م_6 = \frac{\pi^6}{945} ، \quad م_8 = \frac{\pi^8}{9450} ، \dots$$

(364)

$$\text{م}_{\text{٢ن}} = \frac{\text{٢}^{\text{٢ن-١}}\ \pi^{\text{٢ن}}}{\left|\underline{\text{٢ن}}\right.}\ \text{ب}_{\text{ن}}$$

اس طرح م$_{\text{٢ن}}$ اُن ضابطوں کی مدد سے محسوب کیا جا سکتا ہے جن سے ب$_{\text{ن}}$ ملتا ہے ۔

سلسلے (١٩) اور (٢١) کسی زاویے کے مماس یا مماس اتمام کو محسوب کرنے میں راست استعمال کیے جا سکتے ہیں، ان سلسلوں کی پہلی چند رقمیں ہیں

$$\text{مم لا} = \frac{\text{١}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{٣}} - \frac{\text{لا}^{\text{٣}}}{\text{٤٥}} - \frac{\text{٢ لا}^{\text{٥}}}{\text{٩٤٥}} - \ldots\ldots ,$$

$$\text{مس لا} = \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{٣}}}{\text{٣}} + \frac{\text{٢ لا}^{\text{٥}}}{\text{١٥}} + \frac{\text{١٧ لا}^{\text{٧}}}{\text{٣١٥}} + \ldots\ldots$$

مس $(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \text{٩٠}^\circ)$، مم $(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \text{٩٠}^\circ)$ کو محسوب کرنے کا عمل حسب طریقہ ذیل انجام پا سکتا ہے :-

مس (م \ ن × ٩٠°) =

٢ م ن \ (ن² - م²) × ٫٦٣٦٦١٩٧٧٢٣٦٧٥

+ م \ ن × ٫٢٩٧٥٥٦٧٨٢٠٥٩٧

+ م³ \ ن³ × ٫٠١٨٦٨٨٦٥٠٢٧٧٣

+ م⁵ \ ن⁵ × ٫٠٠١٨٤٢٤٧٥٢٠٣٤

+ م⁷ \ ن⁷ × ٫٠٠٠١٩٧٥٨٠٠٧١٤

+ م⁹ \ ن⁹ × ٫٠٠٠٠٢١٦٩٧٧٢٤٥

+ م¹¹ \ ن¹¹ × ٫٠٠٠٠٠٢٤٠١١٣٧٠

+ م¹³ \ ن¹³ × ٫٠٠٠٠٠٠٢٦٦٤١٣٢

+ م¹⁵ \ ن¹⁵ × ٫٠٠٠٠٠٠٠٢٩٥٨٦٤

+ م¹⁷ \ ن¹⁷ × ٫٠٠٠٠٠٠٠٠٣٢٨٦٧

+ م^{۱۹} \ ن^{۱۹} × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۶۵۱

+ م^{۲۱} \ ن^{۲۱} × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۰۵

+ م^{۲۳} \ ن^{۲۳} × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۵

+ م^{۲۵} \ ن^{۲۵} × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵

مم (م \ ن × ۹۰°) =

ن \ م × ء۶۳۶۶۱۹۷۷۲۳۶۷۵۸۱

− ۴ م ن \ (۴ ن^{۲} − م^{۲}) × ء۳۱۸۳۰۹۸۸۶۱۸۳۷

− م \ ن × ء۲۰۵۲۸۸۸۸۹۴۱۴۵

− م^{۳} \ ن^{۳} × ء۰۰۶۵۵۱۰۷۴۷۸۸۲

− م^{۵} \ ن^{۵} × ء۰۰۰۳۴۵۰۲۹۲۵۵۴

− م^{۷} \ ن^{۷} × ء۰۰۰۰۲۰۲۷۹۱۰۶۰

− م^{۹} \ ن^{۹} × ء۰۰۰۰۰۱۲۳۶۶۵۲۷

− م^{۱۱} \ ن^{۱۱} × ء۰۰۰۰۰۰۰۷۶۴۹۵۹

− م^{۱۳} \ ن^{۱۳} × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۷۵۹۷

− م^{۱۵} \ ن^{۱۵} × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۹۶۹

− م^{۱۷} \ ن^{۱۷} × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۸۵

− م^{۱۹} \ ن^{۱۹} × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۱

ان جملوں میں رقموں $\frac{8\,\text{ی}}{\pi^2 - 4\,\text{ی}^2}$ ، $\frac{1}{\text{ی}} - \frac{2\,\text{ی}}{\pi^2 - \text{ی}^2}$ کو جو ضابطوں (۱۰) اور (۸) میں واقع ہوتی ہیں الگ الگ اول محسوب کرلیا جاتا ہے، تب ان رقموں کے بعد یہ سلسلے زیادہ سرعت کے ساتھ ستدق ہوتے ہیں ۔

یہ سلسلے یولر کی Analysis of the Infinite سے لئے گئے ہیں جس میں انکوائس نے اعشاریہ کے بیس مقامات تک معلوم کیا ہے ۔

(365)

لوکارثمی جیب اور جیب التمام کیلئے جملے

۳۰۰ ۔ دفعہ ۲۸۵ میں ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ

$$\text{جیب ی} = \text{ی}\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{\text{م}^2\pi^2}\right)\left(1 - \text{ط}_\text{م}\right)،$$

$$\text{جم ی} = \left(1 - \frac{4\,\text{ی}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{ی}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4\,\text{ی}^2}{(2\text{م}-1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \text{طَ}_\text{م}\right)،$$

جہاں طم ، طَم ایسے عدد ہیں جنکے مقیاس م کو کافی بڑا لینے سے اتنے چھوٹے بنائے جاسکتے ہیں جتنا ہم چاہیں ۔ اب لوکارثم لینے سے

$$\text{لوک جیب ی} = \text{لوک ی} + \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{\pi^2}\right) + \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{2^2\pi^2}\right) + \cdots$$

$$+ \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{\text{م}^2\pi^2}\right) + \text{لوک}\left(1 - \text{ط}_\text{م}\right)،$$

$$\text{لوک جم ی} = \text{لوک}\left(1 - \frac{4\,\text{ی}^2}{\pi^2}\right) + \text{لوک}\left(1 - \frac{4\,\text{ی}^2}{3^2\pi^2}\right) + \cdots$$

$$+ \text{لوک}\left(1 - \frac{4\,\text{ی}^2}{(2\text{م}-1)^2\pi^2}\right) + \text{لوک}\left(1 - \text{طَ}_\text{م}\right)،$$

پہلی صورت میں مان لو کہ $|\text{ی}| < \pi$ اور دوسری صورت میں $< \frac{\pi}{\text{۲}}$ تاکہ یہ لوکارثم ی کی قوتوں میں مطلقاً مستدق سلسلوں میں پھیلائے جا سکیں، تب ان لوکارثموں کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک}\ \frac{\text{جب ی}}{\text{ی}} = -\sum_{\text{ن}=\text{۱}}^{\text{ن}=\infty} \left(\frac{\text{۱}}{\text{۱}^{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲ن}}} + \cdots + \frac{\text{۱}}{\text{م}^{\text{۲ن}}} \right) \frac{\text{ی}^{\text{۲ن}}}{\text{ن}\,\pi^{\text{۲ن}}} + \text{لوک}\,(\text{۱} - \text{ط}_{\text{م}})\text{،}$$

$$\text{لوک جم ی} = -\sum_{\text{ن}=\text{۱}}^{\text{ن}=\infty} \left(\frac{\text{۱}}{\text{۱}^{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۲ن}}} + \cdots + \frac{\text{۱}}{(\text{۲م}-\text{۱})^{\text{۲ن}}} \right) \frac{\text{۲}^{\text{۲ن}}\,\text{ی}^{\text{۲ن}}}{\text{ن}\,\pi^{\text{۲ن}}} + \text{لوک}\,(\text{۱} - \bar{\text{ط}}_{\text{م}})\text{،}$$

اب

$$\frac{\text{۱}}{\text{۱}^{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۲ن}}} + \cdots\cdots$$

$$= \left(\frac{\text{۱}}{\text{۱}^{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}^{\text{۲ن}}} + \cdots \right) + \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲ن}}} \left(\frac{\text{۱}}{\text{۱}^{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۲ن}}} + \cdots \right)$$

اس لئے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۱}^{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}^{\text{۲ن}}} + \cdots = \frac{\text{۲}^{\text{۲ن}} - \text{۱}}{\text{۲}^{\text{۲ن}}}\, \text{ص}_{\text{۲ن}}\text{،} \qquad (366)$$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک}\ \frac{\text{جب ی}}{\text{ی}} = -\sum \frac{\text{ی}^{\text{۲ن}}}{\text{ن}\,\pi^{\text{۲ن}}}\, \text{ص}_{\text{۲ن}} + \text{لوک}\,(\text{۱} - \text{ط}_{\text{م}})\text{،}$$

$$\text{لوک جم ی} = -\sum \frac{\text{۲}^{\text{۲ن}} - \text{۱}}{\text{ن}\,\pi^{\text{۲ن}}}\, \text{ی}^{\text{۲ن}}\, \text{ص}_{\text{۲ن}} + \text{لوک}\,(\text{۱} - \bar{\text{ط}}_{\text{م}})$$

جہاں سلسلوں

$$\frac{1}{1^2 \text{ن}^2} + \frac{1}{2^2 \text{ن}^2} + \cdots ، \quad \frac{1}{1^2 \text{ن}^2} + \frac{1}{3^2 \text{ن}^2} + \cdots\cdots$$

کی م رقموں کے بعد کے باقی $\text{ص}_{\text{ن}1}$، $\text{ض}_{\text{ن}2}$ ہیں۔

$\sum \frac{\text{ی}^{2\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}\,\text{ص}_{2\text{ن}}$ کا مقیاس صہ $\sum \frac{|\text{ی}|^{2\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}$ سے کم ہے اور

$\sum \frac{2^{2\text{ن}}\,\text{ی}^{2\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}\,\text{ض}_{2\text{ن}}$ کا مقیاس ضہ $\sum \frac{2^{2\text{ن}}\,|\text{ی}|^{2\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}$ سے کم ہے جہاں

صہ، ضہ علی الترتیب $\text{ص}_{2\text{ن}}$، $\text{ض}_{2\text{ن}}$ کی بڑی سے بڑی قیمتیں ہیں۔ پس

$$\text{لوک}\ \frac{\text{جب ی}}{\text{ی}} = -\sum \frac{\text{ی}^{2\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}\,\text{م}_{2\text{ن}}،$$

$$\text{لوک جم ی} = \sum \frac{1-2^{2\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{2\text{ن}}}\,\text{ی}^{2\text{ن}}\,\text{م}_{2\text{ن}}$$

اب چونکہ $\text{م}_{2\text{ن}} = \frac{2^{2\text{ن}-1}\,\pi^{2\text{ن}}}{(2\text{ن})!}\,\text{ب}_\text{ن}$ اسلئے لوک $\frac{\text{جب ی}}{\text{ی}}$،

لوک جم ی کے لئے حسب ذیل لامتناہی سلسلے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{لوک}\ \frac{\text{جب ی}}{\text{ی}} = -2\,\frac{\text{ب}_1}{1}\,\frac{\text{ی}^2}{2!} - 2^3\,\frac{\text{ب}_2}{2}\,\frac{\text{ی}^4}{4!} - \cdots\cdots$$

$$\cdots - 2^{2\text{ن}-1}\,\frac{\text{ب}_\text{ن}}{\text{ن}}\,\frac{\text{ی}^{2\text{ن}}}{(2\text{ن})!} - \cdots\cdots، \cdots\cdots \quad (22)$$

جہاں مق ی $< \pi$ ،

$$\text{لوک جم ی} = -۲(۲-۱)\frac{\text{ب}_۱}{۱}\frac{\text{ی}^۲}{\lfloor ۲} - ۲^۳(۲^۴-۱)\frac{\text{ب}_۲}{۲}\frac{\text{ی}^۴}{\lfloor ۴} - \ldots$$

$$- ۲^{۲\text{ن}-۱}(۲^{۲\text{ن}}-۱)\frac{\text{ب}_\text{ن}}{\text{ن}}\frac{\text{ی}^{۲\text{ن}}}{\lfloor ۲\text{ن}} - \ldots\ldots \quad (۲۳)$$

جہاں مق ی $< \frac{۱}{۲}\pi$ ۔

سلسلوں (۲۲)، (۲۳) کی پہلی چند رقمیں ہیں

$$\text{لوک} \frac{\text{جب ی}}{\text{ی}} = -\frac{\text{ی}^۲}{۶} - \frac{\text{ی}^۴}{۱۸۰} - \frac{\text{ی}^۶}{۲۸۳۵} - \ldots\ldots ،$$

$$\text{لوک جم ی} = -\frac{\text{ی}^۲}{۲} - \frac{\text{ی}^۴}{۱۲} - \frac{\text{ی}^۶}{۴۵} - \ldots\ldots\ldots$$

اسلئے نیز

$$\text{لوک مس ی} = \text{لوک ی} + \frac{\text{ی}^۲}{۳} + \frac{۷\text{ی}^۴}{۳۰} + \frac{۶۲\text{ی}^۶}{۲۸۳۵} + \ldots\ldots$$

(367)

سلسلوں (۲۲)، (۲۳) کو لوکارتمی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں تیار کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے، سب سے بہتر یہ ہے کہ لوکارتموں لوک $(۱ - \frac{\text{ی}^۲}{\pi^۲})$، لوک $(۱ - \frac{۴\text{ی}^۲}{\pi^۲})$ کے پہلے لوکارتم الگ الگ محسوب کر لئے جائیں کیونکہ اس طرح یہ سلسلے (۲۲)، (۲۳) کی بہ نسبت تیز تر مستدق شکل میں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{لوک جب} \frac{\text{م}\pi}{۲\text{ن}} = \text{لوک}\,\pi + \text{لوک}\frac{\text{م}}{۲\text{ن}} + \text{لوک}\left(۱ - \frac{\text{م}^۲}{۴\text{ن}^۲}\right)$$

$$- \sum \left\{ \frac{\text{ب}_\text{ر}}{۲\text{ر}}\left(\frac{\pi^{۲\text{ر}}}{\lfloor ۲\text{ر}} - \frac{۱}{۲^{۲\text{ر}}}\right)\frac{\text{م}^{۲\text{ر}}}{\text{ن}^{۲\text{ر}}} \right\} ،$$

$$\text{لوک جم}\ \frac{\text{م}\,\pi}{۲\,\text{ن}} = \text{لوک}\left(۱ - \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ن}^{۲}}\right) - \Sigma \left\{ \frac{۲^{۲\text{ر}} - ۱}{۲}\ \frac{\text{ب}_{\text{ر}}}{\text{ر}}\ \frac{\pi^{۲\text{ر}}}{\lfloor ۲\text{ر}}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{۱}{\text{ر}}\right) \frac{\text{م}^{۲\text{ر}}}{\text{ن}^{۲\text{ر}}} \right\}$$

اِن مساواتوں کی بائیں جانب کے لوکارتموں کو مقیاس ۰٫۴۳۴۲۹۴۴۸۱۹ سے ضرب دینے سے ہمیں جب $\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times ۹۰^{\circ}\right)$، جم $\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times ۹۰^{\circ}\right)$ کے معمولی لوکارتم اساس ۱۰ پر حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح جو ضابطے ملتے ہیں وہ حسب ذیل ہیں:

ل جب (م \ ن × ۹۰°) =

لوک م + لوک (۲ن − م) + لوک (۲ن + م)

− ۳ لوک ن + ۹٫۵۹۴۰۵۹۸۸۵۷۰۲۱۹۰

− $\text{م}^{۲}$ \ $\text{ن}^{۲}$ × ٫۰۷۰۰۲۲۸۲۶۶۰۵۹۰۱

− $\text{م}^{۴}$ \ $\text{ن}^{۴}$ × ٫۰۰۱۱۱۷۲۶۶۴۴۱۶۶۱

− $\text{م}^{۶}$ \ $\text{ن}^{۶}$ × ٫۰۰۰۰۳۹۲۲۹۱۴۶۴۵۳

− $\text{م}^{۸}$ \ $\text{ن}^{۸}$ × ٫۰۰۰۰۰۱۷۲۹۲۷۰۷۹۸

− $\text{م}^{۱۰}$ \ $\text{ن}^{۱۰}$ × ٫۰۰۰۰۰۰۰۸۴۳۶۲۹۸۶

− $\text{م}^{۱۲}$ \ $\text{ن}^{۱۲}$ × ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۴۳۴۸۷۱۵

− $\text{م}^{۱۴}$ \ $\text{ن}^{۱۴}$ × ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۴۹۳۱

− $\text{م}^{۱۶}$ \ $\text{ن}^{۱۶}$ × ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۶۵۹

− $\text{م}^{۱۸}$ \ $\text{ن}^{۱۸}$ × ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۷۰۲

− $\text{م}^{۲۰}$ \ $\text{ن}^{۲۰}$ × ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۹

ل جم (م/ن × ۹۰°) =
لوک (ن − م) + لوک (ن + م) − ۲ لوک ن

\+ ۱۰ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

− $م^{2}$ / $ن^{2}$ × ء۱۰۱۴۹۴۸۵۹۳۴۱۸۹۲

− $م^{4}$ / $ن^{4}$ × ء۰۰۳۱۸۷۲۹۴۰۶۵۴۵۱

− $م^{6}$ / $ن^{6}$ × ء۰۰۰۲۰۹۴۸۵۸۰۰۰۱۷

− $م^{8}$ / $ن^{8}$ × ء۰۰۰۰۱۶۸۴۸۳۴۸۵۹۷

− $م^{10}$ / $ن^{10}$ × ء۰۰۰۰۰۱۴۸۰۱۹۳۹۸۶

− $م^{12}$ / $ن^{12}$ × ء۰۰۰۰۰۰۱۳۶۵۰۲۲۷۲

− $م^{14}$ / $ن^{14}$ × ء۰۰۰۰۰۰۰۱۲۹۸۱۷۱۵

− $م^{16}$ / $ن^{16}$ × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۶۱۴۷۱

− $م^{18}$ / $ن^{18}$ × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۴۵۶۷

− $م^{20}$ / $ن^{20}$ × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۴۵۶

− $م^{22}$ / $ن^{22}$ × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۵۸

− $م^{24}$ / $ن^{24}$ × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۸

− $م^{26}$ / $ن^{26}$ × ء۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۳

اِن سلسلوں کو یولر نے اعشاریہ کے بیس مقامات تک حاصل کیا تھا۔

مثالیں

۳۰ — (۱) $\sum_{1}^{\infty}\text{ن}^{-2}$ ، $\sum_{1}^{\infty}\text{ن}^{-4}$ ، $\sum_{1}^{\infty}(2\text{ن}-1)^{-2}$ ، $\sum_{1}^{\infty}(2\text{ن}-1)^{-4}$

کی قیمتیں معلوم کرو۔

چونکہ $$\text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \sum \text{لوک}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right)$$

$$= -\frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\sum\frac{1}{\text{ن}^2} - \frac{\text{لا}^4}{2\pi^4}\sum\frac{1}{\text{ن}^4} - \cdots$$

اور نیز $$\text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \text{لوک}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{6}+\frac{\text{لا}^4}{120}-\cdots\right)$$

$$= -\left(\frac{\text{لا}^2}{6}-\frac{\text{لا}^4}{120}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{لا}^2}{6}\right)^2-\cdots$$

(368)

اسلئے $\text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ کے اِن دو جملوں میں لا^2، لا^4 کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\sum\text{ن}^{-2} = \frac{1}{6}\pi^2 ،\quad \sum\text{ن}^{-4} = \frac{1}{90}\pi^4$$

پھر چونکہ $$\text{لوک جم لا} = \sum\text{لوک}\left\{1-\frac{4\text{لا}^2}{(2\text{ن}-1)^2\pi^2}\right\}$$

$$= -\frac{4\text{لا}^2}{\pi^2}\sum\frac{1}{(2\text{ن}-1)^2} - \frac{8\text{لا}^4}{\pi^4}\sum\frac{1}{(2\text{ن}-1)^4} - \cdots ،$$

اور نیز $$\text{لوک جم لا} = \text{لوک}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{2}+\frac{\text{لا}^4}{24}-\cdots\right)$$

$$= -\left(\frac{\text{لا}^2}{2}-\frac{\text{لا}^4}{24}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{لا}^2}{2}\right)^2$$

اس لئے $\text{لا}^{۲}$ اور $\text{لا}^{۴}$ کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\sum(۲\text{ن}-۱)^{-۲}=\frac{۱}{۸}\pi^{۲}\text{ ، }\sum(۲\text{ن}-۱)^{-۴}=\frac{۱}{۹۶}\pi^{۴}$$

(۲) لامتناہی سلسلہ $\frac{۱}{۱^{۲}+\text{لا}^{۲}}+\frac{۱}{۳^{۲}+\text{لا}^{۲}}+\frac{۱}{۵^{۲}+\text{لا}^{۲}}+\ldots$ کو جمع کرو۔

مسئلہ (۱۰) میں رکھو $۲\text{ی}=\text{خ لا}\,\pi$ ، اس طرح اس سلسلہ کا مجموعہ حاصل ہوگا

$$\frac{\pi}{۴\text{لا}}\ \text{مسنر}\ \frac{۱}{۲}\pi\,\text{لا}$$

یہ مجموعہ، جمنر π لا کے اجزائے ضربی والے جملہ سے لوکارتم لینے اور تفرق کرنے سے بھی راست حاصل کیا جا سکتا تھا۔

(۳) ثابت کرو کہ ان تمام عددوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ $\frac{۱۵}{\pi^{۲}}$ ہے جو کسی مفرد عدد کے مربع سے تقسیم پذیر نہیں ہیں۔

فرض کرو کہ مفرد عددوں ۲، ۳، ۵، ... کو ع، ب، ج، ... سے تعبیر کیا گیا ہے، تب مطلوبہ مجموعہ اِس لامتناہی حاصل ضرب

$$\left(۱+\frac{۱}{\text{ع}^{۲}}\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{ب}^{۲}}\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{ج}^{۲}}\right)\ldots\ldots$$

کے مساوی ہے۔ یہ حاصل ضرب

$$=\frac{\left(۱-\frac{۱}{\text{ع}^{۲}}\right)^{-۱}\left(۱-\frac{۱}{\text{ب}^{۲}}\right)^{-۱}\left(۱-\frac{۱}{\text{ج}^{۲}}\right)^{-۱}\ldots}{\left(۱-\frac{۱}{\text{ع}^{۴}}\right)^{-۱}\left(۱-\frac{۱}{\text{ب}^{۴}}\right)^{-۱}\left(۱-\frac{۱}{\text{ج}^{۴}}\right)^{-۱}\ldots}$$

$$\text{یا}=\frac{\left(۱+\frac{۱}{\text{ع}^{۲}}+\frac{۱}{\text{ع}^{۴}}+\ldots\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{ب}^{۲}}+\frac{۱}{\text{ب}^{۴}}+\ldots\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{ج}^{۲}}+\frac{۱}{\text{ج}^{۴}}+\ldots\right)\ldots}{\left(۱+\frac{۱}{\text{ع}^{۴}}+\frac{۱}{\text{ع}^{۸}}+\ldots\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{ب}^{۴}}+\frac{۱}{\text{ب}^{۸}}+\ldots\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{ج}^{۴}}+\frac{۱}{\text{ج}^{۸}}+\ldots\right)\ldots}$$

اور یہ
$$=\frac{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots}{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots}$$

یا
$$=\frac{\frac{1}{6}\pi^2}{\frac{1}{90}\pi^4}=\frac{15}{\pi^2}$$

(۴) ایک لامتناہی خط مستقیم کو نقطوں کی ایک لامتناہی تعداد سے متعدد حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جنمیں سے ہر ایک کا طول ا ہے۔ اگر ایک نقطہ لیا جائے ایسا کہ اسکا فاصلہ خط مستقیم سے ما ہو اور کسی ایک نقطہ تقسیم سے اس کے فاصلہ کا ظِل خط مستقیم پر لا ہو تو ثابت کرو کہ تمام نقاط تقسیم سے اِس نقطہ کے فاصلوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{\pi}{\text{ا ما}}\cdot\frac{\text{جیبز}\,\frac{2\pi\,\text{ما}}{\text{ا}}}{\text{جمز}\,\frac{2\pi\,\text{ما}}{\text{ا}}-\text{جم}\,\frac{2\pi\,\text{لا}}{\text{ا}}}$$

(369) جس سلسلہ کو جمع کرنا ہے وہ $\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\text{ما}^2+(\text{لا}+\text{ن ا})^2}$ ہے جو

$$\frac{1}{2\,\text{خ ما}}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\text{لا}-\text{خ ما}+\text{ن ا}}-\frac{1}{\text{لا}+\text{خ ما}+\text{ن ا}}\right)$$

کے مماثل ہے۔ اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{\pi}{2\,\text{خ ما ا}}\left\{\text{مم}\,\frac{\pi(\text{لا}-\text{خ ما})}{\text{ا}}-\text{مم}\,\frac{\pi(\text{لا}+\text{خ ما})}{\text{ا}}\right\}$$

یا
$$\frac{\pi}{2\,\text{خ ما ا}}\cdot\frac{\text{جب}\,\frac{2\pi\,\text{خ ما}}{\text{ا}}}{\text{جب}\,\frac{\pi(\text{لا}+\text{خ ما})}{\text{ا}}\;\text{جب}\,\frac{\pi(\text{لا}-\text{خ ما})}{\text{ا}}}$$

اور یہ مطلوبہ نتیجہ میں تحویل ہو جاتا ہے۔

سترھویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\left(\tfrac{1}{2}\pi\,\text{جب ط}\right)=\tfrac{1}{4}\pi\,\text{جم}^2\text{ط}\left(1+\frac{\text{جم}^2\text{ط}}{2\times4}\right)\left(1+\frac{\text{جم}^2\text{ط}}{4\times6}\right)\cdots$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$1+\text{جب لا}=\tfrac{1}{8}(\pi+2\text{لا})^2\left\{1-\frac{(\pi+2\text{لا})^2}{4^2\pi^2}\right\}^2\left\{1-\frac{(\pi+2\text{لا})^2}{8^2\pi^2}\right\}^2\cdots$$

۳۔ ثابت کرو کہ

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\text{لا}+\text{م})(\text{لا}+\text{ن})}=-\pi^2$$

جہاں م، ن تمام صحیح عددی قیمتیں اختیار کرتے ہیں اور لا صحیح عدد نہیں ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{و}^2+1}{\text{و}^2-1}=\frac{\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{25}\right)\cdots}{\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{16}\right)\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{36}\right)\cdots}$$

۵۔ ثابت کرو کہ

$$1+\frac{2\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}+\frac{2\text{لا}^2}{2^2+\text{لا}^2}+\frac{2\text{لا}^2}{3^2+\text{لا}^2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{(1+4\text{لا}^2)\left(1+\frac{4\text{لا}^2}{3^2}\right)\left(1+\frac{4\text{لا}^2}{5^2}\right)\cdots\cdots}{(1+\text{لا}^2)\left(1+\frac{\text{لا}^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{\text{لا}^2}{3^2}\right)\cdots\cdots}$$

۶ — ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۳^{۴}}+\frac{۳}{۵^{۴}}+\frac{۶}{۷^{۴}}+\frac{۱۰}{۹^{۴}}+\cdots=\frac{\pi^{۲}}{۶۴}\left(۱-\frac{\pi^{۲}}{۱۲}\right)$$

۷ — اگر

$$ل(لا)=لا\prod_{۱}^{\infty}\left\{۱-\left(\frac{لا}{ن\,ہ}\right)^{۲}\right\}،\quad م(لا)=\prod_{۱}^{\infty}\left\{۱-\left(\frac{۲}{۲ن-۱}\times\frac{لا}{ہ}\right)^{۲}\right\}$$

تو $ل\,(لا+\frac{۱}{۲}ہ)$ کو $م\,(لا)$ کی رقوم میں اور $م\,(لا+\frac{۱}{۲}ہ)$ کو $ل\,(لا)$ کی رقوم میں بیان کرو، اور پھر $\frac{۱\times۳\times۵\cdots(۲م-۱)}{۲^{م}\,\underline{|م}}\sqrt{۲م+۱}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ م لامتناہی ہو۔

(370) ۸ — اگر $ض_{ر}$ سے وہ حاصل ضرب تعبیر ہوں جو $\frac{۱}{۱^{۲}}،\frac{۱}{۲^{۲}}،\frac{۱}{۳^{۲}}،\ldots$ میں سے ر، ر رقموں کو لیکر ضرب دینے سے بنتے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$۲^{۲ن}ض_{ن}=\frac{\pi^{۲ن}}{\underline{|۲ن}}+\frac{\pi^{۲ن-۲}}{\underline{|۲ن-۲}}ض_{۱}+\frac{\pi^{۲ن-۴}}{\underline{|۲ن-۴}}ض_{۲}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\pi^{۲}}{\underline{|۲}}ض_{ن-۱}+ض_{ن}$$

۹ — ثابت کرو کہ

$$۱-\frac{۱^{۲}}{۲^{۲}}-\frac{۱^{۲}\times۳^{۲}}{۲^{۲}\times۴^{۲}}-\frac{۱^{۲}\times۳^{۲}\times۵^{۲}}{۲^{۲}\times۴^{۲}\times۶^{۲}}-\cdots=\frac{۲}{\pi}$$

۱۰ — جمع کرو سلسلہ

$$\frac{۱}{۱^{۴}\times۳^{۴}}+\frac{۱}{۳^{۴}\times۵^{۴}}+\frac{۱}{۵^{۴}\times۷^{۴}}+\cdots\cdots$$

۱۱ — ثابت کرو کہ مثبت صحیح عددوں کے ہر جوڑے کے متکافیوں کی چوتھی قوتوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{۳۸۴\,\pi^{۸}}{|\underline{۵}\;|\underline{۹}}$ ہے۔

۱۲ — ثابت کرو کہ

$$\left(۱+\frac{۲}{۱^{۲}+۱}+\frac{۲}{۲^{۲}+۱}+\frac{۲}{۳^{۲}+۱}+\cdots\right)\left(\frac{۱}{۱^{۲}+۴}+\frac{۱}{۳^{۲}+۴}+\frac{۱}{۵^{۲}+۴}+\cdots\right)=\frac{\pi^{۲}}{۸}$$

۱۳ — ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{۱}{۱\times ۲\times ۳}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۲\times ۳\times ۴}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۳\times ۴\times ۵}\right)^{۲}+\cdots$$

کا مجموعہ $\frac{۱}{۴}\pi^{۲}-\frac{۳۹}{۱۶}$ ہے۔

۱۴ — ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{ر\to\infty}\;\frac{(م^{۲}-۱)(۲^{۲}م^{۲}-۱)\cdots(ر^{۲}م^{۲}-۱)}{\{م^{۲}-(م-۱)^{۲}\}\{۲^{۲}م^{۲}-(م-۱)^{۲}\}\cdots\{ر^{۲}م^{۲}-(م-۱)^{۲}\}}=(م-۱)$$

۱۵ — ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۱^{۲}+لا^{۲}}-\frac{۳}{۳^{۲}+لا^{۲}}+\frac{۵}{۵^{۲}+لا^{۲}}-\cdots$$

کا مجموعہ $\frac{۱}{۴}\pi$ قطز $\frac{۱}{۲}\pi$ لا ہے۔

۱۶ — ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-۱}لا-\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۳}لا+\text{مس}^{-۱}\frac{۱}{۵}لا-\cdots=\text{مس}^{-۱}\,\text{مسنز}\,\frac{۱}{۴}\pi\,لا$$

۱۷ — ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}\,۱۲-۲\,\text{لوک}\,\pi=ص_{۲}+\frac{۱}{۲}ص_{۴}+\frac{۱}{۳}ص_{۶}+\cdots+\frac{۱}{ن}ص_{۲ن}+\cdots$$

جہاں م ان سب عددوں کی رویں قوتوں کے تکافیوں کا مجموعہ ہے جو مفرد نہیں ہیں۔

۱۸ — ایک مربع ا ب ج د کے ضلع ب ج کو غیر معین طور پر خارج کر دیا گیا ہے اور اس پر حصے ج ج$_1$، ج$_1$ ج$_2$، ج$_2$ ج$_3$.... ہر ایک ب ج کے مساوی قطع کئے گئے ہیں۔ اگر زاویے ب ا ج$_1$، ب ا ج$_2$، ب ا ج$_3$،.... علی الترتیب ط$_1$، ط$_2$، ط$_3$.... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ط}_1\ \text{جب ط}_2\ \text{جب ط}_3 \dots \infty\ \text{تک} = \sqrt{2\pi\ \text{قتز}\ \pi}$$

۱۹ — اگر تمام مفرد عدد ۲، ۳، ۵،.... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\dots = \frac{6}{\pi^2}$$

اور
$$\frac{2^2}{1+2^2}\times\frac{3^2}{1+3^2}\times\frac{5^2}{1+5^2}\dots\dots = \frac{\pi^2}{15}$$

$$\frac{2^4}{1+2^4}\times\frac{3^4}{1+3^4}\times\frac{5^4}{1+5^4}\dots\dots = \frac{\pi^4}{105}$$ (یولر)

(371)

۲۰ — دوہرے طور پر لا متناہی سلسلہ

$$\sum_{\text{م}=1}^{\text{م}=\infty}\ \sum_{\text{ن}=1}^{\text{ن}=\infty} (-1)^{\text{م}+\text{ن}}\ \frac{\text{جم م لا جم ن ما}}{\text{م ن}\,(\text{م}^2+\text{ن}^2)}$$

کو ما کے ضعفوں کی جیوب التمام کے اکہرے طور پر لا متناہی سلسلہ کی شکل میں بیان کرو۔

۲۱ — ثابت کرو کہ

$$\prod\left\{\frac{(\text{ن}\pi+\text{عـ})^2+\text{ہـ}^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right\}$$

$$= \left(\text{جمز}^{2}\,\text{بہ}\sqrt{2} + \text{جم}^{2}\,\text{بہ}\sqrt{2} - 2\,\text{جم}\,2\text{عہ}\,\text{جم}\,\text{بہ}\sqrt{2}\,\text{جمز}\,\text{بہ}\sqrt{2} + \text{جم}^{2}\,2\text{عہ}\right) \Big/ 4\left(\text{عہ}^{4} + \text{بہ}^{4}\right)$$

جہاں ن، تمام صحیح عددی قیمتیں مثبت اور منفی اختیار کرتا ہے بجز صفر کے۔

۲۲ — ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{4\times3\times2\times1} + \frac{1}{8\times7\times6\times5} + \frac{1}{12\times11\times10\times9} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{4}\,\text{لوک}\,2 - \frac{1}{24}\pi\ ,$$

$$\frac{1}{7\times5\times3\times1} + \frac{1}{15\times13\times11\times9} + \frac{1}{23\times21\times19\times17} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{\pi}{96\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

۲۳ — اگر $\text{فہ}(\text{خرلا}) = \left(1+\frac{\text{خرلا}}{\text{ا}}\right)\left(1+\frac{\text{خرلا}}{\text{ب}}\right)\left(1+\frac{\text{خرلا}}{\text{ج}}\right)\cdots = \text{ا} + \text{خرب}$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ج}} + \cdots = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

اور اسلئے ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}^{2}}{1^{2}} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}^{2}}{2^{2}} + \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}^{2}}{3^{2}} + \cdots$$

$$= \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{مس}\,\frac{\pi\text{لا}}{\sqrt{2}} - \text{مسز}\,\frac{\pi\text{لا}}{\sqrt{2}}}{\text{مس}\,\frac{\pi\text{لا}}{\sqrt{2}} + \text{مسز}\,\frac{\pi\text{لا}}{\sqrt{2}}}\right)$$

۲۴ — ثابت کرو کہ

$$\sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{ن^۴ + لا^۴} = \frac{\pi \sqrt{۲}}{۴ لا^۳} \times \frac{جیبز \pi لا \sqrt{۲} + جب \pi لا \sqrt{۲}}{جمز \pi لا \sqrt{۲} - جم \pi لا \sqrt{۲}} - \frac{۱}{۲ لا^۴}$$

۲۵ — ثابت کرو کہ

$$\sum_{ن=-\infty}^{ن=\infty} \frac{۱}{(ن \pi + طہ)^۲} = قم^۲ طہ$$

۲۶ — ثابت کرو کہ

$$\frac{ق^{ب+لا} + ق^{ج-لا}}{ق^{ب} + ق^{ج}}$$

$$= \left\{۱ + \frac{۴(ب-ج)لا + ۴لا^۲}{\pi^۲ + (ب-ج)^۲}\right\}\left\{۱ + \frac{۴(ب-ج)لا + ۴لا^۲}{۹\pi^۲ + (ب-ج)^۲}\right\}\left\{۱ + \frac{۴(ب-ج)لا + ۴لا^۲}{۲۵\pi^۲ + (ب-ج)^۲}\right\}$$

اور

$$\frac{ق^{ب+لا} - ق^{ج-لا}}{ق^{ب} - ق^{ج}} = \left(۱ + \frac{۲ لا}{ب-ج}\right)\left\{۱ + \frac{۴(ب-ج)لا + ۴لا^۲}{۴\pi^۲ + (ب-ج)^۲}\right\}$$

$$\left\{۱ + \frac{۴(ب-ج)لا + ۴لا^۲}{۱۶\pi^۲ + (ب-ج)^۲}\right\} \cdots\cdots \quad (یولر)$$

(372)

۲۷ — اگر

$$ف = \frac{۱}{ن-م} - \frac{۱}{ن+م} + \frac{۱}{۳ن-م} - \frac{۱}{۳ن+م} + \frac{۱}{۵ن-م} - \frac{۱}{۵ن+م} + \cdots$$

$$ق = \frac{۱}{(ن-م)^۲} + \frac{۱}{(ن+م)^۲} + \frac{۱}{(۳ن-م)^۲} + \frac{۱}{(۳ن+م)^۲} + \frac{۱}{(۵ن-م)^۲} + \cdots$$

$$ر = \frac{۱}{(ن-م)^۳} - \frac{۱}{(ن+م)^۳} + \frac{۱}{(۳ن-م)^۳} + \frac{۱}{(۳ن+م)^۳} + \cdots$$

$$س = \frac{1}{(ن - م)^۴} + \frac{1}{(ن + م)^۴} + \frac{1}{(۳ن - م)^۴} + \frac{1}{(۳ن + م)^۴} + \cdots$$

تو ثابت کرو کہ

$$ف = \frac{ک\pi}{۲ن} ، \quad ق = \frac{(ک^۲ + ۲)\pi^۲}{۲ \times ۴ \times ن^۲} ، \quad ص = \frac{(۴ک^۳ + ۲ک)\pi^۳}{۲ \times ۴ \times ۶ \times ن^۳} ،$$

$$س = \frac{(۲۴ک^۴ + ۳۲ک^۲ + ۸)\pi^۴}{۲ \times ۴ \times ۶ \times ۸ \times ن^۴}$$

جہاں $ک = سک \frac{م\pi}{۲ن}$ (یولر)

۲۸ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 - \frac{1}{۵^۳} + \frac{1}{۷^۳} - \frac{1}{۱۱^۳} + \cdots\cdots$$

کا مجموعہ جس میں وہ سب طاق عدد جو ۳ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں لئے گئے ہیں $\pi^۳ / ۱۸\sqrt{۳}$ ہے۔ (یولر)

۲۹ — ثابت کرو کہ ان سب عددوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ $\frac{۴\pi^۲}{۲۷}$ ہے جو ۳ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں۔

۳۰ — ثابت کرو کہ

$$\frac{جیب ا + جیب ج}{جیب ج} = \left(1 + \frac{ا}{ج}\right)\left(1 - \frac{۲ج ا - ا^۲}{\pi^۲ + ج^۲}\right)\left(1 + \frac{۲ج ا + ا^۲}{۴\pi^۲ + ج^۲}\right)$$

$$\times \left(1 - \frac{۲ج ا - ا^۲}{۹\pi^۲ + ج^۲}\right) \cdots\cdots$$

اور

$$\frac{جمز ا - جمز ج}{1 - جمز ج} = \left(1 - \frac{ا^۲}{ج^۲}\right)\left(1 - \frac{۲ج ا - ا^۲}{۴\pi^۲ + ج^۲}\right)\left(1 + \frac{۲ج ا + ا^۲}{۴\pi^۲ + ج^۲}\right)$$

$$\times\left(1-\frac{2\,\text{ج}\,\text{ما}-\text{ما}^2}{16\pi^2+\text{ج}^2}\right)\cdots\cdots\cdots$$ (یولر)

۳۱ — ثابت کرو کہ جب، ن طاق ہو تو

$$\text{مم}^2\frac{2\pi}{2\text{ن}}+\text{مم}^2\frac{4\pi}{2\text{ن}}+\cdots+\text{مم}^2\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}}=\frac{1}{6}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)$$

$$\text{مم}^4\frac{2\pi}{2\text{ن}}+\text{مم}^4\frac{4\pi}{2\text{ن}}+\cdots+\text{مم}^4\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}}=\frac{1}{90}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)$$

$$\times(\text{ن}^2+3\text{ن}-13)$$

۳۲ — ثابت کرو کہ لا متناہی حاصل ضرب

$$(1+\text{لا}^{2\text{ن}})\left(1+\frac{\text{لا}^{2\text{ن}}}{3^{2\text{ن}}}\right)\left(1+\frac{\text{لا}^{2\text{ن}}}{5^{2\text{ن}}}\right)\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}\text{ن}}}\prod_{1}^{\text{ن}-1}\left(\text{جمز}\,\pi\,\text{عر}\,\text{لا}+\text{جم}\,\pi\,\text{بر}\,\text{لا}\right)$$ اگر ن جفت ہے

اور $$=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}}\,\text{جمز}\,\frac{1}{2}\pi\,\text{لا}\prod_{1}^{\text{ن}-2}\left(\text{جمز}\,\pi\,\text{عر}\,\text{لا}+\text{جم}\,\pi\,\text{بر}\,\text{لا}\right)$$ اگر ن طاق ہے

جہاں عر، بر علی الترتیب جب $\frac{\text{ر}\pi}{2\text{ن}}$، جم $\frac{\text{ر}\pi}{2\text{ن}}$ کو تعبیر کرتے ہیں اور ر ایک طاق عدد ہے۔ (گلیشیر)

(878)

۳۳ — ثابت کرو کہ لا متناہی حاصل ضرب

$$\text{لا}^{\text{ن}}(1+\text{لا}^{2\text{ن}})\left(1+\frac{\text{لا}^{2\text{ن}}}{2^{2\text{ن}}}\right)\left(1+\frac{\text{لا}^{2\text{ن}}}{3^{2\text{ن}}}\right)\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}\text{ن}}\,\pi^{\text{ن}}}\prod_{1}^{\text{ن}-1}\left(\text{جمز}\,2\pi\,\text{عر}\,\text{لا}-\text{جم}\,2\pi\,\text{بر}\,\text{لا}\right)$$

اگر ن جفت ہے اور

$$= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\,\pi^{\text{ن}}}\ \text{جنز}\,\pi\,\text{لا}\ \prod_{1}^{\text{ن}-1}\left(\text{جمز}\,2\pi\,\text{عہ}\,\text{لا} - \text{جم}\,2\pi\,\text{بہ}\,\text{لا}\right)$$

اگر ن طاق ہے ۔ عہ اور بہ کا وہی مفہوم لیا جائے جو سوال ماسبق میں تھا۔

(گلیشیر)

۳۴ ۔ ثابت کرو کہ

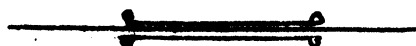
$$\frac{1}{1^{2\text{ن}}+\text{لا}^{2\text{ن}}} + \frac{1}{2^{2\text{ن}}+\text{لا}^{2\text{ن}}} + \frac{1}{3^{2\text{ن}}+\text{لا}^{2\text{ن}}} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{\pi}{\text{ن}\,\text{لا}^{2\text{ن}-1}} \sum_{1}^{\text{ن}-1} \frac{\text{عہ}\,\text{جنز}\,2\pi\,\text{عہ}\,\text{لا} + \text{بہ}\,\text{جیب}\,2\pi\,\text{بہ}\,\text{لا}}{\text{جمز}\,2\pi\,\text{عہ}\,\text{لا} - \text{جم}\,2\pi\,\text{بہ}\,\text{لا}} - \frac{1}{2\,\text{لا}^{2\text{ن}}}$$

جہاں عہ اور بہ کے وہی معنے ہیں جو پچھلے سوال میں تھے۔ (گلیشیر)

۳۵ ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} + \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\infty} \left\{ \frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ر}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)}{(\text{لا} + \text{ر}\,\text{ا})^2 + (\text{ما} + \text{ر}\,\text{ب})^2} + \frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} - \text{ر}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)}{(\text{لا} - \text{ر}\,\text{ا})^2 + (\text{ما} - \text{ر}\,\text{ب})^2} \right\}$$

$$= \pi\,\text{جیب}\left(2\pi\,\frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}\right) \Big\backslash \left\{ \text{جمز}\left(2\pi\,\frac{\text{ا}\,\text{ما} - \text{ب}\,\text{لا}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}\right) - \text{جم}\left(2\pi\,\frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}\right) \right\}$$

(374)

اٹھارواں باب

مسلسل کسریں

π کے غیر منطق ہونیکا ثبوت

۳۰۲ — فرض کرو کہ مستدق سلسلہ

$$1 + \frac{\text{لا}^2}{1\times\text{ج}} + \frac{\text{لا}^4}{1\times2\times\text{ج}(\text{ج}+1)} + \frac{\text{لا}^6}{1\times2\times3\times\text{ج}(\text{ج}+1)(\text{ج}+2)} + \cdots$$

ف (ج) سے تعبیر ہوتا ہے، تب

$$\text{ف}(\text{ج}+1) - \text{ف}(\text{ج}) = \frac{\text{لا}^2}{\text{ج}(\text{ج}+1)}\,\text{ف}(\text{ج}+2)$$

اس لئے

$$\frac{\text{ف}(\text{ج})}{\text{ف}(\text{ج}+1)} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ج}(\text{ج}+1)}\cdot\frac{\text{ف}(\text{ج}+2)}{\text{ف}(\text{ج}+1)}$$

پس ف (ج+۱) \ ف (ج) کو دوسری جماعت کی مسلسل کسر

$$\frac{1}{1-}\;\frac{\text{لا}^2\backslash \text{ج}(\text{ج}+1)}{1-}\;\frac{\text{لا}^2\backslash (\text{ج}+1)(\text{ج}+2)}{1-}\;\frac{\text{لا}^2\backslash (\text{ج}+2)(\text{ج}+3)}{1-}\cdots$$

کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ج = $\frac{1}{2}$ اور لا کی بجائے $\frac{1}{2}$ لا لکھو تو سلسلہ ف (ج) ہو جاتا ہے

$$1 - \frac{لا^2}{2 \times 1} + \frac{لا^4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} - \ldots\ldots$$

یا = جم لا

اور ف (ج + ۱)، $\frac{جب لا}{لا}$ ہو جاتا ہے ۔ پس

$$\frac{مس لا}{لا} = \frac{1}{1 -} \frac{لا^2}{3 -} \frac{لا^2}{5 -} \frac{لا^2}{7 -} \ldots\ldots$$

جو مس لا کے لئے دوسری جماعت کی ایک مسلسل کسر ہے ۔

۳۰۳ ۔ لیمبرٹ کا وہ ثبوت[1] جو π کے غیر منطق ہونے کے متعلق ہے محصلہ بالا مسلسل کسر پر منحصر ہے ۔ رکھو لا = $\frac{1}{4}\pi$ اور بفرض امکان رکھو $\frac{1}{4}\pi = \frac{م}{ن}$ جہاں م اور ن صحیح عدد ہیں ۔

تب

$$1 = \frac{م}{ن -} \frac{م^2}{3ن -} \frac{م^2}{5ن -} \ldots\ldots$$

(375) اب چونکہ کسی خاص رقم کے بعد کسور $\frac{م}{ن}$، $\frac{م^2}{3ن}$، $\frac{م^2}{5ن}$، ...... کے نسب نما شمار کنندوں کی بہ نسبت ایک ایسے عدد سے بڑے ہیں جو ایک سے بڑا ہے اس لئے ایک مشہور مسئلہ[2] کی رو سے مساوات کی بائیں جانب کی مسلسل کسر ایک غیر منطق انتہا رکھتی ہے اور اسلئے ایک کے مساوی نہیں ہو سکتی ۔ پس $\frac{1}{4}\pi$ کسر $\frac{م}{ن}$ کے مساوی نہیں ہو سکتا جبکہ م اور ن صحیح عدد ہوں اور اسلئے π غیر منطق ہے ۔ بلاشبہ یہ نتیجہ دفعہ (۲۵۱ ک) کے وسیع تر

---

[1] سنہ ۱۷۶۱ء میں برلن اکاڈیمی کی یادداشت میں شائع ہوا ۔

[2] دیکھو کرسٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ (۴۸۴) ۔

مسئلہ میں شامل ہے جو یہ ہے کہ π ایک علوی عدد ہے ۔

دو علوی ہندسی سلسلوں کے خارج قسمت کا استحالہ

۳۰۴ — کسر $\text{فا}(\text{عہ}، \text{بہ}+۱، \text{جہ}+۱، \text{لا}) \backslash \text{فا}(\text{عہ}، \text{بہ}، \text{جہ}، \text{لا})$

کو جس میں $\text{فا}(\text{عہ}، \text{بہ}، \text{جہ}، \text{لا})$ علوی ہندسی سلسلہ

$$۱ + \frac{\text{عہ} \times \text{بہ}}{۱ \times \text{جہ}}\,\text{لا} + \frac{\text{عہ}(\text{عہ}+۱) \times \text{بہ}(\text{بہ}+۱)}{۱ \times ۲ \times \text{جہ}(\text{جہ}+۱)}\,\text{لا}^{۲} + \ldots$$

کو تعبیر کرتا ہے مسلسل کسر

$$\frac{۱}{۱-}\;\frac{\text{ک}_{۱}\text{لا}}{۱-}\;\frac{\text{ک}_{۲}\text{لا}}{۱-}\;\frac{\text{ک}_{۳}\text{لا}}{۱-}\;\ldots\ldots$$

میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں

$$\text{ک}_{۱} = \frac{\text{عہ}(\text{جہ}-\text{بہ})}{\text{جہ}(\text{جہ}+۱)}،\quad \text{ک}_{۲} = \frac{(\text{بہ}+۱)(\text{جہ}+۱-\text{عہ})}{(\text{جہ}+۱)(\text{جہ}+۲)}،$$

$$\text{ک}_{۳} = \frac{(\text{عہ}+۱)(\text{جہ}+۱-\text{بہ})}{(\text{جہ}+۲)(\text{جہ}+۳)}$$

$$\text{ک}_{۴} = \frac{(\text{بہ}+۲)(\text{جہ}+۲-\text{عہ})}{(\text{جہ}+۳)(\text{جہ}+۴)}،\ \ldots\ldots،$$

$$\text{ک}_{۲ن-۱} = \frac{(\text{عہ}+ن-۱)(\text{جہ}+ن-۱-\text{بہ})}{(\text{جہ}+۲ن-۲)(\text{جہ}+۲ن-۱)}،$$

$$\text{ک}_{۲ن} = \frac{(\text{بہ}+ن)(\text{جہ}+ن-\text{عہ})}{(\text{جہ}+۲ن-۱)(\text{جہ}+۲ن)}$$

اس استحالہ کا فائدہ تمثیل ذیل سے ظاہر ہو گا ۔ سلسلہ

$$\text{فہ} = \text{جب فہ جم فہ} \left\{ ۱ + \frac{۲}{۳} \text{جب}^۲ \text{فہ} + \frac{۴ \times ۲}{۵ \times ۳} \text{جب}^۴ \text{فہ} + \ldots \right\}$$

اور ضابطہ بالا میں رکھو عہ = ۱، بہ = ۰، جہ = $\frac{۱}{۲}$، لا = جب۲ فہ تو

$$\text{فہ} = \frac{\text{جب فہ جم فہ}}{۱ -} \; \frac{\frac{۲ \times ۱}{۳ \times ۱} \text{جب}^۲ \text{فہ}}{۱ -} \; \frac{\frac{۲ \times ۱}{۵ \times ۳} \text{جب}^۲ \text{فہ}}{۱ -} \; \frac{\frac{۴ \times ۳}{۷ \times ۵} \text{جب}^۲ \text{فہ}}{۱ -} \ldots$$

اس کے دوسرے متدق سے فہ کیلئے اسنیلیس (Snellius) کا یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{فہ} = \frac{\text{جب فہ جم فہ}}{۱ - \frac{۲}{۳} \text{جب}^۲ \text{فہ}} = \frac{۳ \text{ جب ۲ فہ}}{۲ (۲ + \text{جم ۲ فہ})}$$

یولر کا استحالہ

(376)

۵۰۴ — یولر کے مسئلہ[1]

$$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + ع_۴ + \ldots = \frac{ع_۱}{۱ -} \; \frac{ع_۲}{ع_۱ + ع_۲ -} \; \frac{ع_۱ ع_۳}{ع_۲ + ع_۳ -} \; \frac{ع_۲ ع_۴}{ع_۳ + ع_۴ -} \ldots$$

کے ذریعہ جسکو اس شکل

$$\frac{۱}{ر_۱} \pm \frac{۱}{ر_۲} \pm \frac{۱}{ر_۳} \pm \frac{۱}{ر_۴} \pm \ldots = \frac{۱}{ر_۱ \mp} \; \frac{ر_۱^۲}{ر_۲ \pm ر_۱ \mp} \; \frac{ر_۲^۲}{ر_۳ \pm ر_۲ \mp} \ldots$$

میں بھی لکھا جا سکتا ہے دیگر سلسلے مستحیل ہو سکتے ہیں۔

[1] دیکھو کرسٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ ۴۸۷۔

اِس طریقہ کی مثال یہ ہے کہ مسئلہ

$$\frac{\pi}{\text{ن}}\ \text{مم}\ \frac{\pi\,\text{م}}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{م}} - \frac{1}{\text{ن} - \text{م}} + \frac{1}{\text{ن} + \text{م}} - \frac{1}{2\text{ن} - \text{م}} + \frac{1}{2\text{ن} + \text{م}} - \dots$$

سے مسئلہ

$$\frac{\pi}{\text{ن}}\ \text{مم}\ \frac{\pi\,\text{م}}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{م}+}\ \frac{\text{م}^2}{\text{ن} - 2\text{م} +}\ \frac{(\text{ن}-\text{م})^2}{2\text{م}+}\ \frac{(\text{ن}+\text{م})^2}{2\text{م}+}\ \frac{(2\text{ن}-\text{م})^2}{2\text{م}+}\ \frac{(2\text{ن}+\text{م})^2}{\text{ن} - 2\text{م} +}\dots$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اٹھارویں باب پر مثالیں

امثلہ (۱) تا (۱۳) میں مندرجہ مسئلوں کی تحقیق کرو۔

۱— $\frac{\text{مسز لا}}{\text{لا}} = \frac{1}{1+}\ \frac{\text{لا}^2}{3+}\ \frac{\text{لا}^2}{5+}\dots\dots$

۲— $\text{مس ن لا} = \frac{\text{ن مس لا}}{1-}\ \frac{(\text{ن}^2-1)\ \text{مس}^2\ \text{لا}}{3-}\ \frac{(\text{ن}^2-4)\ \text{مس}^2\ \text{لا}}{5-}\ \frac{(\text{ن}^2-9)\ \text{مس}^2\ \text{لا}}{7-}\dots\dots$

جہاں لا $<$ $\frac{1}{2}\pi$ اور ن پر کوئی قید نہیں ہے۔

۳— $\text{مس ن لا} = \frac{\text{ن مس لا}}{1 - \text{مس}^2\ \text{لا} -}\ \frac{(\text{ن}^2-4)\ \text{مس}^2\ \text{لا}}{3 - 3\ \text{مس}^2\ \text{لا} -}\ \frac{(\text{ن}^2-16)\ \text{مس}^2\ \text{لا}}{5 - 5\ \text{مس}^2\ \text{لا} -}\dots\dots$

۴ — مس ن لا = ن مس لا / ۱ — (ن^۲ - ۱) مس^۲ لا / ۳ - مس^۲ لا — (ن^۲ - ۹) مس^۲ لا / ۵ - ۳ مس^۲ لا — ...

۵ — مس^-۱ لا = لا / ۱ + لا^۲ / ۳ + ۴ لا^۲ / ۵ + ...

۶ — مس^-۱ لا = لا / ۱ - لا^۲ + ۴ لا^۲ / ۳ - ۳ لا^۲ + ۱۶ لا^۲ / ۵ - ۵ لا^۲ + ...

۷ — مس^-۱ لا = لا / ۱ + لا^۲ / ۳ - لا^۲ + ۹ لا^۲ / ۵ - ۳ لا^۲ + ...

۸ — مسز ن لا = ن مسز لا / ۱ — (ن^۲ + ۱) مسز^۲ لا / ۳ — (ن^۲ + ۴) مسز^۲ لا / ۵ — ...

۹ — ط/ن قم ط/ن = ۱ + ۱ / ن - ۱ + ن(ن - ۱) / ۱ + ن(ن + ۱) / ن - ۱ + ۲ن(۲ن - ۱) / ۱ + ...

۱۰ — جب ط لا / ط لا = ۱ + لا / ۱ - لا + ۱ / لا - ۱ - لا / ۱ + لا - ۲(۲ + لا) / لا - ۲(۲ - لا) / ۱ + لا - ...

۱۱ — جم ط لا / ۲ = ۱ + لا / ۱ - لا + ۱ / لا - ۱ - لا / ۲ + لا - ۳(۳ + لا) / لا - ...

۱۲ — م ۱/لا = ۱ / لا - ۱ + ۱ / ۱ + ۱ / ۳ لا - ۲ + ۱ / ۱ + ۱ / ۵ لا - ۲ + ...

۱۳ — ۱ - جب ط / ط = (۱×۲ / ۱×۳) جب^۲ ½ط / ۱ - (۱×۲ / ۳×۵) جب^۲ ½ط / ۱ - (۳×۴ / ۵×۷) جب^۲ ½ط / ۱ - ..

(۶)

(378)

متفرق مثالیں

۱ـ ثابت کرو کہ

جم م لا ـ جم م عہ / جم لا ـ جم عہ = قم عہ {۲ جب عہ جم (م ـ ۱) لا + ۲ جب ۲ عہ جم (م ـ ۲) لا + ... + ۲ جب (م ـ ۱) عہ جم لا + جب م عہ}
(ہرمائٹ)

جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے ـ

۲ـ اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں اور عہ = ک π / ن تو ثابت کرو کہ

جب م لا / جب ن لا = ۱/۲ن Σ (ـ۱)^ک جب م عہ مم (لا ـ عہ)/۲

اور نیز یہ بھی

= ۱/۲ن Σ (ـ۱)^ک جب م عہ مم (لا ـ عہ)

یا = ۱/۲ن Σ (ـ۱)^ک جب م عہ قم (لا ـ عہ)

بموجب اسکے کہ م + ن جفت یا طاق ہو ـ (ہرمائٹ)

۳ـ ثابت کرو کہ

مم (لا ـ عہ) مم (لا ـ بہ) .... مم (لا ـ لہ)
= جم ½ ن π + Σ ا مم (لا ـ عہ)

جہاں ا = مم (عہ ـ بہ) مم (عہ ـ جہ) .... مم (عہ ـ لہ)
(ہرمائٹ)

۴ — اگر ا، ب، ج ایک مثلث کے زاویے ہوں اور لا، ما، ی وہ حقیقی مقداریں ہیں جو مساواتوں

$$\text{جمز لا} \left(\text{جب ب جب ج}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ ا،}$$

$$\text{جمز ما} \left(\text{جب ج جب ا}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ ب،}$$

$$\text{جمز ی} \left(\text{جب ا جب ب}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ ج}$$

سے حاصل ہوئی ہیں تو ثابت کرو کہ کوئی تین نقطے جو اس طور واقع ہوں کہ ان میں سے دو دو کے درمیان فاصلے علی الترتیب لا، ما، ی کے متناسب ہیں ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

۵ — اگر لا $> \frac{1}{2}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس } \frac{1}{1+\text{لا}^2} < \frac{1}{1+\text{لا}+\text{لا}^2} \quad \text{اور} \quad > \frac{1}{1-\text{لا}+\text{لا}^2}$$

۶ — ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ف}=1}^{\text{ف}=\text{م}} \sum_{\text{ک}=0}^{\text{ک}=\text{ن}-1} \frac{2\,\text{ف ک}\,\pi}{\text{ن}}$$

اُس بڑے سے بڑے صحیح عدد کے مساوی ہے جو $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ میں ہے۔

۷ — ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1} \frac{4\,\text{ب}^2}{(2\text{ا}+\text{ب})^2+3\text{ب}^2} + \text{مس}^{-1} \frac{4\,\text{ب}^2}{(2\text{ا}+3\text{ب})^2+3\text{ب}^2} + \dots + \text{مس}^{-1} \frac{4\,\text{ب}^2}{\left[2\text{ا}+(2\text{ن}-1)\text{ب}\right]^2+3\text{ب}^2} = \text{مس}^{-1} \frac{\text{ن ب}^2}{\text{ا}^2+\text{ن ا ب}+\text{ب}^2}$$

(879)

اور اسلئے ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ

$$\text{مم}^{-1}\left(1^2+\frac{3}{4}\right)+\text{مم}^{-1}\left(2^2+\frac{3}{4}\right)+\text{مم}^{-1}\left(3^2+\frac{3}{4}\right)+\ldots\ldots$$

کا مجموعہ $\text{مم}^{-1}\frac{1}{2}$ ہے۔

۸ — اگر مس ا قط ب + مس ب قط ا = مس ج

تو ثابت کرو کہ مس ا قط ا + مس ب قط ب + مس ج قط ج

+ ۲ مس ا مس ب مس ج =۔

اس نتیجہ اور معلومہ مسئلہ

جب ا جم ا + جب ب جم ب + جب ج جم ج - ۲ جب ا جب ب جب ج =۔

کے درمیان جو تعلق ہے اسے معلوم کرو، جہاں ا، ب، ج ایک مثلث کے زاویے ہیں۔

۹ — اگر م اور ن کوئی عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب لا}\left\{1-\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{(\text{م}+\text{ن})(\text{م}+\text{ن}+1)}\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2}\right.$$

$$\left.+\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}{(\text{م}+\text{ن})(\text{م}+\text{ن}+1)(\text{م}+\text{ن}+2)(\text{م}+\text{ن}+3)}\frac{\text{لا}^4}{\lfloor 4}-\ldots\right\}$$

$$=(\text{م}+\text{ن جم لا})\frac{1}{\text{م}+\text{ن}}\frac{\text{لا}}{1}-\left\{\text{م}(\text{م}+1)(\text{م}+2)\right.$$

$$\left.+\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)\text{جم لا}\right\}\frac{1}{(\text{م}+\text{ن})(\text{م}+\text{ن}+1)(\text{م}+\text{ن}+2)}\frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3}+\ldots$$

۱۰ — ثابت کرو کہ

۱	جم عہ	جم(عہ+بہ)	جم(عہ+بہ+جہ)	جم(عہ+بہ+جہ+ضہ)
جم عہ	۱	جم بہ	جم(بہ+جہ)	جم(بہ+جہ+ضہ)
جم(عہ+بہ)	جم بہ	۱	جم جہ	جم(جہ+ضہ)
جم(عہ+بہ+جہ)	جم(بہ+جہ)	جم جہ	۱	جم ضہ
جم(عہ+بہ+جہ+ضہ)	جم(بہ+جہ+ضہ)	جم(جہ+ضہ)	جم ضہ	۱

= ۰

۱۱— ثابت کرو کہ مقطع

۱	جم ا	جب ا	جم(۳ا+لا)
۱	جم ب	جب ب	جم(۳ب+لا)
۱	جم ج	جب ج	جم(۳ج+لا)
۱	جم د	جب د	جم(۳د+لا)

= م [Σ جب(ا+س+لا)] { π جب $\frac{1}{2}$ (ا−ب) }

جہاں م کوئی عددی جزو ضربی ہے اور س = $\frac{1}{2}$ (ا+ب+ج+د)

۱۲— اگر

جم(۲لا−ما−ی) جب(ما−ی) + جم(۲ما−ی−لا) جب(ی−لا)
+ جم(۲ی−لا−ما) جب(لا−ما) = ۰

اور لا، ما، ی میں سے کوئی دو مساوی نہ ہوں یا کسی دو میں π کے ضِعف کا فرق نہ ہو تو

جم ۲لا + جم ۲ما + جم ۲ی = ۰

۱۳— اگر صفر اور π کے درمیان طہ کی دو قیمتیں عہ اور ضہ ہوں جو مساوات

جب ۲طہ جم^2(عہ+بہ) + جب ۲عہ جم^2(بہ+طہ) + جب ۲بہ جم^2(عہ+طہ) = ۰

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ عہ اور بہ اس مساوات

(380)

جب ۲ فہ جم^2 (جہ + ضہ) + جب ۲ جہ جم^2 (ضہ + فہ) + جب ۲ ضہ جم^2 (جہ + فہ) = ۰

کو پورا کرتے ہیں۔

۱۴۔ اگر مس $\frac{\text{طہ}}{۳}$ کی تین محصلہ قیمتیں مس عہ، مس بہ، مس جہ ہوں جبکہ مس طہ دیا گیا ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) جم عہ جم بہ جم جہ جب (عہ + بہ + جہ) + جب عہ جب بہ جب جہ جم (عہ + بہ + جہ) = ۰،

(۲) جب (بہ + جہ) جب (جہ + عہ) جب (عہ + بہ) = جب ۲ عہ جب ۲ بہ جب ۲ جہ

۱۵۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\sum \text{جب (بہ − جہ) جم } \frac{\text{جہ + عہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{عہ + بہ}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{۲ عہ + ۳ بہ + ۳ جہ}}{۲}}{\sum \text{جب (بہ − جہ) جم } \frac{\text{جہ + عہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{عہ + بہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{۲ عہ + ۳ بہ + ۳ جہ}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{جب ۲ (عہ + بہ + جہ) + } \sum \text{ جب (۲ عہ + بہ + جہ)}}{\text{جم ۲ (عہ + بہ + جہ) + } \sum \text{ جم (۲ عہ + بہ + جہ)}}$$

جہاں عمل جمع $\sum$ اُس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جو زاویوں عہ، بہ، جہ کے باہمی دائری تبادلہ سے بنتا ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ اگر

$$\text{ع} = ۱ + \frac{\text{۲ جم طہ}}{۱ +} \frac{\text{۲ جم } \frac{\text{طہ}}{۲}}{۱ +} \frac{\text{۲ جم } \frac{\text{طہ}}{۲^2}}{۱ +} \cdots\cdots$$

تو ع کی بجائے ع کا ن واں مستدق لینے سے جو خطا واقع ہوتی ہے وہ ہے

$$\frac{۲(ع^{۲}-۱)}{ع-\sqrt{۴-ع^{۲}}\ \text{جم}\ \frac{(-۲)\,\text{جم}^{-۱}\frac{۱}{۲}ع}{ن}}$$

۱۷ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{۱}{ن^{۲}-۱}-\frac{۱}{۳ن^{۲}-۳}+\frac{۱}{۵ن^{۲}-۵}-\dots\dots\ \infty \text{ تک}$$

کا مجموعہ ہے $\frac{\pi}{۴}\left\{\text{قط}\ \frac{\pi}{۲ن}-۱\right\}$

۱۸ — ثابت کرو کہ مساوات مس ی = ع ی کی خیالی اصلیں نہیں ہو سکتیں تاآنکہ ع < ۱ جہاں ع حقیقی ہے، اور اگر ع > ۱ تو اسکی دو اصلیں خیالی ہونگی۔

۱۹ — ثابت کرو کہ کسی تین خطوط مستقیم ا و′ ب و′ ج و کے ضد توازی (Anti parallels.) ا′ ب′ ج′ میں سے گذرنیوالے اور مثلث ا ب ج کے زاویوں ا′ ب′ ج′ کے لحاظ سے، ایک نقطہ و′ پر ملتے ہیں اور نیز ثابت کرو کہ اگر و اور و′ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے چھ نقاط پائیں ایک دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔

اگر مرکز ہندسی ث سے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر عمود ث ل، ث م، ث ن ہوں اور دائرہ ل م ن کے محیط پر کوئی نقطہ ف ہو تو ثابت کرو کہ

$$(۴ا^{۲}+ب^{۲}+ج^{۲})\ اف^{۲}+(ا^{۲}+۴ب^{۲}+ج^{۲})\ ب ف^{۲}+(ا^{۲}+ب^{۲}+۴ج^{۲})\ ج ف^{۲}$$

(381)

مستقل ہے۔

۲۰ — اگر لا حقیقی ہو اور ۱ > لا > ۰ اور اگر مس^{-1} ی سے مراد وہ کم سے کم مثبت زاویہ ہو جسکا ماس ی ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\left[\text{جذر}\frac{\pi\,\text{لا}}{3}\ \text{قط}\frac{\pi}{4}\frac{\text{لا}}{\text{لا}\,3}\right] = \sum_{ر=0}^{\infty}(-1)^{ر}\,\text{مس}^{-1}\frac{(2ر+1)\,\text{لا}}{(2ر+1)^2-\text{لا}^2}$$

۲۱ — اگر مثلث اب ج کے جانبی دائروں کے مرکزوں میں سے گزرنیوالے دائرہ پر کوئی نقطہ ف ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{اف}^2}{\text{ب ج}}(1+\text{جم ا}-\text{جم ب}-\text{جم ج})+\frac{\text{ب ف}^2}{\text{ج ا}}(1-\text{جم ا}+\text{جم ب}-\text{جم ج})$$

$$+\frac{\text{ج ف}^2}{\text{ا ب}}(1-\text{جم ا}-\text{جم ب}+\text{جم ج})=1+\text{جم ا}+\text{جم ب}+\text{جم ج}$$

۲۲ — اگر $ع_ن = \text{ا جم ن طہ} + \text{ب جب ن طہ}$ جہاں ا اور ب ن پر منحصر نہیں ہیں تو ہندسی طور پر ثابت کرو کہ

$$ع_{ن+1} - 2\,ع_ن\ \text{جم طہ} + ع_{ن-1} = 0$$

ثابت کرو کہ

$$\frac{2^6\,\text{جب}^7\,\text{طہ} + \text{جب}\,7\,\text{طہ}}{2^6\,\text{جم}^7\,\text{طہ} - \text{جم}\,7\,\text{طہ}} = \text{مس طہ}\ \text{مس}^2\left(\text{طہ}+\frac{\pi}{6}\right)\text{مس}^2\left(\text{طہ}-\frac{\pi}{6}\right)$$

۲۳ — اگر مثلث کی مبہم صورت میں جبکہ ا، ب، ا دئے گئے ہوں بیرونی دائرے کے مرکز، مرکز ہندسی، نونقطی دائرہ کے مرکز، اور مرکز عمودی کے دو دو محل علی الترتیب $و_1$، $و_2$، $ث_1$، $ث_2$، $ن_1$، $ن_2$، $ع_1$، $ع_2$ ہوں تو ثابت کرو کہ

قط ا ع۱ ع۲ = ن۱ ن۲ = ۲ ا م ث۱ ث۲ = ۲ م۱ م۲

۲۴ — ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج میں سے خطوطِ مستقیم اَب جَ، ب جَ اَ، ج اَ بَ کھینچے گئے ہیں جو اب، ب ج، ج ا سے ترتیب وار مساوی زاویے طہ بناتے ہیں اور نیز خطوطِ مستقیم اجً بً، ج بً اً، ب اً جً کھینچے گئے ہیں جو ا ج، ج ب، ب ا کے ساتھ ترتیب وار مساوی زاویے طہ بناتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ مثلث اَ بَ جَ، اً بً جً ہر طرح ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور ہر ایک کا رقبہ = ۵ جب۲ طہ (مم طہ - مم ا - مم ب - مم ج)۲ نیز ثابت کرو کہ اگر نقطہ ا سے ان مثلثوں کے بیرونی (حائط) دائروں کے مماس م اَ، م اً ہوں اور اسی طرح نقطوں ب اور ج سے مماس م بَ، م بً، م جَ، م جً تو

ا م اَ = ج م جً، ب م بَ = ا م اً، ج م جَ = ب م بً

۲۵ — جمع کرو کہ سلسلہ

$$\sum_{ن = -ق}^{ن = ف} \left[\frac{1}{ن - 1 - لا - (-1)^{ن}} + \frac{1}{ن} \right]$$

جہاں قیمت ن = ۰ ترک کردی گئی ہے اور ف، ق مثبت صحیح عدد ہیں جو لاانتہا بڑھتے ہیں ۔

۲۶ — اگر عہ = ۲ π \ ۱۷، تو ثابت کرو کہ مقداریں

جم عہ + جم ۲۲ عہ + جم ۲۳ عہ + جم ۲۶ عہ، اور جم ۲ عہ + جم ۲۳ عہ + جم ۲۴ عہ + جم ۲۵ عہ + جم ۲۷ عہ

مساوات ی^{2} + $\frac{1}{2}$ ی = ا کی اصلیں ہیں، اور بتاؤ کہ جم عہ کی قیمت حاصل کرنیکے لئے یہ عمل جو اوپر بتایا گیا ہے کس طرح جاری کیا جا سکتا ہے۔

ستره ضلعوں والے ایک منتظم کثیر ضلعی کے نو متصلہ راس ا، ب، ج، د، ع، ف، گ، ھ، ک ہیں اور یہ کثیر ضلعی ایک دائرہ میں جسکا مرکز و ہے بنایا گیا ہے۔ وتروں ب ع، ج ک، د ف، گ ھ (382) کے نقاط وسطی کے ظل و ا پر علی الترتیب عہ، یہ، جہ، ضہ ہیں۔ ثابت کرو کہ عہ یہ اور جہ ضہ کو قطر مانکر دو دائرے کھینچے جائیں تو اُن کا مشترک وتر و میں سے گذرتا ہے اور اسکا طول $\frac{1}{2}$ و ا ہے۔

۲۷ — اگر مثلث ا ب ج کے اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں سے نو نقطی دائرہ کا مرکز فاصلوں عہ، یہ، جہ، ضہ پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{به + جه + ضه − ۱۱ عه}} + \frac{1}{\text{جه + ضه + عه − ۱۱ یه}} + \frac{1}{\text{ضه + عه + به − ۱۱ جه}}$$

$$+ \frac{1}{\text{عه + به + جه − ۱۱ ضه}} = ۰$$

اور یہ کہ عہ^{2} + یہ^{2} + جہ^{2} + ضہ^{2} = سا^{2} (۱۳ − ۸ جم ا جم ب جم ج)

جہاں سا بیرونی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۲۸ — ثابت کرو کہ مس $\frac{۳\pi}{۱۱}$ + ۴ جب $\frac{۲\pi}{۱۱}$ = $\sqrt{۱۱}$

۲۹ — اگر مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز ع اور جانبی دائروں کے مرکز ل، م، ن، ہوں تو ثابت کرو کہ مثلثات ع م ن، ع ن ل، ع ل م کے اندرونی دائرے دائرہ ا ب ج کو مس کرتے ہیں اور اِن تین نقاط تماس سے جو مثلث بنتا ہے

اس کے زاویوں کے مماس علی الترتیب

$$\frac{\text{۲ جم}\tfrac{1}{2}\text{ا + جم}\tfrac{1}{2}\text{ب + جم}\tfrac{1}{2}\text{ج - جب}\tfrac{1}{2}\text{ب - جب}\tfrac{1}{2}\text{ج - ۲}}{\text{ا - جم}\tfrac{1}{2}\text{ب - جم}\tfrac{1}{2}\text{ج + جب}\tfrac{1}{2}\text{ب + جب}\tfrac{1}{2}\text{ج}}$$

اور دو متشابہ جملوں کے مساوی ہیں۔

۳۰ — اگر لا ایک صحیح عدد نہ ہو تو ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\Sigma \frac{\text{۲لا + م + ن}}{(\text{لا+م})^2(\text{لا+ن})^2}$$

جس میں م اور ن کو ہر ممکن طریقہ سے غیر مساوی قیمتیں (جو ع اور -ع کے درمیان صفر یا صحیح عدد ہوں) دی گئی ہیں معدوم ہوتا ہے جبکہ ع کو لا انتہا بڑھا دیا جائے۔

۳۱ — ثابت کرو کہ $\text{جب}^{\text{م}}\text{طہ جم}^{\text{ن}}\text{طہ}$ کو اس شکل

$$\text{ا}_{\text{۰}}\,\text{جم}^{\text{جب}}(\text{م+ن})\text{طہ} + \text{ا}_{\text{۱}}\,\text{جم}^{\text{جب}}(\text{م+ن-۲})\text{طہ} + \text{ا}_{\text{۲}}\,\text{جم}^{\text{جب}}(\text{م+ن-۴})\text{طہ} + \dots$$

میں پھیلایا جا سکتا ہے جہاں م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں۔
نیز ثابت کرو کہ

$$(\text{ف+۲})\,\text{ا}_{\text{ف+۲}} + (\text{م-ن})\,\text{ا}_{\text{ف+۱}} + (\text{م+ن-ف})\,\text{ا}_{\text{ف}} = ۰$$

سوائے سلسلہ کی آخری رقموں کی صورت کے جبکہ م اور ن دونوں جفت ہوتے ہیں۔

۳۲ — ایک دائرہ کے محیط کو جسکا مرکز و ہے ن مساوی حصوں میں نقطوں $\text{ف}_{\text{۱}}$، $\text{ف}_{\text{۲}}$، ...، $\text{ف}_{\text{ن}}$ پر تقسیم کیا گیا ہے اور ق کوئی اندرونی

نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ

$$س ف_۱ ق و + س ف_۲ ق و + \dots$$
$$\dots + س ف_ن ق و = ن\, س ف' ق' و$$

جہاں ف' دائرہ پر ایک نقطہ ہے ایسا کہ ق و ف' = ن × ق و ف$_۱$ اور ق و پر ق' ایک نقطہ ہے ایسا کہ (اگر معین ق ر، ق' ر' دائرہ کو ر، ر' میں قطع کریں) ق و ر' = ن × ق و ر ۔

(383) ۳۳ — اگر م$_۱$، م$_۲$، ... م$_س$ وہ صحیح عدد ہوں جو م سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں اور اگر م کے مختلف مفرد اجزائے ضربی ف$_۱$، ف$_۲$، ... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\prod_{۱}^{س} جب\left(ط + \frac{م_ر \pi}{م}\right) = \frac{جب\, م ط \times \prod جب \frac{م ط}{ف_۱ ف_۲} \times \prod جب \frac{م ط}{ف_۱ ف_۲ ف_۳ ف_۴} \dots}{\prod جب \frac{م ط}{ف_۱} \times \prod جب \frac{م ط}{ف_۱ ف_۲ ف_۳} \dots}$$

۳۴ — ف، ق، ر کی سب مثبت صحیح عددی قیمتوں کے لئے جو ہیں ایسی کہ ف + ق + ر = س جبکہ س $\geq$ ۳ ثابت کرو کہ حاصل ضربوں جب ف ع جب ق$\left(ع + \frac{۲\pi}{۳}\right)$ جب ر$\left(ع + \frac{۴\pi}{۳}\right)$ کا مجموعہ صفر ہے سوائے اس صورت کے جبکہ س، ۳ کا ضعف ہو اور

یہ مجموعہ - $\frac{۱}{۴}$ جب س ع ہے جبکہ س، ۳ کا ایک ضعف ہو -

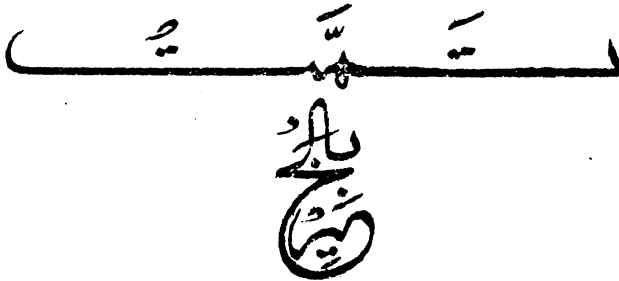
۳۵ — اگر لا = مس ۲ طہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{لا}}{۲}\left\{۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{۴} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۸} - \frac{۵}{۶۴}\,\text{لا}^{۶} + \cdots\right\}،$$

$$\text{جب طہ} = \frac{\text{لا}}{۲}\left\{۱ - \frac{۳}{۸}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۳۱}{۱۲۸}\,\text{لا}^{۴} - \frac{۱۸۷}{۱۰۲۴}\,\text{لا}^{۶} + \cdots\right\}،$$

$$۲\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\,\text{طہ} = \frac{\text{لا}}{۲}\left\{۱ - \frac{۱۱}{۳۲}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۴۳۱}{۲۰۴۸}\,\text{لا}^{۴} - \cdots\right\}$$

تمت

بالخیر

Absolutely convergent	مطلقاً مستدق
Ambiguity of sign	علامت کا ابہام
Ambiguous sign	مبہم علامت
Analytical	تحلیلی
Argument	دلیل، وجہ
Base	اساس، قاعدہ
Centroid	مرکز ہندسی
Circle of convergence	استدقاق کا دائرہ
Circular functions	دائری تفاعل
Circular measure	دائری ناپ
Circum-circle	حائط دائرہ، بیرونی دائرہ
Circumscribed polygon	حائط کثیر الاضلاع
Complex number	ملتف عدد
Complex variable	ملتف متغیر
Conditionally convergent	مشروطاً مستدق
Continuous functions	مسلسل تفاعل

Convergence	استدقاق
Coterminal angles	ہم اختتامی زاویے
Depression (angle of)	(زاویہ) نشیب
Doubly periodic	دو دوری
Elevation	ارتفاع
Escribed circles	جانبی دائرے
Even functions	جفت تفاعل
Exponential functions	قوت نمائی تفاعل
Exponential series	قوت نمائی سلسلہ
External bisectors	خارجی ناصف
Generalized logarithms	تعمیمی لوکارتم
Grades	مرتبے
Hyperbolic functions	زائدی تفاعل
Hyperbolic cosine (cosh)	زائدی جیب التمام (جمز)
Hyperbolic sine (sinh)	زائدی جیب (جیز)
Hyperbolic tangent (tanh)	زائدی مماس (مسز)
Hyperbolic cotangent (coth)	زائدی مماس التمام (ممز)
Hyperbolic secant (sech)	زائدی قاطع (قطز)
Hyperbolic cosecant (cosech)	زائدی قاطع التمام (قمز)
Hypergeometric series	علوی ہندسی سلسلہ
Identity	متماثلہ
In-circle	اندرونی دائرہ
Inequality	لاتساوی
Infinite products	لامتناہی حاصل ضرب
Infinite series	لامتناہی سلسلہ

English	اردو
Inscribed polygon	اندرونی کثیرالاضلاع
Integral values	صحیح عددی قیمتیں
Internal bisectors	اندرونی ناصف
Inverse circular functions	مقلوب دائری تفاعل
Irrational	غیر منطق
Lateral	جانبی
Limit	انتہا
Limits	حدود
Maximum	اعظم
Minimum	اقل
Minute	دقیقہ
Modulus	مقیاس
Multiple angles	ضعفی زاوے
Natural circular functions	طبعی دائری تفاعل
Natural logarithms	طبعی لوکارثم
Necessary and sufficient condition	ضروری اور کافی شرط
Nine-point circle	نونقطی دائرہ
Oblique-angled triangle	غیر قائم الزاویہ مثلث
Odd functions	طاق تفاعل
Orthocentre	مرکز عمودی
Parallelepiped	متوازی السطوح
Partial fractions	جزوی کسور
Pedal line	خط پائین
Pedal triangle	مثلث پائین
Period	دور

Periodicity	دوریت
Porismatic systems	استنباطی نظام
Principal value	صدر قیمت
Projection	ظل
Quadrature of the circle	دائرہ کی تربیع
Radian	نیم قطری
Raduis of convergence	استدقاق کا نصف قطر
Raduis vector	سمتی نیم قطر
Real variable	حقیقی متغیر
Regular polygon	منتظم کثیر الاضلاع
Second	ثانیہ
Sector	قطاع
Sequence	تواتر
Semi-convergent	نیم مستدق
Sexagesimal system	ستینی نظام
Singly periodic	یک دوری
Submultiple angles	تحت ضعفی زاوے
Sum-functions	مجموعہ تفاعل
Symmetrical functions	متشاکل تفاعل
Transcendental number	علوی عدد
Trigonometrical functions	مثلثی تفاعل
Uniform convergence	یکساں استدقاق